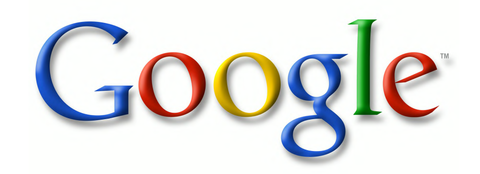
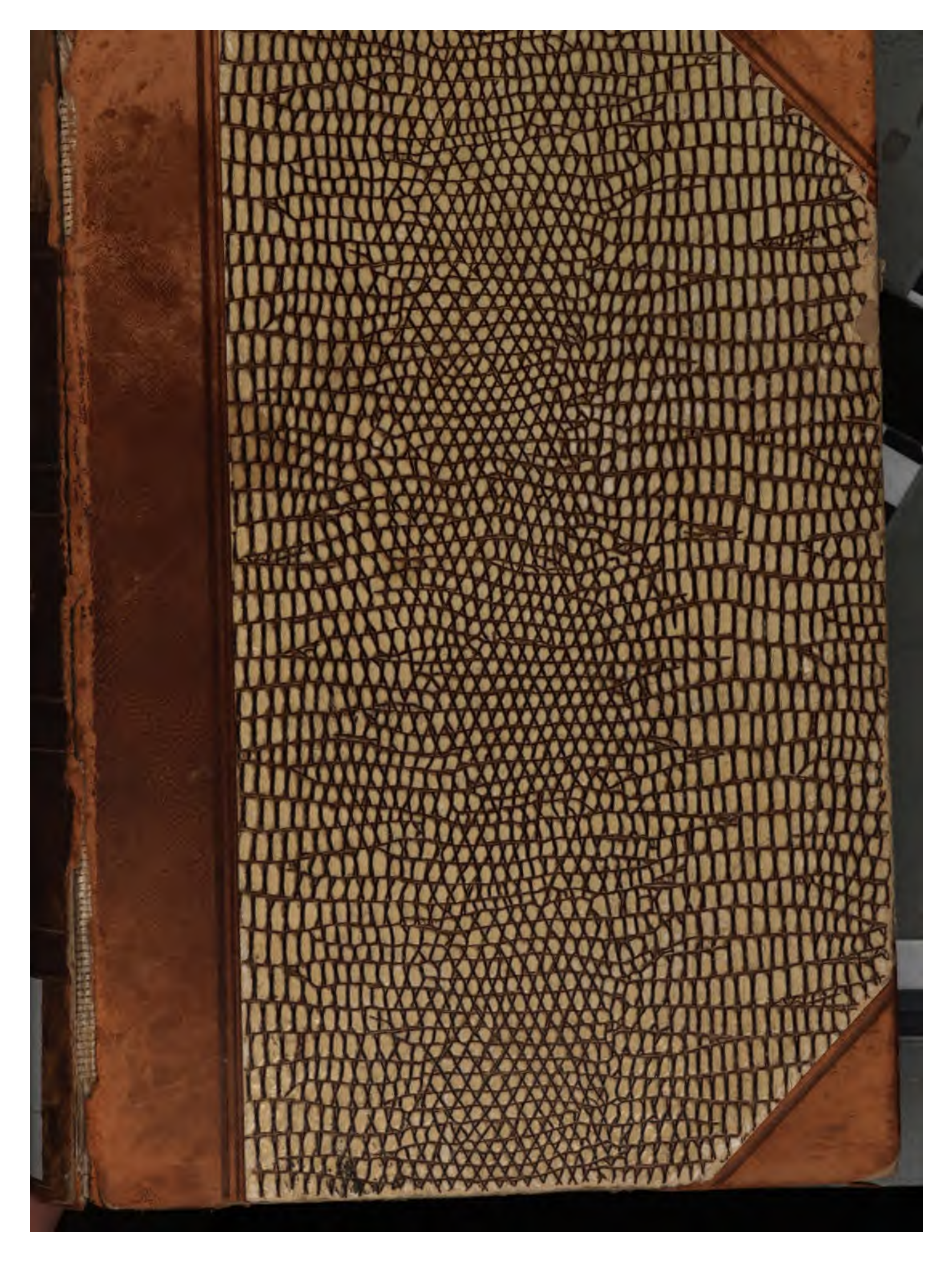




P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daſs bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schluſsband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen, sowie ein Generalregister zu obigen Bänden bringen wird.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik** und die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**.

Seit 1868 veröffentliche ich in kurzen Zwischenräumen: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese „Mitteilungen“, welche unentgeltlich in 20000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, welches meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte jährlich zwei- bis dreimal neu gedruckte **Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 96. Ausgabe [XL u. 168 S. gr. 8], in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraſse 3. **B. G. Teubner.**

LUIGI BIANCHI

VORLESUNGEN

ÜBER

DIFFERENTIALGEOMETRIE.

AUTORISIERTE DEUTSCHE ÜBERSETZUNG

VON

MAX LUKAT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.

Vorwort.

Als ich im Jahre 1886 die „Lezioni di geometria differenziale" lithographiert erscheinen liess, war es meine Absicht, dieselben nach den allmählich im Lehrgang eingeführten Modificationen und Zusätzen, welche die Unterrichtspraxis und die neueren Fortschritte der Theorie mir raten würden, später in den Druck zu geben. Der Nutzen der beabsichtigten Arbeit schien mir nicht zweifelhaft, da unter den italienischen und ausländischen Veröffentlichungen damals ein Buch fehlte, das ausführlich die Anwendungen der Infinitesimalrechnung in der Geometrie der Flächen behandelte.

Heutzutage liegt die Sache ganz anders. Um von anderen kleineren Werken zu schweigen, besitzen wir jetzt die ersten drei Bände des Lehrbuchs von Darboux: „Leçons sur la théorie générale des surfaces", das eine vollständige Zusammenstellung aller bisher auf dem Gebiete der Infinitesimalgeometrie gewonnenen Resultate enthält. Wenn ich trotzdem meine ursprüngliche Absicht ausgeführt habe, so wurde ich dazu durch die Betrachtung geführt, dass Zweck und Plan meiner Arbeit wesentlich von denen des hervorragenden französischen Mathematikers verschieden sind. Indem ich mich auf die Auseinandersetzung der Grundzüge der Theorie und ihrer hauptsächlichsten Anwendungen beschränke, habe ich vor allem im Sinne gehabt, in einem Bande von nicht zu grossem Umfange alles das zusammenzustellen, was den Anfängern, die die geometrischen Anwendungen der Infinitesimalrechnung gründlich kennen zu lernen wünschen, nötig ist, um sich die allgemeinen Methoden anzueignen und imstande zu sein, Originalabhandlungen selbst zu lesen. Mit Bezug hierauf will ich gleich bemerken, dafs verschiedene Kapitel des Buches, und zwar besonders die Kapitel VIII, XI, XII, XIII, XV und XX beim ersten Studium überschlagen werden können.

Die Methode, welcher der vorliegende Lehrgang durchweg folgt, hat ihren Ursprung in den berühmten „Disquisitiones generales circa superficias curvas“ von Gauss und besteht darin, die Differentialgeometrie als das Studium einer quadratischen Differentialform oder solcher zwei simultanen Formen zu betrachten.

Deshalb wird man auch nach einem ersten Kapitel, das über die hauptsächlichsten Eigenschaften der Kurven mit doppelter Krümmung handelt, ein zweites Kapitel finden, in dem in aller Kürze die Theorie der quadratischen Differentialformen auseinandergesetzt wird. Die Algorithmen, die sich aus dieser Theorie herleiten, haben den grossen Vorteil, den Formeln ein einfaches und elegantes Aussehen zu geben, das sich leicht dem Gedächtnis einprägt, während sie gestatten, den Coordinatenlinien ihre völlige Allgemeinheit zu belassen: sie werden durchweg in diesem Buche in Anwendung gebracht werden, wofür dieses Kapitel als Einleitung dient.

Das allgemeine Studium der Flächen und zwar sowohl der Eigenschaften, die ihren wirklichen Gestalten im Raume innewohnen, als auch der bei Biegung der Fläche invariablen (Theorie der Abwickelbarkeit) wird in den folgenden sieben Kapiteln auseinandergesetzt (III—IX). Es folgen drei Kapitel (X, XI, XII), die von zwei eng mit einander verbundenen Theorien handeln: von den doppelt unendlichen Strahlensystemen (Congruenzen) und von den infinitesimalen Verbiegungen der Flächen, oder, wenn man will, von dem Entsprechen durch Orthogonalität der Elemente; sie haben schon viele wichtige Ergebnisse für die Theorie der Flächen geliefert und versprechen auch noch andere zu geben. Kapitel XIII ist der Theorie der cyklischen Systeme gewidmet, die völlig Ribaucour zu verdanken ist, und die in mehrfacher Beziehung zu den beiden vorhergehenden steht. Ich gehe dann über zur Behandlung von zwei Specialklassen von Flächen, die an Wichtigkeit die bisher behandelten übertreffen: der Minimalflächen (XIV, XV) und der Flächen mit constanter Krümmung (XVI, XVII). In Kapitel XIV setze ich, ausgehend von den Weierstrass'schen Formeln, die in einfachster und elegantester Form die Theorie der Minimalflächen mit der der Functionen von complexen Veränderlichen verbinden, die allgemeinen Sätze, die auf diese Flächen Bezug haben, auseinander. Kapitel XV bringt einige allgemeine auf das Plateau'sche Problem bezügliche Anweisungen, aber anstatt mich in diesen Gegenstand tiefer einzulassen, der beim Leser die Kenntnis der neueren Theorie der linearen Differentialgleichungen voraussetzen würde, habe ich es vorgezogen, ausführlich das klassische Beispiel der Schwarz'schen Fläche zu behandeln, wo schon einige Kenntnisse der conformen Abbildungen genügen, um zum Ziel zu gelangen.

Die analytische Fortsetzung der Schwarz'schen Fläche wird hier mit elementareren Mitteln behandelt, als die sind, welche Schwarz bei seiner Abhandlung anwendet, da nur auf die Grenzlinie, die einen ersten Teil der Fläche bestimmt, Bezug genommen wird und dann die Eigenschaften der Bewegungsgruppen benutzt werden.

Im ersten Kapitel über die pseudosphärischen Flächen (XVI) wird die Geometrie dieser Flächen behandelt, ein Abriss der nichteuklidischen Geometrie gegeben mit Hilfe derjenigen conformen Abbildung auf die Halbebene, die durch die modernen Untersuchungen über die Theorie der linearen Substitutionsgruppen und der automorphen Functionen so grosse Wichtigkeit gewonnen hat (Klein-Poincaré). Das folgende Kapitel (XVII) ist den Transformationsmethoden der pseudosphärischen Flächen gewidmet, besonders der Bäcklund'schen Transformation. Der neue Satz über die Vertauschbarkeit zweier solcher Transformationen mit seinen Folgerungen giebt der allmählichen Anwendung der Methode den höchsten Grad der Einfachheit und hebt die Wichtigkeit der Bäcklund'schen Transformation noch höher empor, die von verschiedenen Mathematikern mir noch nicht genügend anerkannt scheint.

Das Buch schliesst mit drei Kapiteln über die krummlinigen Coordinaten im Raume und ihren dreifachen Systemen orthogonaler Flächen. Im ersten (XVIII) werden die allgemeinen Sätze behandelt, die sich auf diese Systeme beziehen, bis zur Aufstellung der wichtigen Transformation von Combescure-Darboux. Im XIX. Kapitel beschäftige ich mich nochmals mit den cyklischen Systemen Ribaucours, und mit Anwendung der Combescure'schen Transformation leite ich daraus nur mit Quadraturen die allgemeineren dreifach orthogonalen Systeme mit einer Reihe von Linien ebener Krümmung ab. Im weiteren Verlauf handelt das Kapitel von den elliptischen Coordinaten mit Anwendung auf das Studium der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid. Das letzte Kapitel ist schliesslich eine Zusammenfassung meiner Abhandlungen über diejenigen dreifach orthogonalen Systeme, welche eine Reihe von Flächen mit constanter Krümmung enthalten.

Zum Schlusse muss ich noch anführen, dass ich mich für die Citate im Texte auf die wichtigsten beschränkt habe, besonders gilt dies für die Stellen des Werkes von Darboux, aus denen ich manchmal geschöpft habe.

Um die Kargheit der Citate zu verringern, habe ich am Ende des Buches ein Verzeichnis der hauptsächlichsten zu Rate gezogenen Werke angefügt.

Vorwort zur deutschen Ausgabe.

Ausser durch kleinere, während des Druckes als zweckmässig erkannte Änderungen des Textes unterscheidet sich diese deutsche Ausgabe meiner „Lezioni di geometria differenziale“ von der Originalausgabe noch durch Hinzufügung der beiden letzten Kapitel XXI und XXII, die in aller Kürze die Hauptformeln der n-dimensionalen Differentialgeometrie, mit besonderer Rücksicht auf Räume constanter (Riemann'scher) Krümmung, behandeln. Die vorliegende Fassung dieser neu hinzugekommenen Theorien stammt aus Universitätsvorlesungen des Jahres 1894/95. Der Verfasser hat sich dabei bemüht, aus der reichen Litteratur das zur ersten Orientierung Wesentliche herauszunehmen und mit den vorhergehenden Teilen des Buches zu einem einheitlichen Ganzen zu vereinigen.

Als besonders vom Verfasser herrührend sei es gestattet, den neuen Beweis (§§ 321 und 322) für die Abwickelbarkeit zweier Räume mit derselben constanten Krümmung hervorzuheben sowie die Art und Weise, wie im § 331 die verallgemeinerten Formeln von Gauss und Codazzi im beliebig gekrümmten Raume von n Dimensionen aus den Christoffel'schen Grundformeln für Äquivalenz quadratischer Differentialformen abgeleitet wurden.

Endlich möchte ich den Leser auf die ganz neue Transformationstheorie für die Flächen constanter positiver Krümmung aufmerksam machen, über die im Anhang zum XVII. Kapitel (S. 641) kurz berichtet wird. Den letzten Untersuchungen, die Herr Guichard über Deformationen der Rotationsflächen zweiter Ordnung aufgestellt hat, kommt hauptsächlich das Verdienst zu, den neuen wesentlichen Fortschritt in der Theorie der Flächen constanter Krümmung ermöglicht zu haben.

Inhaltsverzeichnis.

Kapitel I.

Curven doppelter Krümmung.

Kapitel II.

Quadratische Differentialformen.

Kapitel III.

Krummlinige Coordinaten auf den Flächen. Conforme Abbildung.

Kapitel IV.

Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.

Kapitel V.

Die sphärische Abbildung nach Gauss. Ebenencoordinaten.

Kapitel VI.

Geodätische Krümmung. — Geodätische Linien.

Kapitel VII.

Auf einander abwickelbare Flächen.

Kapitel VIII.

Verbiegung der Linienflächen.

Kapitel IX.

Evolutenflächen und Weingarten'scher Satz.

Kapitel X.

Strahlensysteme (Congruenzen).

Kapitel XI.

Unendlich kleine Verbiegungen der Flächen und Entsprechen durch Orthogonalität der Elemente.

Kapitel XII.

W-Strahlensysteme.

Kapitel XIII.

Die normalen Kreissysteme.

Kapitel XIV.

Die Minimalflächen.

Kapitel XV.

Das Plateau'sche Problem und die Schwarz'sche Minimalfläche.

Kapitel XVI.

Pseudosphärische Geometrie.

Kapitel XVII.

Transformationen der Flächen mit constantem Krümmungsmass.

Kapitel XVIII.

Allgemeine Sätze über dreifache orthogonale Flächensysteme.

Kapitel XIX.

Untersuchung einiger specieller dreifacher Orthogonalsysteme.

Kapitel XX.

Dreifache pseudosphärische Orthogonalsysteme.

Kapitel XXI.

n-dimensionale Räume constanten Krümmungsmasses.

Kapitel XXII.

Die Hyperflächen in den Räumen constanten Krümmungsmasses.

Anhang zu Kapitel XVII.

Kapitel I.

Curven doppelter Krümmung.

Tangente und Normalenebene. — Erste Krümmung oder Flexion. — Hauptnormale und Binormale. — Zweite Krümmung oder Torsion. — Formeln von Frenet. – Die natürlichen Gleichungen einer Curve. — Cylindrische Schraubenlinien. - Abwickelbare Flächen. — Polardeveloppable einer Curve. — Schmiegungskugel. — Evoluten und Evolventen. — Orthogonale Trajectorien eines ∞^1-Ebenensystems. — Bertrand'sche Curven.

§ 1. Tangente und Normalenebene.

Um eine Curve C analytisch zu definieren, beziehen wir sie auf ein orthogonales Cartesisches Axensystem OX, OY, OZ und drücken die Coordinaten x, y, z eines beweglichen Punktes der Curve als Functionen eines Parameters u aus:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Bezüglich der Functionen $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ bemerken wir ein für alle Mal, dass sie samt ihren ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten als endlich und stetig vorausgesetzt werden, ausgenommen höchstens in einzelnen besonderen Punkten.

Jedem speciellen Wert u_1 des Parameters u innerhalb des Intervalls, in dem die Functionen $x(u)$, $y(u)$, $z(u)$ definiert sind, entspricht eine specielle Lage M_1 des erzeugenden Punktes M. Wenn sich u stetig ändert, so bewegt sich der Punkt M nach einem stetigen Gesetz im Raume und beschreibt so die Curve C. Wir wollen nun immer annehmen, dass die Richtung, in der sich der erzeugende Punkt M bewegt, wenn der Parameter u wächst, als die positive, die entgegengesetzte als die negative Richtung der Curve C gerechnet werden soll.

In den meisten Fällen wählen wir als Parameter oder Hilfsveränderliche u den von einem festen (Anfangs-) Punkt der Curve C ge-

rechneten Bogen s derselben. In jedem Falle haben wir zur Bestimmung von s als Function von u die bekannte Gleichung:

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}.$$

Hierbei müssen wir bei der Festsetzung, dass s mit wachsendem u gerechnet wird, für die Wurzel das positive Zeichen wählen.

In einem Punkte M der Curve C betrachten wir die Tangente und wählen ihre positive Richtung übereinstimmend mit derjenigen der Curve. Bezeichnen wir dann, wie wir es in nachstehendem stets thun werden, mit

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \cos\gamma$$

die Cosinus der Winkel der positiven Tangentenrichtung, so haben wir die Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dx}{du}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{dy}{du}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}}$$

oder:

(1) $$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds}.$$

In diesen Gleichungen (1) ist es gleichgiltig, ob wir die rechten Seiten als Quotienten von Differentialen oder als partielle Ableitungen nach dem Bogen betrachten.

Die in M auf der Tangente senkrecht stehende Ebene heisst Normalenebene der Curve; sie hat die Gleichung:

$$(X - x)\cos\alpha + (Y - y)\cos\beta + (Z - z)\cos\gamma = 0,$$

wo X, Y, Z die laufenden Punktcoordinaten sind.

§ 2. Die erste Krümmung oder Flexion.

Aus der mehr oder weniger schnellen Abweichung, die der Punkt beim Beschreiben der Curve von der geradlinigen Richtung erfährt, schliessen wir auf die grössere oder geringere Krümmung der Curve selbst. Um für diesen Begriff eine genaue Fassung zu erhalten und ihn der Messung unterwerfen zu können, betrachten wir zwei benachbarte Punkte der Curve, M und M_1. Dividieren wir dann den sehr kleinen Winkel $\Delta\varepsilon$, den die Richtungen der beiden Tangenten in M

und M_1 mit einander bilden, durch die Länge des Bogens MM_1, so convergiert der Quotient

$$\frac{\varDelta \varepsilon}{\text{Bogen } MM_1},$$

wenn sich M_1 dem Punkte M unendlich nähert, gegen einen bestimmten und endlichen Grenzwert, der als Mass der ersten Krümmung, Biegung oder Flexion der Curve in M betrachtet wird. Wir bezeichnen diesen Grenzwert mit $\frac{1}{\varrho}$, und sein reciproker Wert ϱ heisst, als Strecke gedeutet, Radius der ersten Krümmung.

Um die Existenz dieses Grenzwertes nachzuweisen und gleichzeitig den Ausdruck für ihn zu finden, stellen wir folgende Ueberlegung an: Um den Coordinatenanfangspunkt und mit dem Radius Eins beschreiben wir eine Kugel und schneiden durch sie die Strahlen, die parallel den positiven Richtungen der aufeinanderfolgenden Curventangenten gezogen werden. Der Ort der Endpunkte dieser Strahlen heisst die sphärische Indicatrix C' der Tangenten; jeder Lage des erzeugenden Punktes $M(x, y, z)$ auf der Curve C entspricht ein Punkt $M'(x', y', z')$ auf der sphärischen Indicatrix C', und es ist offenbar

$$(2) \qquad x' = \cos\alpha, \quad y' = \cos\beta, \quad z' = \cos\gamma.$$

Betrachten wir nun einen Punkt M_1 der Curve C, der M benachbart ist, so wird der Winkel $\varDelta\varepsilon$ gerade durch den Bogen des grössten Kreises gemessen, der auf der Bildkugel die Bildpunkte M' und M_1' verbindet. Bei der Berechnung des Grenzwertes

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{\varDelta s = 0} \frac{\varDelta\varepsilon}{\varDelta s}$$

können wir statt $\varDelta\varepsilon$ den entsprechenden Bogen der Indicatrix setzen, denn convergiert $\varDelta\varepsilon$ gegen Null, so nähert sich das Verhältnis dieses Bogens zu $\varDelta\varepsilon$ der Einheit. Bezeichnen wir mit ds' das Bogenelement der sphärischen Indicatrix, so haben wir also ohne weiteres

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{ds'}{ds}$$

oder nach (2)

$$(3) \qquad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2}.$$

Wird s als unabhängige Variable genommen, so kann diese Formel nach (1) auch so geschrieben werden:

$$(3^*) \qquad \frac{1}{\varrho} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Da der ersten Krümmung nur ein absoluter Wert zukommt, so denken wir uns in diesen Gleichungen stets den positiven Wert der Wurzel gewählt.

Wir bemerken sofort, dass eine Curve C eine Strecke lang nicht die Flexion Null haben kann, ohne längs dieser Strecke geradlinig zu sein, denn nach den Gleichungen:

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = 0, \quad \frac{d\cos\beta}{ds} = 0, \quad \frac{d\cos\gamma}{ds} = 0,$$

die dann beständen, würden $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ constant sein und also die Gleichungen gelten:

$$x = s\cos\alpha + a,\ y = s\cos\beta + b,\ z = s\cos\gamma + c,\ (a, b, c = \text{Const.}),$$

die eine Gerade definieren.

§ 3. Die Schmiegungsebene.

Unter allen Ebenen, die durch den Punkt M der Curve C gehen, befindet sich eine, die sich in der Umgebung von M weniger als jede andere von der Curve entfernt und die Schmiegungsebene (osculierende Ebene) der Curve in M heisst. Wir schreiben nun die Gleichung einer beliebigen durch den Punkt $M(x, y, z)$ gelegten Ebene in der Form:

$$(4) \qquad (X - x)\cos a + (Y - y)\cos b + (Z - z)\cos c = 0,$$

wo $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ die Richtungscosinus der Normale bedeuten, wählen den Bogen s der Curve als Parameter und betrachten einen M benachbarten Punkt M', der dem Werte $s + h$ des Bogens entspricht, wo h unendlich klein (von der ersten Ordnung) ist. Sind Δx, Δy, Δz die bezüglichen Zunahmen von x, y, z beim Uebergange von s zu $s + h$, so haben wir für die Entfernung d des Punktes M' von der Ebene (4) die Gleichung:

$$d = \Delta x \cos a + \Delta y \cos b + \Delta z \cos c.$$

Nun ist

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{dx}{ds} h + \dfrac{d^2x}{ds^2}\dfrac{h^2}{2} + \varepsilon_1, \\ \Delta y = \dfrac{dy}{ds} h + \dfrac{d^2y}{ds^2}\dfrac{h^2}{2} + \varepsilon_2, \\ \Delta z = \dfrac{dz}{ds} h + \dfrac{d^2z}{ds^2}\dfrac{h^2}{2} + \varepsilon_3, \end{cases}$$

wo ε_1, ε_2, ε_3 unendlich klein von der dritten Ordnung sind, und also

$$d = \left(\cos a \frac{dx}{ds} + \cos b \frac{dy}{ds} + \cos c \frac{dz}{ds}\right) h$$
$$+ \left(\cos a \frac{d^2x}{ds^2} + \cos b \frac{d^2y}{ds^2} + \cos c \frac{d^2z}{ds^2}\right)\frac{h^2}{2} + \eta,$$

wo η unendlich klein von der dritten Ordnung ist. Die Ebene, welche durch die Bedingungen:

$$\cos a \frac{dx}{ds} + \cos b \frac{dy}{ds} + \cos c \frac{dz}{ds} = 0\,,$$

$$\cos a \frac{d^2x}{ds^2} + \cos b \frac{d^2y}{ds^2} + \cos c \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

bestimmt ist, von denen die erste besagt, dass die fragliche Ebene durch die Tangente geht, ist also diejenige, welche in der Umgebung von M weniger als die übrigen von der Curve abweicht. Somit haben wir die Existenz der Schmiegungsebene nachgewiesen, deren Gleichung wir nach dem Vorstehenden in Determinantenform wie folgt schreiben können*):

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn für den betrachteten Punkt M die drei Unterdeterminanten der Matrix

$$\begin{Vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{Vmatrix}$$

gleichzeitig Null sind; dann ist die Schmiegungsebene in M unbestimmt. Nun wird dies für gewisse einzelne (singuläre) Punkte wohl stattfinden können; sollte dies jedoch längs einer ganzen Strecke der Fall sein, so wäre die Curve längs dieser Strecke geradlinig. Und in der That, berücksichtigen wir die Identitäten:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1\,,$$

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} = 0\,,$$

so sehen wir, dass die Summe der Quadrate der Unterdeterminanten in der

---

*) Es ist klar, dass, wenn die unabhängige Variable u beliebig wäre, die Gleichung der Schmiegungsebene die analoge Form:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{dx}{du} & \frac{dy}{du} & \frac{dz}{du} \\ \frac{d^2x}{du^2} & \frac{d^2y}{du^2} & \frac{d^2z}{du^2} \end{vmatrix} = 0$$

haben würde.

obigen Matrix wegen (3) gleich dem Quadrat der ersten Krümmung ist. Wir wollen auch auf andere Definitionen für die Schmiegungsebene hinweisen, die immer auf die Gleichung (5) führen. Wenn durch die Tangente in M und durch einen Curvenpunkt M', der M benachbart ist, eine Ebene gelegt wird, so nähert sich diese, wenn M' gegen M convergiert, der Schmiegungsebene als Grenzebene. Ebenso nähert sich die Ebene durch M und zwei andere benachbarte Curvenpunkte M' und M'' in der Grenze der Schmiegungsebene in M, wenn wir M' und M'' gleichzeitig nach M rücken lassen (so dass die Differenzen zwischen den Coordinaten von M' und M'' nicht von höherer Ordnung unendlich klein werden wie die entsprechenden Differenzen gegen M). Wegen dieser letzten Eigenschaft sagt man auch kurz, dass die Schmiegungsebene in M die durch M und zwei aufeinanderfolgende Curvenpunkte M' und M'' gelegte Ebene ist.

§ 4. Hauptnormale und Binormale.

Die Schmiegungs- und die Normalenebene in M schneiden sich in einer Geraden, die in M auf der Curve senkrecht steht und den Namen Hauptnormale der Curve in M führt; es ist diejenige Normale der Curve, welche in der Schmiegungsebene liegt. Binormale dagegen heisst die Senkrechte in M auf der Schmiegungsebene.

Es muss nun in geeigneter Weise festgesetzt werden, welche Richtung der Haupt- und der Binormale wir im Folgenden als positiv annehmen wollen, und wir schicken zu diesem Zwecke die nachstehenden Bemerkungen voraus.

Wir betrachten die Ebene durch Tangente und Binormale, deren Gleichung lautet:

$$(6) \qquad (X-x)\frac{d^2x}{ds^2}+(Y-y)\frac{d^2y}{ds^2}+(Z-z)\frac{d^2z}{ds^2}=0.$$

Diese Gleichung stellt nämlich wegen der Identität:

$$\frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{dz}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}=0$$

und wegen der Gleichung (5) der Schmiegungsebene gerade die Ebene dar, welche durch die Tangente senkrecht zur Schmiegungsebene gelegt ist.

Wir berechnen nun die Entfernung δ eines M dicht benachbarten Curvenpunktes M' von der Ebene (6). Bezeichnen wir mit h den (unendlich kleinen) Zuwachs des Bogens s beim Uebergange von M zu M' und mit Δx, Δy, Δz die Zunahmen der Coordinaten, so haben wir

$$\delta = \frac{\Delta x \frac{d^2x}{ds^2} + \Delta y \frac{d^2y}{ds^2} + \Delta z \frac{d^2z}{ds^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

oder wegen der Gleichungen (a) des vorigen Paragraphen

$$\delta = \frac{h^2}{2\varrho} + \varepsilon,$$

wo ε in Bezug auf h unendlich klein von der dritten Ordnung ist. Aus dieser Gleichung folgt, dass das Zeichen von δ von demjenigen von h unabhängig ist*), dass also die Curve in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte ganz auf der einen Seite der Ebene durch Tangente und Binormale liegt. Als die positive Seite dieser Ebene bezeichnen wir diejenige, welche in der Umgebung von M der Curve zugewandt ist; als positive Richtung der Hauptnormale, welche eben die Senkrechte auf dieser Ebene ist, wird folglich diejenige festgesetzt, nach welcher die positive Seite der Ebene selbst liegt. Bezeichnen wir also, wie es des weiteren stets geschehen soll, mit

$$\cos\xi, \quad \cos\eta, \quad \cos\zeta$$

die Cosinus der positiven Richtung der Hauptnormale, so haben wir nach dem Vorstehenden

(7) $$\cos\xi = \varrho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\eta = \varrho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \cos\zeta = \varrho\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Endlich wollen wir unter positiver Richtung der Binormale diejenige verstehen, die in Bezug auf die bereits bestimmten positiven Richtungen der Tangente und Hauptnormale ebenso gelegen ist wie die positive Richtung der z-Axe zu derjenigen der x- und der y-Axe. Führen wir für die Richtungscosinus der Binormale die Bezeichnungen

$$\cos\lambda, \quad \cos\mu, \quad \cos\nu$$

ein, so haben wir nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie**)

$$\cos\lambda = \cos\beta\cos\zeta - \cos\gamma\cos\eta, \qquad \cos\mu = \cos\gamma\cos\xi - \cos\alpha\cos\zeta,$$
$$\cos\nu = \cos\alpha\cos\eta - \cos\beta\cos\xi$$

---

*) Ausser in den singulären Punkten, für welche $\frac{1}{\varrho} = 0$ ist.

**) Man erinnere sich, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\xi & \cos\eta & \cos\zeta \\ \cos\lambda & \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix} = +1$$

und jedes ihrer Elemente gleich der zugehörigen Unterdeterminante ist.

oder:

$$(8)\quad \cos\lambda = \varrho \begin{vmatrix} \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix}, \quad \cos\mu = \varrho \begin{vmatrix} \frac{dz}{ds} & \frac{dx}{ds} \\ \frac{d^2z}{ds^2} & \frac{d^2x}{ds^2} \end{vmatrix}, \quad \cos\nu = \varrho \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} \end{vmatrix}.$$

Das durch die positiven Richtungen der Tangente, der Haupt- und der Binormale bestimmte rechtwinklige Trieder soll der Kürze wegen das Haupttrieder der Curve in M genannt werden.

§ 5. Die zweite Krümmung oder Torsion.

Wenn die Curve C eben ist, so fällt ihre Schmiegungsebene in jedem Punkte mit der Curvenebene zusammen. Bei einer Raumcurve dagegen ändert sie sich bei Aenderung des Osculationspunktes M, und die Schnelligkeit ihrer Abweichung, d. h. die Schnelligkeit, mit der sich die Curve von ein und derselben Ebene entfernt, wird durch die zweite Krümmung oder Torsion der Curve gemessen.

Um auch diesen Begriff hier genau zu fassen, betrachten wir zwei dicht benachbarte Punkte der Curve, M und M_1; ihre beiden Schmiegungsebenen bilden einen sehr kleinen Winkel $\varDelta\sigma$ mit einander, und der Quotient

$$\frac{\varDelta\sigma}{\text{Bogen}\, MM_1} = \frac{\varDelta\sigma}{\varDelta s}$$

convergiert, wenn M_1 nach M rückt, gegen einen bestimmten und endlichen Grenzwert, welcher als Mass der Torsion der Curve genommen und, mit passendem Vorzeichen versehen, mit $\frac{1}{T}$ bezeichnet werden soll. Sein reciproker Wert T heisst Torsionsradius.

Um den Wert für $\frac{1}{T}$ zu finden, beachten wir zunächst, dass der Winkel der beiden Schmiegungsebenen, $d\sigma$, durch den Winkel der beiden aufeinanderfolgenden Binormalen in M und M_1 gemessen wird. Construieren wir also ganz analog wie in § 2 die sphärische Indicatrix der Binormalen, deren erzeugender Punkt die Coordinaten

$$x_1 = \cos\lambda, \quad y_1 = \cos\mu, \quad z_1 = \cos\nu$$

hat, und bezeichnen wir mit ds_1 ihr Bogenelement

$$ds_1 = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2},$$

so haben wir offenbar

$$\frac{1}{T} = \pm \frac{ds_1}{ds},$$

d. h.

$$(9)\qquad \frac{1}{T} = \pm \sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2}.$$

Das Vorzeichen der Torsion wird im nächsten Paragraphen passend bestimmt werden; für jetzt bemerken wir, dass die einzigen Curven mit der Torsion Null die ebenen Curven sind. In der That folgt aus $\frac{1}{T} = 0$ wegen (9), dass $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ constant sind; nehmen wir der Einfachheit halber die feste Richtung der Binormale zur z-Axe, so haben wir $\cos\gamma = 0$ und also

$$z = \text{const.},$$

d. h. die Curve liegt in einer zur xy-Ebene parallelen Ebene.

§ 6. **Formeln von Frenet.**

Wir gehen nun zur Ableitung der sehr wichtigen Formeln über, welche die Differentialquotienten der neun Cosinus der drei Hauptrichtungen durch die Cosinus selbst und durch die Radien der ersten und zweiten Krümmung, ϱ und T, ausdrücken.

Drei von diesen Formeln folgen unmittelbar aus den Gleichungen (7) des § 4 (S. 7), welche ergeben:

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{\cos\xi}{\varrho}, \quad \frac{d\cos\beta}{ds} = \frac{\cos\eta}{\varrho}, \quad \frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{\cos\zeta}{\varrho}.$$

Differenzieren wir nun die Identität:

$$\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0$$

unter Berücksichtigung der früheren Gleichungen nach s, so erhalten wir:

$$\text{(b)} \qquad \cos\alpha\frac{d\cos\lambda}{ds} + \cos\beta\frac{d\cos\mu}{ds} + \cos\gamma\frac{d\cos\nu}{ds} = 0;$$

die andere Identität:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

giebt nach s differenziert:

$$\text{(c)} \qquad \cos\lambda\frac{d\cos\lambda}{ds} + \cos\mu\frac{d\cos\mu}{ds} + \cos\nu\frac{d\cos\nu}{ds} = 0,$$

und durch Combination von (b) und (c) folgt:

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} : \frac{d\cos\mu}{ds} : \frac{d\cos\nu}{ds} = \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\mu & \cos\nu \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ \cos\nu & \cos\lambda \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\lambda & \cos\mu \end{vmatrix},$$

d. h.

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} : \frac{d\cos\mu}{ds} : \frac{d\cos\nu}{ds} = \cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta.$$

Daraus folgt:

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = +\cos\xi\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2},$$

$$\frac{d\cos\mu}{ds} = +\cos\eta\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2},$$

$$\frac{d\cos\nu}{ds} = +\cos\zeta\sqrt{\left(\frac{d\cos\lambda}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\mu}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\cos\nu}{ds}\right)^2},$$

und setzen wir nun fest, dass das Vorzeichen der Wurzel, das in (9) unbestimmt gelassen wurde, ebenso wie in diesen drei Gleichungen gewählt wird, so haben wir:

$$(a') \qquad \frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{\cos\xi}{T}, \qquad \frac{d\cos\mu}{ds} = \frac{\cos\eta}{T}, \qquad \frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{\cos\zeta}{T}.$$

Es wird hiermit der Torsion nicht allein ein absoluter Wert, sondern auch ein bestimmtes Vorzeichen erteilt, und es erübrigt nur noch zu untersuchen — was wir sofort thun werden — welche geometrische Bedeutung das positive oder negative Vorzeichen der Torsion hat.

Wir vervollständigen die Formeln (a) und (a′) durch diejenigen für

$$\frac{d\cos\xi}{ds}, \quad \frac{d\cos\eta}{ds}, \quad \frac{d\cos\zeta}{ds}.$$

Zu diesem Zwecke beachten wir, dass

$$\cos\xi = \cos\gamma\cos\mu - \cos\beta\cos\nu$$

ist, und wenn wir nach s differenzieren und (a) und (a′) berücksichtigen, erhalten wir:

$$\frac{d\cos\xi}{ds} = \frac{1}{\varrho}(\cos\zeta\cos\mu - \cos\eta\cos\nu) + \frac{1}{T}(\cos\gamma\cos\eta - \cos\beta\cos\zeta)$$
$$= -\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos\lambda}{T}$$

und analoges für die beiden anderen Differentialquotienten.

Stellen wir also die erhaltenen Formeln zusammen, so haben wir folgendes System:

$$(A)\begin{cases} \dfrac{d\cos\alpha}{ds} = \dfrac{\cos\xi}{\varrho}, & \dfrac{d\cos\beta}{ds} = \dfrac{\cos\eta}{\varrho}, & \dfrac{d\cos\gamma}{ds} = \dfrac{\cos\zeta}{\varrho}, \\ \dfrac{d\cos\xi}{ds} = -\dfrac{\cos\alpha}{\varrho} - \dfrac{\cos\lambda}{T}, & \dfrac{d\cos\eta}{ds} = -\dfrac{\cos\beta}{\varrho} - \dfrac{\cos\mu}{T}, & \dfrac{d\cos\zeta}{ds} = -\dfrac{\cos\gamma}{\varrho} - \dfrac{\cos\nu}{T}, \\ \dfrac{d\cos\lambda}{ds} = \dfrac{\cos\xi}{T}, & \dfrac{d\cos\mu}{ds} = \dfrac{\cos\eta}{T}, & \dfrac{d\cos\nu}{ds} = \dfrac{\cos\zeta}{T}. \end{cases}$$

Dieses sind die **Formeln von Frenet**, die für gewöhnlich unter dem Namen der **Serret**'schen bekannt sind.

§ 7. Das Vorzeichen der Torsion.

Wir untersuchen nun, welche geometrische Bedeutung das positive oder negative Vorzeichen der Torsion hat. Hierzu betrachten wir in einem beliebigen Curvenpunkte $M(x, y, z)$ die Schmiegungsebene:

$$(X-x)\cos\lambda + (Y-y)\cos\mu + (Z-z)\cos\nu = 0$$

und berechnen die Entfernung der M benachbarten Curvenpunkte M' von dieser Ebene. Hat nun der Punkt M' die Coordinaten

$$x + \Delta x,\quad y + \Delta y,\quad z + \Delta z$$

und entspricht er dem Werte $s + h$, so haben wir:

$$\begin{cases} \Delta x = \dfrac{dx}{ds} h + \dfrac{d^2x}{ds^2}\dfrac{h^2}{2} + \dfrac{d^3x}{ds^3}\dfrac{h^3}{6} + \varepsilon_1, \\ \Delta y = \dfrac{dy}{ds} h + \dfrac{d^2y}{ds^2}\dfrac{h^2}{2} + \dfrac{d^3y}{ds^3}\dfrac{h^3}{6} + \varepsilon_2, \\ \Delta z = \dfrac{dz}{ds} h + \dfrac{d^2z}{ds^2}\dfrac{h^2}{2} + \dfrac{d^3z}{ds^3}\dfrac{h^3}{6} + \varepsilon_3, \end{cases}$$

wobei ε_1, ε_2, ε_3 in Bezug auf h von höherer als der dritten Ordnung unendlich klein sind. Für die gesuchte Entfernung, die wir positiv oder negativ rechnen, je nachdem die positive oder die negative Seite der Schmiegungsebene dem Punkte M' zugewandt ist, haben wir:

$$\delta = \Delta x \cos\lambda + \Delta y \cos\mu + \Delta z \cos\nu,$$

und wenn wir für Δx, Δy, Δz die obigen Werte einsetzen und dabei beachten, dass nach den Formeln von Frenet

$$\frac{dx}{ds} = \cos\alpha,\quad \frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\cos\xi}{\varrho},\quad \frac{d^3x}{ds^3} = -\frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\cos\alpha}{\varrho} + \frac{\cos\lambda}{T} + \frac{\cos\xi}{\varrho}\frac{d\varrho}{ds}\right\}$$

ist, so folgt

$$\delta = -\frac{h^3}{6\varrho T} + \eta,$$

wo $\frac{\eta}{h^3}$ mit h unendlich klein ist. Nehmen wir an, dass die beiden Krümmungen $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ in M nicht gleich Null sind (das Gegenteil kann nur in singulären Punkten stattfinden), so sehen wir, dass sich das Vorzeichen von δ mit demjenigen von h ändert, d. h.: die Curve durchsetzt in M die Schmiegungsebene, und zwar geht, falls $\frac{1}{T} > 0$, der erzeugende Punkt, wenn er sich in positiver Richtung auf der Curve bewegt, von der positiven nach der negativen Seite, oder umgekehrt, wenn $\frac{1}{T} < 0$, von der negativen nach der positiven über. Um dieses Resultat noch genauer zu fassen, denken wir uns in

M auf der einen oder der anderen Seite der Schmiegungsebene einen Beschauer stehen und nach der positiven Richtung der Hauptnormale gewandt. Die Curve geht für den Beschauer aufsteigend durch M entweder von links nach rechts oder von rechts nach links hindurch: im ersten Falle heisst sie in M rechts, im zweiten links gewunden. Und nehmen wir nun, um die Ideen zu fixieren, an, dass auf der positiven Seite der xy-Ebene die positive Richtung von OX rechts von derjenigen von OY liegt, so haben wir das Resultat: Die aus den Frenet'schen Formeln berechnete Torsion ergiebt sich als positiv oder negativ, je nachdem die Curve in dem betreffenden Punkte links oder rechts gewunden ist*).

§ 8. Die natürlichen Gleichungen einer Curve.

Die Frenet'schen Formeln können wir sofort zum Beweise des wichtigen Satzes anwenden: Eine Raumcurve C ist ihrer Gestalt nach durch die Werte der Radien der ersten und zweiten Krümmung, ϱ und T, ausgedrückt als Functionen des Bogens s, vollkommen bestimmt.

Mit anderen Worten heisst dieses, dass zwei Curven C, C' von gleicher Bogenlänge, Flexion und Torsion zur Deckung gebracht werden können. Bezeichnen wir die auf C' bezüglichen Grössen durch Accente, so haben wir nach der Annahme unmittelbar:

$$s' = s, \quad \varrho' = \varrho, \quad T' = T.$$

Nun verschieben wir die Curve C' im Raume so, dass einer ihrer Punkte, beispielsweise der Anfangspunkt der Bogen, $s = 0$, mit dem entsprechenden Punkte von C und gleichzeitig ihr Haupttrieder mit demjenigen von C in demselben Punkte $s = 0$ zusammenfällt. Wir haben folglich:

$$\left.\begin{array}{lll} \cos\alpha' = \cos\alpha, & \cos\beta' = \cos\beta, & \cos\gamma' = \cos\gamma \\ \cos\xi' = \cos\xi, & \cos\eta' = \cos\eta, & \cos\zeta' = \cos\zeta \\ \cos\lambda' = \cos\lambda, & \cos\mu' = \cos\mu, & \cos\nu' = \cos\nu \end{array}\right\} \text{ für } s = 0.$$

Setzen wir die drei Frenet'schen Formeln der ersten Verticalreihe des Systems (A) in § 6 (S. 10) sowohl für die Curve C als für C' an:

*) Wir sehen demnach, dass das Vorzeichen der Torsion unabhängig davon ist, welche Richtung der Curve als positiv gewählt wird, wie z. B. auch aus der Formel $\frac{1}{\cos\xi}\frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{1}{T}$ erhellt, wo sich bei Aenderung der positiven Richtung von s das Zeichen von $\cos\lambda$ ändert, $\cos\xi$ dagegen ungeändert bleibt.

$$\frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{\cos\xi}{\varrho}, \quad \frac{d\cos\xi}{ds} = -\frac{\cos\alpha}{\varrho} - \frac{\cos\lambda}{T}, \quad \frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{\cos\xi}{T},$$

$$\frac{d\cos\alpha'}{ds} = \frac{\cos\xi'}{\varrho}, \quad \frac{d\cos\xi'}{ds} = -\frac{\cos\alpha'}{\varrho} - \frac{\cos\lambda'}{T}, \quad \frac{d\cos\lambda'}{ds} = \frac{\cos\xi'}{T},$$

multiplicieren wir die drei ersten beziehungsweise mit $\cos\alpha'$, $\cos\xi'$, $\cos\lambda'$, die drei zweiten beziehungsweise mit $\cos\alpha$, $\cos\xi$, $\cos\lambda$, und addieren wir, so wird die rechte Seite identisch gleich Null, woraus folgt:

$$\frac{d}{ds}(\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\xi\cos\xi' + \cos\lambda\cos\lambda') = 0,$$

d. h.

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\xi\cos\xi' + \cos\lambda\cos\lambda' = \text{Const.}$$

Ursprünglich ist aber für $s = 0$ der Wert der linken Seite gleich der Einheit, also ist für jeden Wert von s

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\xi\cos\xi' + \cos\lambda\cos\lambda' = 1.$$

Mittels der Identitäten:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\xi + \cos^2\lambda = 1,$$
$$\cos^2\alpha' + \cos^2\xi' + \cos^2\lambda' = 1$$

folgt hiernach:

$$(\cos\alpha' - \cos\alpha)^2 + (\cos\xi' - \cos\xi)^2 + (\cos\lambda' - \cos\lambda)^2 = 0,$$

d. h.

$$\cos\alpha' = \cos\alpha, \quad \cos\xi' = \cos\xi, \quad \cos\lambda' = \cos\lambda.$$

In ähnlicher Weise erhalten wir:

$$\cos\beta' = \cos\beta, \quad \cos\eta' = \cos\eta, \quad \cos\mu' = \cos\mu,$$
$$\cos\gamma' = \cos\gamma, \quad \cos\zeta' = \cos\zeta, \quad \cos\nu' = \cos\nu,$$

also:

$$\frac{d(x'-x)}{ds} = 0, \quad \frac{d(y'-y)}{ds} = 0, \quad \frac{d(z'-z)}{ds} = 0.$$

Die Differenzen $x'-x$, $y'-y$, $z'-z$ sind demnach constant, und da sie anfänglich gleich Null sind, sind sie es überhaupt, wodurch unser Satz bewiesen ist.

Die Gleichungen:

$$\varrho = \varrho(s), \quad T = T(s)$$

können somit zweckmässig die natürlichen Gleichungen der Curve genannt werden, da sie die Gestalt derselben ohne Rücksicht auf ihre besondere Lage im Raume bestimmen.

§ 9. Integration der natürlichen Curvengleichungen.

Auf Grund der Sätze, welche die Existenz der Integrale der Differentialgleichungen beweisen, sehen wir nun unschwer, dass, wenn die natürlichen Gleichungen einer Curve:

$$\varrho = \varrho(s), \quad T = T(s)$$

willkürlich gegeben sind, die entsprechende Curve in der That existiert.

Wir bezeichnen mit l, m, n drei unbekannte Functionen von s und setzen das System der drei homogenen linearen Gleichungen:

$$(10) \qquad \frac{dl}{ds} = \frac{m}{\varrho}, \quad \frac{dm}{ds} = -\frac{l}{\varrho} - \frac{n}{T}, \quad \frac{dn}{ds} = \frac{m}{T}$$

an, von denen eben, wenn die Curve wirklich existiert, nach den Frenet'schen Formeln

$$(\cos\alpha, \cos\xi, \cos\lambda), \quad (\cos\beta, \cos\eta, \cos\mu), \quad (\cos\gamma, \cos\zeta, \cos\nu)$$

drei Lösungssysteme sein werden. Aus der Theorie der Differentialgleichungen wissen wir, dass, wenn die Anfangswerte der unbekannten Functionen l, m, n, z. B. für $s = 0$, willkürlich gegeben sind, ein Lösungssystem (l, m, n) der Gleichungen (10) existiert, das für $s = 0$ in das gegebene Anfangssystem (l_0, m_0, n_0) übergeht. Wir beachten ferner, dass, wenn (l, m, n) und (l', m', n') zwei verschiedene oder übereinstimmende Lösungssysteme von (10) sind, aus den Differentialgleichungen selbst

$$\frac{d}{ds}(ll' + mm' + nn') = 0$$

und also

$$ll' + mm' + nn' = \text{Const.}$$

folgt.

Nun wählen wir neun Constanten

$$\begin{matrix} l_0 & l_0' & l_0'' \\ m_0 & m_0' & m_0'' \\ n_0 & n_0' & n_0'', \end{matrix}$$

welche die Coefficienten einer orthogonalen Substitution sind, und bezeichnen mit

$$(l, m, n), \quad (l', m', n'), \quad (l'', m'', n'')$$

drei Lösungssysteme von (10), die für $s = 0$ bezüglich in

$$(l_0, m_0, n_0), \quad (l_0', m_0', n_0'), \quad (l_0'', m_0'', n_0'')$$

übergehen.

Aus der obigen Ueberlegung ergiebt sich, dass für alle Werte von s

$$\begin{matrix} l & l' & l'' \\ m & m' & m'' \\ n & n' & n'' \end{matrix}$$

die Coefficienten einer orthogonalen Substitution sind, insbesondere ist

$$l^2 + l'^2 + l''^2 = 1.$$

Setzen wir nun

$$x = \int l\,ds, \quad y = \int l'\,ds, \quad z = \int l''\,ds$$

und deuten wir x, y, z als Coordinaten eines beweglichen Raumpunktes M, so hat die Ortscurve für M offenbar s zum Bogen und l, l', l'' zu Richtungscosinus der Tangente. Berücksichtigen wir ferner die Differentialgleichungen (10), denen (l, m, n), (l', m', n'), (l'', m'', n'') genügen, sowie die Frenet'schen Formeln, so sehen wir sofort, dass Flexions- und Torsionsradius genau die angegebenen Werte haben.

Schliesslich zeigen wir mit Darboux, wie die Integration des Systems (10) auf diejenige einer Differentialgleichung vom Riccati'schen Typus zurückgeführt wird. Für jedes Lösungssystem von (10) ist

$$l^2 + m^2 + n^2 = \text{Const.},$$

und multiplicieren wir l, m, n mit einem passenden constanten Factor (wodurch wegen der Homogeneität ein neues Lösungssystem entsteht), so kann ohne weiteres

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

gesetzt werden.

Wir drücken nun l, m, n durch zwei Winkel ϑ und φ aus mittels der Gleichungen:

$$l = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad m = \sin\vartheta\sin\varphi, \quad n = \cos\vartheta,$$

dann geben die Gleichungen (10) für ϑ und φ die beiden simultanen Gleichungen:

$$(11) \qquad \frac{d\vartheta}{ds} + \frac{\sin\varphi}{T} = 0, \quad \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\operatorname{cotg}\vartheta\cos\varphi}{T} + \frac{1}{\varrho} = 0.$$

Jetzt führen wir als Unbekannte die complexe Function

$$\sigma = \operatorname{cotg}\frac{\vartheta}{2}\cdot e^{i\varphi}\,{}^{*)}$$

ein, so folgt aus (11) für σ die Gleichung:

$$(12) \qquad \frac{d\sigma}{ds} = -\frac{i\sigma^2}{2T} - \frac{i\sigma}{\varrho} + \frac{i}{2T},$$

aus der umgekehrt durch Trennung des reellen und des imaginären Teils die Gleichungen (11) folgen. Die Aufgabe, eine Curve aus ihren natürlichen Gleichungen zu bestimmen, lässt sich demnach auf die Integration der Gleichung (12) vom Riccati'schen Typus zurückführen.

---

*) Die Bedeutung von σ wird im dritten Kapitel erkannt werden: es ergiebt sich nämlich σ als eine complexe Veränderliche auf der Kugel.

Nach bekannten Eigenschaften der Gleichungen von diesem Typus genügt die Kenntnis einer particulären Lösung, um durch Quadraturen zum allgemeinen Integral zu gelangen.

§ 10. **Cylindrische Schraubenlinien.**

Wir wollen die Frenet'schen Formeln noch auf das Studium einer wichtigen Klasse von Curven anwenden, die unter dem Namen *cylindrische Schraubenlinien* (*Helices*) bekannt sind.

Es werden so diejenigen auf einer beliebigen Cylinderfläche gegezogenen Curven genannt, welche die Erzeugenden derselben unter constantem Winkel schneiden.

Bei der Ausbreitung der Cylinderfläche auf eine Ebene wickelt sich die Schraubenlinie in eine Gerade ab, und da sich bei der Abwickelung die Längendimensionen nicht ändern, so folgt als eine weitere charakteristische Eigenschaft der cylindrischen Schraubenlinie, dass sie auf dem Cylinder den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten desselben angiebt.

Wir legen die z-Axe parallel zu den Erzeugenden des Cylinders und haben folglich

$$\cos\gamma = \text{Const.}$$

Aus den Frenet'schen Formeln:

$$\frac{d\cos\gamma}{ds} = \frac{\cos\xi}{\varrho}, \quad \frac{d\cos\xi}{ds} = -\frac{\cos\gamma}{\varrho} - \frac{\cos\nu}{T}, \quad \frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{\cos\xi}{T}$$

folgt:

$$\cos\xi = 0^{*)}, \quad \cos\nu = \text{Const.}, \quad \frac{\varrho}{T} = -\frac{\cos\gamma}{\cos\nu} = \text{Const.}$$

Wir haben also gefunden:

1. *In jedem Punkte einer cylindrischen Schraubenlinie fällt die Hauptnormale derselben mit der Cylindernormale zusammen.* Diese Eigenschaft ist offenbar für die Schraubenlinie charakteristisch.

2. *Für jede cylindrische Schraubenlinie ist das Verhältnis der beiden Krümmungen constant.* Auch diese zweite Eigenschaft ist umkehrbar nach dem Satze von *Bertrand*: *Jede Curve, bei der das Verhältnis der beiden Krümmungen constant ist, ist eine cylindrische Schraubenlinie.*

Um ihn zu beweisen, nehmen wir an, dass für eine Curve C

*) Den Fall $\frac{1}{\varrho} = 0$ schliessen wir aus, da er nur für die Gerade in Betracht kommt.

$$\frac{\varrho}{T} = \text{Const.} = \varkappa$$

sei. Aus den Frenet'schen Formeln erhalten wir:

$$\frac{d\cos\lambda}{ds} = \frac{\varrho}{T}\frac{d\cos\alpha}{ds}, \quad \frac{d\cos\mu}{ds} = \frac{\varrho}{T}\frac{d\cos\beta}{ds}, \quad \frac{d\cos\nu}{ds} = \frac{\varrho}{T}\frac{d\cos\gamma}{ds}$$

oder nach der gemachten Voraussetzung

$$\frac{d}{ds}(\cos\lambda - \varkappa\cos\alpha) = 0, \quad \frac{d}{ds}(\cos\mu - \varkappa\cos\beta) = 0, \quad \frac{d}{ds}(\cos\nu - \varkappa\cos\gamma) = 0,$$

woraus durch Integration folgt:

$$\cos\lambda - \varkappa\cos\alpha = A, \quad \cos\mu - \varkappa\cos\beta = B, \quad \cos\nu - \varkappa\cos\gamma = C,$$

wo die Constanten A, B, C offenbar der Relation:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 + \varkappa^2$$

genügen müssen.

Setzen wir demnach:

$$\cos\lambda - \varkappa\cos\alpha = \sqrt{1+\varkappa^2}\cos a,$$
$$\cos\mu - \varkappa\cos\beta = \sqrt{1+\varkappa^2}\cos b,$$
$$\cos\nu - \varkappa\cos\gamma = \sqrt{1+\varkappa^2}\cos c,$$

so sind $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ die Cosinus einer festen Richtung im Raume, mit der die Tangente an C wegen der Gleichung:

$$\cos\alpha\cos a + \cos\beta\cos b + \cos\gamma\cos c = -\frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}$$

einen constanten Winkel bildet.

Die Curve C ist also eine Schraubenlinie auf derjenigen Cylinderfläche, welche entsteht, wenn durch die Punkte von C Parallelen zu der festen Richtung gezogen werden.

§ 11. Formeln für cylindrische Schraubenlinien.

Um die allgemeinen Formeln für die cylindrischen Schraubenlinien aufzustellen, legen wir die z-Axe parallel den Erzeugenden des Cylinders und setzen voraus, dass die Coordinaten x, y eines Punktes des durch den Cylinder gelegten senkrechten Schnittes $z = 0$ mittels der Gleichungen $x = x(u)$, $y = y(u)$ als Functionen des Bogens u dieses Schnittes ausgedrückt seien; wir sehen dann sofort, dass für die Coordinaten eines beweglichen Punktes der Schraubenlinie die Gleichungen gelten:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = u \operatorname{cotg} \varepsilon, \text{*)}$$

wo ε den (als spitz vorauszusetzenden) constanten Neigungswinkel der Schraubenlinie gegen die Erzeugenden des Cylinders bedeutet. Unter Anwendung der Formeln der früheren Paragraphen finden wir (die Striche bezeichnen die Differentiation nach u):

$$ds = \frac{du}{\sin \varepsilon}, \quad s = \frac{u}{\sin \varepsilon} \text{**)},$$

$$\cos \alpha = \sin \varepsilon \cdot x'(u), \quad \cos \beta = \sin \varepsilon \cdot y'(u), \quad \cos \gamma = \cos \varepsilon,$$

$$\frac{d \cos \alpha}{ds} = \sin^2 \varepsilon \cdot x''(u), \quad \frac{d \cos \beta}{ds} = \sin^2 \varepsilon \cdot y''(u), \quad \frac{d \cos \gamma}{ds} = 0.$$

Hieraus folgt die Flexion der Schraubenlinie

$$\frac{1}{\varrho} = \sin^2 \varepsilon \sqrt{x''(u)^2 + y''(u)^2}$$

oder

(13) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin^2 \varepsilon}{R},$$

wenn R der Krümmungsradius des senkrechten Schnittes ist. Für die Torsion $\frac{1}{T}$ finden wir ferner aus

$$\frac{\varrho}{T} = -\frac{\cos \gamma}{\cos \nu}$$

(vgl. S. 16) unter Berücksichtigung, dass $\nu = \frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$ ist,

(14) $$\frac{1}{T} = \pm \frac{\sin \varepsilon \cos \varepsilon}{R}.$$

Das obere Vorzeichen gilt für die links, das untere für die rechts gewundenen Schraubenlinien (§ 7, S. 12), wie auch aus der geometrischen Anschauung direct folgt.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich, dass nur für die Schraubenlinien auf dem geraden Kreiscylinder die Radien der Flexion und Torsion constant sind. Eine solche Schraubenlinie heisst gewöhnliche Schraubenlinie***), und ihre (nach Puiseux) charakteristische Eigenschaft, constante Krümmungsradien zu besitzen, entspricht der Eigenschaft, die sie nur mit der Geraden und dem Kreise gemeinsam hat, an jeder Stelle in sich verschiebbar zu sein.

---

*) Der Einfachheit halber rechnen wir den Bogen u von dem Punkte an, in welchem der senkrechte Schnitt die Schraubenlinie trifft.

**) Der Bogen der Schraubenlinie wird von ihrem Anfangspunkte auf dem senkrechten Schnitt an gerechnet.

***) Sie kann durch einen Punkt beschrieben gedacht werden, der sich gleichförmig längs einer Erzeugenden eines Rotationscylinders bewegt, während sich diese gleichförmig um die Axe dreht.

Besondere Erwähnung unter den Schraubenlinien verdient noch die cylindrisch-conische, welche wir durch die Gleichungen mit den Constanten a und b:

$$\varrho = as, \quad T = bs$$

definieren. Der Querschnitt des Cylinders, auf dem diese Schraubenlinie liegt, ist also durch die Eigenschaft charakterisiert, dass sein Krümmungsradius dem Bogen proportional ist; er ist folglich eine logarithmische Spirale. Demnach können die Gleichungen unserer Schraubenlinie auf die Form:

$$x = Ae^{ht}\cos t, \quad y = Ae^{ht}\sin t, \quad z = Be^{ht}$$

gebracht werden, wo t der variable, die einzelnen Punkte der Curve bestimmende Parameter und A, B, h Constanten sind. Die Schraubenlinie liegt demnach auf der Fläche:

$$x^2 + y^2 - \frac{A^2}{B^2} z^2 = 0,$$

die ein Rotationskegel mit der z-Richtung als Axe und dem Coordinatenanfangspunkt als Spitze ist. Sie schneidet die Erzeugenden des Kegels unter constantem Winkel, d. h. sie ist eine Loxodrome des Kegels*). In der That findet man die Richtungscosinus ihrer Tangente:

$$\cos\alpha = \frac{A(h\cos t - \sin t)}{\sqrt{A^2 + h^2(A^2 + B^2)}}, \quad \cos\beta = \frac{A(h\sin t + \cos t)}{\sqrt{A^2 + h^2(A^2 + B^2)}}, \quad \cos\gamma = \frac{Bh}{\sqrt{A^2 + h^2(A^2 + B^2)}}$$

und diejenigen der Erzeugenden des Kegels:

$$\cos a = \frac{A\cos t}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos b = \frac{A\sin t}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos c = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

woraus

$$\cos a\cos\alpha + \cos b\cos\beta + \cos c\cos\gamma = \frac{h\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + h^2(A^2 + B^2)}} = \text{Const.}$$

folgt. Deshalb der Name cylindrisch-conische Schraubenlinie**).

§ 12. **Enveloppe von ∞^1 Flächen.**

Für das Studium der weiteren Eigenschaften der Raumcurven ist es von Vorteil, einige kurze Bemerkungen über Enveloppen (einhüllende Flächen) vorauszuschicken.

---

*) Loxodrome heisst auf einer beliebigen Rotationsfläche eine Curve, welche die Meridiane unter constantem Winkel schneidet.

**) Es sei bemerkt, dass bei der Abwicklung des Kegels in eine Ebene die cylindrisch-conische Schraubenlinie in eine logarithmische Spirale übergeht.

Es sei

$$f(x, y, z, \alpha) = 0 \tag{15}$$

die Gleichung einer Fläche; den Parameter α, den sie enthält, setzen wir innerhalb eines bestimmten Intervalls als stetig veränderlich voraus. Wir setzen ferner voraus, dass in dem für x, y, z, α in Betracht kommenden Aenderungsbereich die Function f endlich und stetig sei und die ebenfalls endlichen und stetigen Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$$

besitze. Jedem besonderen Werte α_1 von α entspricht eine besondere Fläche unseres einfach unendlichen Systems (15); ändert sich α stetig, so bewegt sich auch die Fläche unter stetiger Deformation im Raume.

Wir betrachten nun eine specielle Fläche des Systems:

$$f(x, y, z, \alpha_1) = 0, \tag{16}$$

sowie eine dicht benachbarte, die der Variation h des Parameters entspricht:

$$f(x, y, z, \alpha_1 + h) = 0.$$

Die Schnittcurve dieser beiden Flächen nähert sich mit bis zu Null abnehmendem h auf der Fläche (16) einer Grenzlage, die nach Monge die Charakteristik der Fläche (16) genannt wird. In der That können wir für die beiden vorstehenden simultanen Gleichungen das äquivalente System:

$$f(x, y, z, \alpha_1) = 0, \quad \frac{f(x, y, z, \alpha_1 + h) - f(x, y, z, \alpha_1)}{h} = 0$$

setzen. Die zweite dieser Gleichungen nähert sich mit abnehmendem h der Grenzgleichung:

$$\left[\frac{\partial (f, x, y, z, \alpha)}{\partial \alpha}\right]_{\alpha = \alpha_1} = 0,$$

und es lässt sich in aller Strenge beweisen, dass die durch die simultanen Gleichungen:

$$f(x, y, z, \alpha_1) = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_{\alpha = \alpha_1} = 0$$

bestimmte Curve eben die gesuchte Grenzcurve (Charakteristik) ist. Der Ort aller Charakteristiken heisst Enveloppe (einhüllende Fläche) des Systems, während jede einzelne Fläche des Systems eine eingehüllte oder umhüllte genannt wird. Die Gleichung der Enveloppe ergiebt sich nach dem Vorstehenden durch Elimination von α aus den beiden Gleichungen:

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, dadurch, dass man aus der zweiten Gleichung α als Function von x, y, z bestimmt und diesen Wert in die erste einsetzt. Die Gleichung:

$$f(x, y, z, \alpha) = 0,$$

die uns für constantes α die umhüllte Fläche darstellt, repräsentiert also auch die Enveloppe, wenn hierin der aus der Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

für α als Function von x, y, z sich ergebende Wert eingesetzt wird.

Hiernach sieht man sofort, dass die Enveloppe die Umhüllte längs der ganzen Charakteristik berührt.

In der That, die Gleichung der Tangentenebene in einem Punkte (x, y, z) der Enveloppe ist:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x}\right)(X-x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right)(Y-y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial z}\right)(Z-z) = 0,$$

oder, da eben $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$ ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z-z) = 0,$$

welches die Gleichung der Tangentenebene der Umhüllten ist.

Schneidet die Charakteristik der Fläche (16) die Nachbarfläche:

$$f(x, y, z, \alpha_1 + h) = 0,$$

so werden sich bei Aenderung von h die Schnittpunkte auf der Charakteristik verschieben und mit bis zu Null abnehmendem h in gewisse Grenzpunkte übergehen, die wir auf folgende Weise bestimmen: Für jeden dieser Schnittpunkte bestehen die simultanen Gleichungen:

(a) $$f_{\alpha=\alpha_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} = 0, \quad f(x, y, z, \alpha_1 + h) = 0;$$

für die dritte können wir setzen:

$$\left(f + h\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + \eta\right)_{\alpha=\alpha_1} = 0,$$

wo η in Bezug auf h von höherer als der zweiten Ordnung unendlich klein ist. Statt des Systems (a) können wir das äquivalente:

$$f_{\alpha=\alpha_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha_1} + \frac{2\eta}{h^2} = 0$$

setzen. Die letzte dieser Gleichungen geht mit verschwindendem h in die Grenzgleichung:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha_1} = 0$$

über. Die gesuchten Grenzpunkte auf der Charakteristik $\alpha = \alpha_1$ sind also durch die drei simultanen Gleichungen:

$$f_{\alpha=\alpha_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=\alpha_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\right)_{\alpha=\alpha_1} = 0$$

bestimmt.

Der Ort der Grenzpunkte der verschiedenen Charakteristiken führt den Namen Rückkehrkante (Cuspidalkante) der Enveloppe; ihre Gleichungen ergeben sich, wenn man α aus den drei Gleichungen:

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = 0$$

eliminiert oder α als Function von x, y, z aus der dritten berechnet und diesen Wert in die beiden ersten einsetzt. Und da diese für constantes α die Charakteristik darstellen, so folgt hieraus leicht, dass jede Charakteristik die Rückkehrkante in den Grenzpunkten berührt: es ist demnach auf der Enveloppe die Rückkehrkante (falls sie überhaupt reell ist) die Umhüllungscurve der Charakteristiken.

§ 13. Abwickelbare Flächen.

In der Theorie der Raumcurven haben wir ausschliesslich den Fall zu betrachten, in dem die umhüllten Flächen Ebenen sind; es wird dann die Enveloppe aus einem sofort zu erörternden Grunde als abwickelbare Fläche (Developpable) bezeichnet.

Die Charakteristik jeder Ebene des Systems ist offenbar eine Gerade, und alle charakteristischen Geraden sind Tangenten der Rückkehrkante; die Developpable ist also der Ort der Tangenten einer Curve, welche Rückkehrkante der Fläche ist. Die bewegliche (umhüllte) Ebene ist Schmiegungsebene der Rückkehrkante. In der That, behalten wir für diese Curve die üblichen Bezeichnungen bei, so ist die Gleichung der Schmiegungsebene:

$$(X - x) \cos \lambda + (Y - y) \cos \mu + (Z - z) \cos \nu = 0.$$

Um die Charakteristik der Schmiegungsebene zu erhalten, combinieren wir hiermit diejenige Gleichung, welche sich durch Differentiation nach dem Parameter s ergiebt, d. h. nach den Frenet'schen Formeln die Gleichung:

$$(X - x) \cos \xi + (Y - y) \cos \eta + (Z - z) \cos \zeta = 0.$$

Diese zweite Ebene schneidet die Schmiegungsebene längs der Tangente, die demnach, wie behauptet, die Charakteristik ist.

Uebrigens ist zu bemerken, dass sich die Rückkehrkante auf einen Punkt zusammenziehen kann; dann wird die Developpable ein Kegel

oder ein Cylinder, je nachdem dieser Punkt in endlicher oder unendlicher Entfernung liegt.

Jede umhüllte Ebene berührt die Developpable längs der geradlinigen Charakteristik (Erzeugenden), und es bilden somit die Tangentialebenen einer Developpabeln eine einfache Mannigfaltigkeit, während bei jeder anderen Fläche die Tangentialebenen ein ∞^2-System bilden*).

Der Name „Developpable" rührt daher, dass die Fläche, als biegsam und undehnbar vorausgesetzt, ohne Riss oder Faltung auf die Ebene abgewickelt werden kann. Umgekehrt ist jede Fläche, welche diese Eigenschaft besitzt, mit Notwendigkeit eine Developpable, wie in einem anderen Kapitel nachgewiesen werden wird.

In Verbindung mit jeder Raumcurve sind drei Developpable in Betracht zu ziehen, die bezüglich von den drei Ebenen der Haupttrieder umhüllt werden. Die Enveloppe der Schmiegungsebene ist, wie wir vorhin gesehen haben, nichts anderes als der Ort der Tangenten der gegebenen Curve. Die Enveloppe der Normalenebene von C heisst die Polardeveloppable der Curve C, und mit ihr werden wir uns hauptsächlich beschäftigen.

Bezüglich der dritten Developpabeln, der Enveloppe der auf den Hauptnormalen von C senkrecht stehenden Ebenen, bemerken wir nur, dass sie als rectificierende Developpable der Curve C bezeichnet wird; sie geht durch die Curve C hindurch, und diese wird bei der Abwickelung der Developpabeln auf die Ebene zu einer Geraden.

§ 14. **Polardeveloppable einer Curve.**

Um die Elemente der Polardeveloppabeln einer gegebenen Curve C, insbesondere ihrer Rückkehrkante, zu bestimmen, wenden wir die allgemeinen Regeln des § 12 an, indem wir von der Gleichung der (umhüllenden) Normalenebene der Curve C:

$$(17) \qquad (X-x)\cos\alpha + (Y-y)\cos\beta + (Z-z)\cos\gamma = 0$$

ausgehen, in der wir naturgemäss als Parameter, der die Lage der beweglichen Ebene bestimmt, den Bogen s von C wählen. Differenzieren wir (17) nach s, so erhalten wir mittels der Frenet'schen Formeln die Gleichung:

$$(18) \qquad (X-x)\cos\xi + (Y-y)\cos\eta + (Z-z)\cos\zeta = \varrho,$$

und diese beiden Gleichungen geben combiniert die Charakteristik der Ebene (17), d. h. die Erzeugende der Polardeveloppabeln. Dieselbe

*) Bei jeder dualistischen Transformation des Raumes liefert jede Fläche eine andere Fläche; die Developpablen dagegen entsprechen dualistisch den Curven.

steht hiernach auf der Schmiegungsebene in demjenigen Punkte der Hauptnormale M_1 senkrecht, welcher (im positiven Sinne) vom Osculationspunkte M auf der Curve um den Krümmungsradius ϱ entfernt ist. Dieser Punkt M_1 wird als Krümmungsmittelpunkt der Curve C in M bezeichnet, und der in der Schmiegungsebene um M_1 mit dem Radius $M_1 M = \varrho$ beschriebene Kreis heisst Schmiegungs-, Osculations- oder Krümmungskreis*). Die Erzeugende der Polardeveloppabeln ist also das auf der Ebene des Krümmungskreises in seinem Mittelpunkte errichtete Lot oder, wie man sich ausdrückt, die Axe des Krümmungskreises.

Um nun den Punkt M_0 zu finden, in dem die Axe des Krümmungskreises die Rückkehrkante der Polardeveloppabeln berührt, müssen wir die Gleichungen (17) und (18) mit derjenigen combinieren, die sich durch nochmalige Differentiation nach s ergiebt. Dieselbe lässt sich unter Berücksichtigung der Frenet'schen Formeln und der Gleichung (17) selbst wie folgt schreiben:

$$(19) \quad (X - x) \cos \lambda + (Y - y) \cos \mu + (Z - z) \cos \nu = - T \frac{d\varrho}{ds},$$

und die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des gesuchten Punktes M_0 müssen, für X, Y, Z in die Gleichungen (17), (18), (19) eingesetzt, denselben gleichzeitig genügen. Lösen wir die drei in den Differenzen $x_0 - x$, $y_0 - y$, $z_0 - z$ linearen Gleichungen nach denselben auf, so erhalten wir unmittelbar:

$$(20) \qquad \begin{cases} x_0 = x + \varrho \cos \xi - T \frac{d\varrho}{ds} \cos \lambda, \\ y_0 = y + \varrho \cos \eta - T \frac{d\varrho}{ds} \cos \mu, \\ z_0 = z + \varrho \cos \zeta - T \frac{d\varrho}{ds} \cos \nu. \end{cases}$$

Die um $M_0(x_0, y_0, z_0)$ mit dem Radius $M_0 M$ beschriebene Kugel heisst die osculierende oder Schmiegungskugel der Curve C in M, weil sie, wie auf ähnliche Weise wie in § 3 gezeigt werden kann, unter allen durch M gehenden Kugeln diejenige ist, welche in der Umgebung von M sich am innigsten der Curve anschmiegt**). Es ist klar, dass der Krümmungskreis der Schnitt der Schmiegungskugel

*) Unter allen Kreisen durch M ist der Krümmungskreis, wie man beweisen kann, derjenige, welcher sich in der Umgebung von M der Curve am innigsten anschmiegt.

**) Sie kann auch, weniger streng ausgedrückt, als diejenige Kugel bezeichnet werden, die durch M und drei aufeinanderfolgende Punkte der Curve geht.

mit der Schmiegungsebene ist. Bezeichnen wir nun mit R den Radius der Schmiegungskugel, so haben wir:

$$R^2 = (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2$$

oder wegen (20):

(21) $$R^2 = \varrho^2 + T^2 \left(\frac{d\varrho}{ds}\right)^2.$$

§ 15. Ort der Mitten der Schmiegungskugeln.

Wir wollen nun die Rückkehrcurve der Polardeveloppabeln, C_0, die, wie wir gesehen haben, zugleich der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln ist, in ihren Beziehungen zur gegebenen Curve C untersuchen.

Wir bezeichnen mit

$$s_0, \quad \cos\alpha_0, \quad \cos\beta_0, \cdots \varrho_0, \quad T_0$$

diejenigen Grössen, welche für C_0 dasselbe bedeuten, wie

$$s, \quad \cos\alpha, \quad \cos\beta \quad \cdots \varrho, \quad T$$

für C. Um sie zu berechnen, brauchen wir nur die Gleichungen (20) unter Benutzung der Frenet'schen Formeln zu differenzieren. Die erstmalige Differentiation giebt:

(20') $$\begin{cases} dx_0 = -\left\{\frac{\varrho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\varrho}{ds}\right)\right\} \cos\lambda\, ds, \\ dy_0 = -\left\{\frac{\varrho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\varrho}{ds}\right)\right\} \cos\mu\, ds, \\ dz_0 = -\left\{\frac{\varrho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\varrho}{ds}\right)\right\} \cos\nu\, ds; \end{cases}$$

hieraus folgt durch Quadrieren und Addieren:

$$ds_0^2 = \left\{\frac{\varrho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\varrho}{ds}\right)\right\}^2 ds^2$$

und also:

(21') $$ds_0 = \varepsilon\left\{\frac{\varrho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\varrho}{ds}\right)\right\} ds,$$

wo ε die positive oder negative Einheit ist; setzen wir fest, dass s_0 mit s als wachsend gerechnet werden soll, so ist das Vorzeichen von ε ganz dasselbe wie dasjenige des Factors $\frac{\varrho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\varrho}{ds}\right)$.

Daraus folgt sofort:

(22) $\cos\alpha_0 = -\varepsilon\cos\lambda, \quad \cos\beta_0 = -\varepsilon\cos\mu, \quad \cos\gamma_0 = -\varepsilon\cos\nu,$

woraus sich durch weitere Differentiation ergiebt:

$$\frac{ds_0}{\varrho_0}\cos\xi_0 = -\varepsilon\frac{ds}{T}\cos\xi,\quad \frac{ds_0}{\varrho_0}\cos\eta_0 = -\varepsilon\frac{ds}{T}\cos\eta,\quad \frac{ds_0}{\varrho_0}\cos\zeta_0 = -\varepsilon\frac{ds}{T}\cos\zeta.$$

Hieraus folgt

$$\frac{ds_0}{\varrho_0} = \varepsilon'\frac{ds}{T}, \tag{23}$$

wo ε' wiederum die positive oder negative Einheit bezeichnet, je nachdem $\frac{1}{T}$ positiv oder negativ ist.

Wir haben somit

(22′) $\cos\xi_0 = -\varepsilon\varepsilon'\cos\xi,\quad \cos\eta_0 = -\varepsilon\varepsilon'\cos\eta,\quad \cos\zeta_0 = -\varepsilon\varepsilon'\cos\zeta;$

durch Combination dieser Gleichungen mit (22) ergiebt sich weiter

(22″) $\cos\lambda_0 = -\varepsilon'\cos\alpha,\quad \cos\mu_0 = -\varepsilon'\cos\beta,\quad \cos\nu_0 = -\varepsilon'\cos\gamma$

(vgl. S. 7 unten) und hieraus schliesslich durch Differentiation unter Berücksichtigung von (22′)

$$\frac{ds_0}{T_0} = \frac{\varepsilon\, ds}{\varrho}. \tag{24}$$

Die vorstehenden Formeln lassen erkennen, dass bei den beiden Curven C und C_0 die Tangente der einen parallel der Binormalen der anderen ist, während die Hauptnormalen paarweise einander parallel sind, Resultate, die auch geometrisch sehr leicht einzusehen sind.

Wir untersuchen nun, ob der Radius der Schmiegungskugel R eine Constante sein kann. Differenzieren wir unter dieser Annahme (21), so kommt:

$$T\frac{d\varrho}{ds}\left\{\frac{\varrho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\varrho}{ds}\right)\right\} = 0,$$

also ist, da T nicht gleich Null ist, entweder

a) $$\frac{d\varrho}{ds} = 0, \text{ d. h. } \varrho = \text{Const.}$$

oder

b) $$\frac{\varrho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\varrho}{ds}\right) = 0.$$

Im Falle a) besitzt die Curve eine constante Flexion, und da dann in den Gleichungen (20) das dritte Glied rechts verschwindet, so fällt der Ort für die Mittelpunkte der Schmiegungskugeln, C_0, mit demjenigen der Krümmungsmittelpunkte, C_1, zusammen. Ferner ist wegen (21′)

$$ds_0 = \frac{\varepsilon\varrho}{T}\, ds,$$

und da hier $\varepsilon = \varepsilon'$ ist, so geben die Gleichungen (23) und (24)

$$\varrho_0 = \varrho,\quad T_0 T = \varrho^2,$$

und die Gleichungen (22′)

$$\cos\xi_0 = -\cos\xi,\quad \cos\eta_0 = -\cos\eta,\quad \cos\zeta_0 = -\cos\zeta;$$

daraus folgt, dass die Curve C_0' dieselbe constante Flexion wie C hat, während das Product der beiden Torsionen gleich dem Quadrat dieser Constanten ist. Des weitern ist klar, dass der Ort der Krümmungsmittelpunkte von C_0 die ursprüngliche Curve C ist. Die Curven mit constanter Flexion lassen sich demnach zu Paaren zusammenfassen, welche die Hauptnormalen gemeinsam haben.

Untersuchen wir nun den Fall b), so erhalten wir aus den Gleichungen (20')

$$x_0 = \text{Const.},\quad y_0 = \text{Const.},\quad z_0 = \text{Const.};$$

es liegt demnach die Curve C auf der im Raume festen Kugel:

$$(X - x_0)^2 + (Y - y_0)^2 + (Z - z_0)^2 = R^2.$$

Die natürliche Gleichung:

$$\frac{\varrho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\varrho}{ds}\right) = 0$$

ist also für die sphärischen Curven charakteristisch*).

§ 16. **Evoluten und Evolventen.**

Längs einer ebenen oder doppelt gekrümmten Curve C' denken wir uns einen biegsamen und nicht dehnbaren Faden aufgelegt und wickeln ihn von einem beliebigen Punkte der Curve an von derselben so ab, dass er stets gespannt bleibt, d. h., dass in jedem Augenblick das abgewickelte geradlinige Fadenstück $M'M$ Tangente von C' in M' und seine Länge gleich dem abgewickelten Curvenbogen s' ist. Das freie Ende M des Fadens beschreibt eine Curve C, welche eine Evolvente von C' genannt wird, während C' Evolute von C heisst.

Bezeichnen wir mit $x', y', z', \cos\alpha' \cdots$ die Elemente der Evolute C' und mit $x, y, z, \cos\alpha \cdots$ diejenigen der Evolvente C, so folgen aus der angegebenen Construction unmittelbar die Gleichungen:

(25) $x' - x = s'\cos\alpha',\quad y' - y = s'\cos\beta',\quad z' - z = s'\cos\gamma'.$

Aus ihnen ergiebt sich durch Differentiation:

$$dx = -\frac{s'ds'}{\varrho'}\cos\xi',\quad dy = -\frac{s'ds'}{\varrho'}\cos\eta',\quad dz = -\frac{s'ds'}{\varrho'}\cos\zeta',$$

---

*) Bemerkt werde, dass, wenn in einem Punkte einer beliebigen Curve

$$\frac{\varrho}{T} + \frac{d}{ds}\left(T\frac{d\varrho}{ds}\right)$$

verschwindet, die Schmiegungskugel daselbst stationär ist und die Curve C_0 in dem entsprechenden Punkte einen Rückkehrpunkt hat.

d. h. die Tangente der Evolvente ist der Hauptnormale der Evolute parallel.

Die Aufgabe: Zu einer gegebenen Evolute die Evolventen zu finden, wird mit Hilfe einer Quadratur durch die Gleichungen (25) gelöst, da es nur darauf ankommt, s' als Function des die Punkte von C' bestimmenden Parameters auszudrücken. Wir sehen, dass in s' eine willkürliche additive Constante auftritt und dass demnach eine gegebene Curve ∞^1 Evolventen besitzt, die sämtlich auf der Tangentendeveloppabeln der Curve liegen und die Orthogonaltrajectorien der erzeugenden Tangenten sind.

Wir behandeln nun die umgekehrte Aufgabe: Alle Evoluten einer gegebenen Curve C zu finden. Da die Unbekannten unserer Aufgabe hier die Elemente der Curve C', insbesondere die Lage des Evolutenpunktes M' in der Normalenebene der Evolvente in M, sind, so wählen wir in dieser Ebene die Haupt- und die Binormale als bewegliche Hilfsaxen und bezeichnen mit u, v die auf diese Axen bezogenen Coordinaten von M'; für die Coordinaten x', y', z' von M' haben wir offenbar die Ausdrücke:

$$x' = x + u\cos\xi + v\cos\lambda,$$
$$y' = y + u\cos\eta + v\cos\mu,$$
$$z' = z + u\cos\zeta + v\cos\nu.$$

Es handelt sich nun darum, u und v als Functionen von s so zu bestimmen, dass die in M' an die Ortscurve dieses Punktes M' gezogene Tangente gerade die Normale $M'M$ von C ist; wir müssen also

$$\frac{dx'}{ds},\quad \frac{dy'}{ds},\quad \frac{dz'}{ds}$$

bezüglich

$$u\cos\xi + v\cos\lambda,\quad u\cos\eta + v\cos\mu,\quad u\cos\zeta + v\cos\nu$$

proportional setzen.

Führen wir die Differentiationen unter Berücksichtigung der Frenetschen Formeln aus, so finden wir, dass sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen u und v genügen müssen, auf die folgenden beiden reducieren:

$$u = \varrho,\quad \frac{1}{u}\left(\frac{du}{ds} + \frac{v}{T}\right) = \frac{1}{v}\left(\frac{dv}{ds} - \frac{u}{T}\right)$$

oder:

$$u = \varrho,\quad \frac{\varrho\frac{dv}{ds} - v\frac{d\varrho}{ds}}{\varrho^2 + v^2} = \frac{1}{T}.$$

Die letzte dieser Gleichungen giebt integriert:

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{\varrho} = \int\limits_0^s \frac{ds}{T} + c,$$

d. h.

$$v = \varrho \operatorname{tang}(\tau + c),$$

wo c eine willkürliche Constante ist und

$$\tau = \int\limits_0^s \frac{ds}{T}$$

gesetzt ist.

Die vorgelegte Aufgabe wird also mit Hilfe einer Quadratur durch die Gleichungen gelöst:

$$(26)\quad \begin{cases} x' = x + \varrho \cos \xi + \varrho \operatorname{tang}(\tau + c) \cos \lambda, \\ y' = y + \varrho \cos \eta + \varrho \operatorname{tang}(\tau + c) \cos \mu, \\ z' = z + \varrho \cos \zeta + \varrho \operatorname{tang}(\tau + c) \cos \nu. \end{cases}$$

Aus ihnen ergeben sich nach (25) sofort die folgenden:

$$(27)\quad \begin{cases} \cos \alpha' = \cos(\tau + c) \cos \xi + \sin(\tau + c) \cos \lambda, \\ \cos \beta' = \cos(\tau + c) \cos \eta + \sin(\tau + c) \cos \mu, \\ \cos \gamma' = \cos(\tau + c) \cos \zeta + \sin(\tau + c) \cos \nu; \end{cases}$$

d. h.: der Winkel, den die Tangente der Evolute mit der Hauptnormale der Evolvente bildet, ist gleich $\tau + c$.

§ 17. Weiteres über Evoluten und Evolventen.

Entsprechend den unendlich vielen Werten der Constanten c in den Gleichungen (26) giebt es ∞^1 Evoluten der gegebenen Curve C, die alle auf der Polardeveloppabeln derselben liegen. Es lässt sich zeigen, dass bei der Abwickelung der Polardeveloppabeln in eine Ebene die ∞^1 Evoluten in die Geraden eines Büschels übergehen*). Ist die Evolvente eben, so hat sie eine ebene Evolute, nämlich den Ort ihrer Krümmungsmittelpunkte; die anderen Evoluten sind Schraubenlinien auf demjenigen geraden Cylinder, der die ebene Evolute zur Basis hat und eben die Polardeveloppable ist.

---

*) Unter Vorwegnahme der in den nächstfolgenden Kapiteln erörterten Begriffe bemerken wir: Wenn in (26) c als variabel betrachtet und $\frac{\varrho}{\cos(\tau + c)} = R$ gesetzt wird, so ergiebt sich für das Quadrat des Linienelements der Polardeveloppabeln der Ausdruck:

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dR^2 + R^2 dc^2,$$

der gleich dem Quadrat des Linienelements der Ebene in Polarcoordinaten ist, was die im Text erwähnte Eigenschaft beweist.

Aus der Bemerkung am Schlusse des vorigen Paragraphen folgt ein wegen seiner Anwendungen sehr wichtiger Satz. Betrachten wir zwei verschiedene Evoluten der gegebenen Curve C, die den Werten c_1 und c_2 der willkürlichen Constanten c entsprechen, so stellt die Differenz $c_1 - c_2$ nach dem angegebenen Satze den Winkel der beiden Tangenten dar, die von ein und demselben Punkte M der Evolvente an die betreffenden Evoluten gezogen sind, woraus folgt:

A) Die von ein und demselben Punkte der Evolvente an zwei verschiedene Evoluten gezogenen Tangenten bilden einen constanten, d. h. von der Lage des Evolventenpunktes unabhängigen Winkel.

Zweckmässiger Weise lässt sich dieses Ergebnis in einer etwas anderen Form wie folgt aussprechen:

B) Werden die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche um die bezüglichen Schnittpunkte mit einer ihrer Orthogonaltrajectorien in der Normalenebene derselben um einen constanten Winkel gedreht, so ist der Ort der neuen Lagen der Erzeugenden wieder eine abwickelbare Fläche.

§ 18. **Orthogonale Trajectorien von ∞^1 Ebenen.**

Das in § 16 zur Bestimmung der Evoluten einer gegebenen Curve eingeschlagene Verfahren kann auch zur Lösung der folgenden Aufgabe angewandt werden: Alle Curven C' zu bestimmen, für die eine gegebene Curve C der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln ist. Die gestellte Frage ist offenbar identisch mit derjenigen nach den Curven C', welche eine gegebene Schaar von ∞^1 Ebenen (Schmiegungsebenen der Curve C) rechtwinklig schneiden. Ist C' eine solche Curve und M' der Punkt, in welchem sie die Schmiegungsebene von C in M rechtwinklig schneidet, so bestimmen wir die Lage von M' in dieser Ebene mittels seiner rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten u, v, bezogen auf die Tangente und die Hauptnormale von C als Axen. Bezeichnen wir die auf die festen Raumaxen bezogenen Coordinaten von M' mit x', y', z', so haben wir demnach:

$$(28) \qquad \begin{cases} x' = x + u\cos\alpha + v\cos\xi, \\ y' = y + u\cos\beta + v\cos\eta, \\ z' = z + u\cos\gamma + v\cos\zeta, \end{cases}$$

und die der Curve C', dem Orte von M', auferlegte Bedingung besagt, dass $\frac{dx'}{ds}$, $\frac{dy'}{ds}$, $\frac{dz'}{ds}$ bezüglich $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ proportional sein müssen;

daraus ergeben sich für die unbekannten Functionen u und v von s die Gleichungen:

$$\frac{dv}{ds} = -\frac{u}{\varrho}, \quad \frac{du}{ds} = \frac{v}{\varrho} - 1,$$

oder, wenn wir statt s eine neue unabhängige Veränderliche

$$\sigma = \int \frac{ds}{\varrho}$$

einführen:

$$u = -\frac{dv}{d\sigma}, \quad \frac{du}{d\sigma} = v - \varrho.$$

v bestimmt sich also aus der Gleichung:

$$\frac{d^2v}{d\sigma^2} + v = \varrho,$$

die integriert

$$v = c \cos\sigma + c' \sin\sigma - \cos\sigma \int \sin\sigma ds + \sin\sigma \int \cos\sigma ds$$

giebt, wo c, c' willkürliche Constanten sind. Dann haben wir $u = -\frac{dv}{d\sigma}$, d. h.

$$u = c \sin\sigma - c' \cos\sigma - \sin\sigma \int \sin\sigma ds - \cos\sigma \int \cos\sigma ds.$$

Setzen wir die für u und v gefundenen Werte in (28) ein, so haben wir mittels Quadraturen die gesuchten Curven C' bestimmt, die, wie a priori klar war, eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit bilden.

§ 19. **Curven mit gemeinsamen Hauptnormalen.**

In § 15 haben wir gesehen, dass sich die Curven constanter Flexion paarweise zu conjugierten Curven, die die Hauptnormalen gemeinsam haben, zusammenfassen lassen. Wir stellen uns nun mit Bertrand die Aufgabe, allgemein diejenigen Curven C zu bestimmen, bei denen es zu jeder eine zweite C' giebt, welche dieselben Hauptnormalen hat wie C. Versehen wir die zu C' gehörigen Ausdrücke mit Strichen, so haben wir als Coordinaten x', y', z' des Punktes M' von C', der dem Punkte M von C entspricht:

(29) $$x' = x + \varkappa \cos\xi, \quad y' = y + \varkappa \cos\eta, \quad z' = z + \varkappa \cos\zeta,$$

wo $\varkappa = f(s)$ das Stück $M'M$ der Hauptnormalen bezeichnet. Weil nach der Voraussetzung $M'M$ Normale von C' in M' ist, haben wir zunächst:

$$\cos\xi \frac{dx'}{ds} + \cos\eta \frac{dy'}{ds} + \cos\zeta \frac{dz'}{ds} = 0,$$

woraus sich

$$\frac{d\varkappa}{ds} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \varkappa = \text{Const.}$$

ergiebt.

Aus (29) folgt dann durch Differentiation:

$$(30)\qquad \begin{cases} \cos\alpha' = \cos\sigma\cos\alpha + \sin\sigma\cos\lambda, \\ \cos\beta' = \cos\sigma\cos\beta + \sin\sigma\cos\mu, \\ \cos\gamma' = \cos\sigma\cos\gamma + \sin\sigma\cos\nu, \end{cases}$$

wo

$$\cos\sigma = \frac{1-\frac{\varkappa}{\varrho}}{\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa}{\varrho}\right)^2+\frac{\varkappa^2}{T^2}}}, \quad \sin\sigma = \frac{-\frac{\varkappa}{T}}{\sqrt{\left(1-\frac{\varkappa}{\varrho}\right)^2+\frac{\varkappa^2}{T^2}}}$$

gesetzt ist und σ offenbar den Winkel der beiden in zwei entsprechenden Punkten von C und C' gezogenen Tangenten bedeutet.

Durch weitere Differentiation der Gleichungen (30), sowie aus den Frenet'schen Formeln und der Voraussetzung, dass C' dieselben Hauptnormalen wie C hat, folgt:

$$\sigma = \text{Const.},$$

d. h.: Bei der gesuchten Curve C sind die beiden Krümmungen durch die lineare Gleichung:

$$\frac{\varkappa\cos\sigma}{T} - \frac{\varkappa\sin\sigma}{\varrho} + \sin\sigma = 0$$

verknüpft. Umgekehrt, besteht zwischen den beiden Krümmungen einer Curve C eine lineare Relation mit constanten Coefficienten:

$$\frac{A}{T} + \frac{B}{\varrho} + C = 0,$$

ohne dass ϱ und T gleichzeitig constant sind, und setzt man

$$\varkappa = -\frac{B}{C},$$

so erhält man in (29) eine zweite, vollkommen eindeutig bestimmte Curve C' mit denselben Hauptnormalen wie C. Eine Unbestimmtheit tritt nur in dem Falle ein, dass ϱ und T constant sind. Die Curve C ist dann eine gewöhnliche Schraubenlinie. Die Regelfläche ihrer Hauptnormalen wird uns später bei unseren Untersuchungen unter dem Namen Minimal-Schraubenregelfläche begegnen. Offenbar sind alle Orthogonaltrajectorien der Erzeugenden dieser Fläche ebenfalls gewöhnliche Schraubenlinien (von derselben Ganghöhe wie C).

§ 20. **Gleichungen der Bertrand'schen Curven.**

Wir schliessen dieses Kapitel damit, dass wir mittels Quadraturen die expliciten Gleichungen der im vorigen Paragraphen behandelten Curven geben, die als Bertrand'sche bezeichnet werden. Diese Aufgabe führen wir mittels der folgenden Ueberlegungen auf den Fall der Curven constanter Flexion zurück.

Gegeben sei eine Curve C; wir stellen uns die Aufgabe, eine zweite C' zu finden, für die bei gleicher Bogenlänge die Hauptnormale derjenigen von C parallel ist. Bezeichnen wir nun mit σ den Winkel der beiden Tangenten in entsprechenden Punkten von C und C', so haben wir offenbar:

$$(31)\qquad \begin{cases} \cos\alpha' = \cos\sigma\cos\alpha + \sin\sigma\cos\lambda, \\ \cos\beta' = \cos\sigma\cos\beta + \sin\sigma\cos\mu, \\ \cos\gamma' = \cos\sigma\cos\gamma + \sin\sigma\cos\nu. \end{cases}$$

Differenzieren wir diese Gleichungen unter Berücksichtigung der Frenet'schen Formeln und der Voraussetzung:

$$(31')\quad \cos\xi' = \pm\cos\xi,\quad \cos\eta' = \pm\cos\eta,\quad \cos\zeta' = \pm\cos\zeta,$$

so folgt wie im vorigen Paragraphen:

$$\sigma = \text{Const.}$$

Umgekehrt, ist σ constant, so definieren uns die Gleichungen:

$$x' = \int(\cos\sigma\cos\alpha + \sin\sigma\cos\lambda)\,ds,$$
$$y' = \int(\cos\sigma\cos\beta + \sin\sigma\cos\mu)\,ds,$$
$$z' = \int(\cos\sigma\cos\gamma + \sin\sigma\cos\nu)\,ds$$

(bis auf eine Translation) eine Curve C', die zu C in der verlangten Beziehung steht. Zu (31) und (31′) fügen wir die weiter aus denselben folgenden Gleichungen hinzu:

$$(31'')\qquad \begin{aligned} \cos\lambda' &= \pm\cos\sigma\cos\lambda \mp \sin\sigma\cos\alpha, \\ \cos\mu' &= \pm\cos\sigma\cos\mu \mp \sin\sigma\cos\beta, \\ \cos\nu' &= \pm\cos\sigma\cos\nu \mp \sin\sigma\cos\gamma. \end{aligned}$$

Aus (31), (31′) und (31″) ergeben sich durch Differentiation die Gleichungen:

$$(32)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho'} = \pm\left\{\dfrac{\cos\sigma}{\varrho} + \dfrac{\sin\sigma}{T}\right\}, \\ \dfrac{1}{T'} = \dfrac{\cos\sigma}{T} - \dfrac{\sin\sigma}{\varrho}, \end{cases}$$

d. h. die beiden Krümmungen von C' sind homogene lineare Combinationen derjenigen von C mit constanten Coefficienten.

Ist C eine Bertrand'sche Curve mit der natürlichen Gleichung:

$$\frac{A}{T} + \frac{B}{\varrho} + C = 0,$$

so braucht also nur $\operatorname{tang}\sigma = \dfrac{A}{B}$ gesetzt zu werden, damit die abgeleitete Curve C' constante Flexion besitze.

Um nun alle Curven mit der constanten Flexion $\frac{1}{a}$ zu bestimmen, beachten wir, dass für eine solche nach § 2

$$\left(\frac{d\cos\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{ds}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$$

ist, und dass also ihre Gleichungen:

$$x = \int \cos\alpha\, ds, \quad y = \int \cos\beta\, ds, \quad z = \int \cos\gamma\, ds$$

auch so geschrieben werden können:

(32′) $$x = a\int \cos\alpha\, d\sigma, \quad y = a\int \cos\beta\, d\sigma, \quad z = a\int \cos\gamma\, d\sigma,$$

wo

(33) $$d\sigma = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2}$$

gesetzt ist.

Umgekehrt, nehmen wir drei willkürliche Functionen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ eines Parameters u; die durch die Relation:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

verbunden sind, so definieren die Gleichungen (32′), wo $d\sigma$ den Wert (33) hat, wie sofort erhellt, eine Curve mit der constanten Flexion $\frac{1}{a}$, die auch die allgemeinste Curve dieser Art ist.

Kapitel II.

Quadratische Differentialformen.

Algebraische quadratische Formen. — Definition der Differentialinvarianten und Differentialparameter einer quadratischen Differentialform. — Erster Differentialparameter $\Delta_1 U$. — Gemischter Differentialparameter $\nabla(UV)$. — Aequivalenz zweier quadratischer Differentialformen. — Christoffel'sche Drei-Indices-Symbole $\begin{bmatrix} r\ s \\ t \end{bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} r,\ s \\ t \end{Bmatrix}$. — Die covarianten zweiten Differentialquotienten. — Zweiter Differentialparameter $\Delta_2 U$. — Vier-Indices-Symbole. — Krümmungsmass einer binären Differentialform. — Cubische Covariante zweier simultaner quadratischer Differentialformen. — Gleichzeitige Reduction zweier binärer quadratischer Differentialformen auf Orthogonalformen.

§ 21. Algebraische quadratische Formen.

Zum Zwecke der systematischen Behandlung der Flächentheorie in der von Gauss angebahnten Richtung, der die folgenden Untersuchungen gewidmet sind, ist es für uns unerlässlich, einige grundlegende Begriffe aus der Theorie der quadratischen Differentialformen vorauszuschicken. Es soll das der Gegenstand dieses Kapitels sein, in dem wir uns übrigens auf das für unseren Zweck Notwendige beschränken*). Die einfachen Algorithmen, die wir dieser Theorie entnehmen, ermöglichen es uns dann, die grundlegenden Gleichungen der Flächentheorie in wenige durchsichtige Formeln zu verdichten.

---

*) Die hauptsächlichsten Arbeiten, die bei der Abfassung dieses Kapitels benutzt worden sind, sind die folgenden:

Beltrami, Sulla teorica generale dei parametri differenziali. (Atti dell'Accademia delle Scienze di Bologna, 25. Februar 1869.)

Christoffel, Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. (Crelles Journal, Bd. 70.)

Ricci, 1) Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali. (Annali di matematica, Serie 2, Bd. 14.)

2) Delle derivazioni covarianti e contravarianti. Padua 1888.

Weingarten, Ueber die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen. (Festschrift der technischen Hochschule zu Berlin, 1883.)

Es dürfte zweckmässig sein, unseren Untersuchungen einen kurzen Abriss der algebraischen Sätze über quadratische Formen vorauszuschicken*). Wir betrachten eine quadratische Form f der n Veränderlichen $x_1, x_2, \cdots x_n$:

$$f = \sum_{rs} a_{rs} x_r x_s \quad (a_{rs} = a_{sr}), \tag{1}$$

wo sich die angedeutete Summation auf alle Combinationen der Indices r, s aus der Reihe $1, 2, \ldots n$ bezieht. Bezüglich der (constanten) Coefficienten a_{rs} setzen wir nur voraus, dass die Determinante

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

welche die Discriminante der Form f heisst, von Null verschieden sei. Statt der Veränderlichen x führen wir neue, x', ein mittels der homogenen linearen Substitution:

$$x_r = \sum_{i=1}^{i=n} p_{ri} x_i' \quad (r = 1, 2, \ldots n), \tag{2}$$

wo wir von den n^2 Substitutionscoefficienten p_{ri} nur voraussetzen, dass ihre Determinante

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sei (denn sonst müsste zwischen den x eine lineare Relation bestehen, während sie als von einander unabhängig vorausgesetzt sind). Durch die Substitution (2) geht f in eine neue quadratische Form f' der x':

$$f' = \sum_{rs} a_{rs}' x_r' x_s' \tag{3}$$

über, in der sich die neuen Coefficienten a_{rs}' durch die alten und durch die Substitutionscoefficienten p_{ik} mittels der Gleichung:

$$a_{rs}' = \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} p_{\lambda r} p_{\mu s} \tag{4}$$

ausdrücken. Aus (4) folgt, wenn a' die Discriminante von f' bedeutet,

*) S. Beltrami a. a. O.

nach dem Multiplicationssatz der Determinanten der fundamentale Satz, der durch die Gleichung:

(5) $$a' = P^2 a$$

ausgedrückt wird.

Wir setzen nun:

(6) $$X_s = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_s} = \sum_r a_{rs} x_r,$$

woraus durch Auflösung nach den x

(6*) $$x_k = \sum_s A_{ks} X_s \qquad (k = 1, 2, \cdots n),$$

folgt, wo mit A_{ks}, wie es im folgenden stets geschehen soll, die durch die Discriminante a selbst dividierte Unterdeterminante von a_{ks} in a bezeichnet wird. Bilden wir unter Berücksichtigung von (6) und (6*) die Summe $\sum_r X_r x_r$, so kommt:

$$\sum_r X_r x_r = \sum_{rs} a_{rs} x_r x_s = \sum_{rs} A_{rs} X_r X_s.$$

Die quadratische Form:

(7) $$F = \sum_{rs} A_{rs} X_r X_s$$

geht durch die Substitution (6) in f über, wie umgekehrt f in F durch (6*). Statt (6*) können wir auch

$$x_k = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial X_k}$$

schreiben.

Wie man sieht, ist die Beziehung zwischen f und F reciprok, und es werden deshalb die beiden quadratischen Formen f und F als reciproke Formen bezeichnet.

Wir nehmen nun an, dass mittels der linearen Substitution (2) f in f' übergeht und

$$F' = \sum_{rs} A'_{rs} X'_r X'_s$$

die reciproke Form von f' ist. Man sieht leicht, dass sich durch die aus (2) durch Transposition hervorgehende Substitution:

(2*) $$X'_r = \sum_i p_{ir} X_i \qquad (r = 1, 2, \cdots n)$$

F' in F verwandelt. In der That geht F' in die reciproke Form f' mittels der Substitution:

(8) $$X'_r = \sum_s a'_{rs} x'_s \qquad (r = 1, 2, \cdots n)$$

über, F in f mittels (6) und f in f' mittels (2). Wegen (6) haben wir nun:

$$\sum_i p_{ir} X_i = \sum_{ik} a_{ik} p_{ir} x_k ,$$

also wegen (2):

$$\sum_i p_{ir} X_i = \sum_{iks} a_{ik} p_{ir} p_{ks} x_s' ,$$

wofür wir wegen (4) auch schreiben können:

$$\sum_i p_{ir} X_i = \sum_s a'_{rs} x_s' ;$$

diese Gleichung, verglichen mit (8), ergiebt gerade (2*).

Hieraus folgt, dass sich die A_{rs} ebenso durch die A'_{rs} ausdrücken, wie die a'_{rs} durch die a_{rs}, wofern nur die Indices der p vertauscht werden; man hat also nach (4) die bemerkenswerte Gleichung:

$$A_{rs} = \sum_{\lambda\mu} A'_{\lambda\mu} p_{r\lambda} p_{s\mu} . \tag{9}$$

§ 22. **Definition der Differentialinvarianten und Differentialparameter einer quadratischen Differentialform.**

Es seien $x_1, x_2, \dots x_n$ n unabhängige Veränderliche und $dx_1, dx_2, \dots dx_n$ ihre Differentiale; wir betrachten die quadratische Differentialform:

$$f = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s \quad (a_{rs} = a_{sr}), \tag{10}$$

wo die Coefficienten a_{rs} gegebene Functionen der x seien. Von diesen Functionen setzen wir voraus, dass sie in dem für die x in Betracht kommenden Aenderungsbereich endlich und stetig seien, ebenso wie alle ihre ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten nach den x; ausserdem werde für diesen Aenderungsbereich die Discriminante a der f stets als von Null verschieden angenommen.

Drücken wir die n Veränderlichen x durch n neue willkürliche Veränderliche x' aus mittels der Gleichungen:

$$x_i = f_i(x_1', x_2', \dots x_n') \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

wo für die Functionen f_i der x' wieder die soeben getroffenen Voraussetzungen gelten sollen, so werden die Differentiale $dx_1, dx_2, \dots dx_n$ der linearen Substitution:

$$dx_r = \sum_i p_{ri} dx_i', \quad p_{ri} = \frac{\partial x_r}{\partial x_i'} \quad (r = 1, 2, \dots n) \tag{11}$$

unterworfen, und es geht f in eine neue quadratische Differentialform:

(12) $$f' = \sum_{rs} a'_{rs} dx'_r dx'_s$$

über, wo

(13) $$a'_{rs} = \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_r} \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_s}$$

ist.

Die Determinante M der linearen Substitution (11) für die Differentiale ist hier die Functionaldeterminante der x nach den x':

$$M = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|,$$

und es ist

$$a' = M^2 a,$$

wenn a und a' die bezüglichen Discriminanten von f und f' sind.

Haben A_{rs}, A'_{rs} dieselbe Bedeutung wie im vorigen Paragraphen, so haben wir nach (9):

(14) $$A_{rs} = \sum_{\lambda\mu} A'_{\lambda\mu} \frac{\partial x_r}{\partial x'_\lambda} \frac{\partial x_s}{\partial x'_\mu}.$$

Wir nehmen nun an, dass wir einen aus den Coefficienten a_{rs} von f und deren ersten, zweiten, ... Differentialquotienten gebildeten Ausdruck

$$\varphi\left(a_{rs}, \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t}, \frac{\partial^2 a_{rs}}{\partial x_t \partial x_u}, \cdots\right)$$

haben von der Beschaffenheit, dass derselbe, wenn die n Veränderlichen x einer beliebigen Transformation unterworfen werden, in den Ausdruck übergeht, der auf dieselbe Weise aus den Coefficienten a'_{rs} der transformierten Form f' und ihren Differentialquotienten gebildet ist. Dann sagen wir, dass φ eine Differentialinvariante der Form f ist. Wenn in einem solchen Ausdrucke φ ausser den Coefficienten der Grundform f und ihren Differentialquotienten eine gewisse Zahl von willkürlichen Functionen U, V ... samt ihren Differentialquotienten auftritt, derart, dass bei einer beliebigen Transformation der Variabeln immer noch

$$\varphi\left(a_{rs}, \frac{\partial a_{rs}}{\partial x_t}, \cdots U, V, \frac{\partial U}{\partial x_k}, \frac{\partial V}{\partial x_i} \cdots\right) = \varphi\left(a'_{rs}, \frac{\partial a'_{rs}}{\partial x'_t}, \cdots U', V', \frac{\partial U'}{\partial x'_k}, \frac{\partial V'}{\partial x'_i} \cdots\right)$$

ist, wo U', V' ... dieselben Functionen wie U, V ... sind, nur dass an Stelle der x die x' stehen, so sagen wir, dass φ ein Differentialparameter ist.

Es sind also die zu einer quadratischen Form f gehörigen Differentialparameter Ausdrücke, die aus den Coefficienten von f, einer gewissen Zahl von willkürlichen Functionen und den Differentialquotienten

der Coefficienten und Functionen gebildet sind derart, dass sie sich bei einer beliebigen Transformation der Veränderlichen nicht ändern. Sobald in einem solchen Ausdruck die willkürlichen Functionen fehlen, haben wir eine Differentialinvariante.

Ehe wir zur wirklichen Bildung der Differentialparameter schreiten, deren Kenntnis wegen der Anwendungen auf die Flächentheorie für uns notwendig ist, dürfte es zweckmässig sein, den Weg, den wir in den folgenden Ausführungen einschlagen werden*), zu beleuchten. Angenommen, wir kennen eine Differentialform vom zweiten oder von höherem Grade, ψ, deren Coefficienten aus denjenigen der Grundform f, ihren Differentialquotienten sowie einer gewissen Zahl von willkürlichen Functionen und deren Differentialquotienten gebildet sind und welche die Eigenschaft besitzt, bei einer beliebigen Transformation der Veränderlichen in die auf dieselbe Weise bezüglich der transformierten Form f' und der transformierten willkürlichen Functionen gebildete Differentialform ψ' überzugehen. Wir sagen in diesem Falle, dass die Form ψ eine Differentialcovariante von f ist, und es ist klar, dass, wenn wir f und ψ als zwei algebraische Formen (der Differentiale) betrachten und ihre absoluten Simultaninvarianten bilden, wir eben Differentialparameter oder Differentialinvarianten erhalten werden, je nachdem in den Coefficienten von ψ willkürliche Functionen auftreten oder nicht.

§ 23. Erster Differentialparameter $\Delta_1 U$ und gemischter Differentialparameter $\nabla(U, V)$.

Ist U eine willkürliche Function von $x_1, x_2, \dots x_n$, so haben wir im Quadrat ihres ersten Differentials:

$$(dU)^2 = \sum_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s} dx_r\, dx_s$$

offenbar eine quadratische Differentialcovariante der gegebenen Form f. Bezeichnet k eine willkürliche Constante, so wird demnach auch

$$\varphi = \sum_{rs} \left(a_{rs} + k \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s}\right) dx_r\, dx_s$$

eine Differentialcovariante von f sein. Die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von k in dem Quotienten aus der Discriminante von φ und derjenigen von f werden also lauter Differentialparameter mit der willkürlichen Function U sein. Insbesondere hat der erste Differential-

*) Vgl. insbesondere Ricci a. a. O.

parameter, der Coefficient von k selbst, den wir mit $\Delta_1 U$ bezeichnen, offenbar den Wert

$$\Delta_1 U = \sum_{rs} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s};$$

er heisst nach Beltrami erster Differentialparameter der Function U.

Es sei nun V eine zweite willkürliche Function; in dem Product der beiden Differentiale:

$$dUdV = \sum_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s} dx_r dx_s$$

haben wir wieder eine Differentialcovariante von f, und wenn wir die frühere Form φ durch

$$\varphi = \sum_{rs} \left(a_{rs} + k \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s}\right) dx_r dx_s$$

ersetzen und die obige Ueberlegung wiederholen, so sehen wir, dass der Ausdruck

$$\sum_{rs} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

ein Differentialparameter mit zwei willkürlichen Functionen U und V ist. Derselbe wird mit Beltrami durch das Symbol

$$\nabla(U, V)$$

bezeichnet und heisst gemischter Differentialparameter von U und V. Es ist klar, dass, wenn im gemischten Differentialparameter

$$(16) \qquad \nabla(U, V) = \sum_{rs} A_{rs} \frac{\partial U}{\partial x_r} \frac{\partial V}{\partial x_s}$$

$V = U$ gesetzt wird, sich der erste Differentialparameter $\Delta_1 U$ ergiebt.

§ 24. **Aequivalenz zweier quadratischer Differentialformen.**

Zwei Differentialformen:

$$f = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s, \qquad f' = \sum_{rs} a'_{rs} dx'_r dx'_s$$

nennen wir äquivalent, wenn es möglich ist, die $x_1, x_2 \ldots x_n$ gleich solchen Functionen der $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$ zu setzen, dass die erste Form in die zweite übergeht. Wenn die beiden Formen f und f', d. h.

die a_{rs} als Functionen der x, die a'_{rs} als Functionen der x' gegeben sind, so müssen unter der Voraussetzung der Aequivalenz von f und f' die x, als unbekannte Functionen der x' aufgefasst, gewissen partiellen Differentialgleichungen genügen, deren Aufsuchung Gegenstand dieses Paragraphen sein soll. Wir gehen zu diesem Zwecke von der Gleichung (13), § 22, S. 39:

$$a'_{rs} = \sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s}$$

aus und differenzieren dieselbe nach einer beliebigen von den Variabeln x', z. B. nach x'_t; dann haben wir*):

$$\text{(a)} \quad \frac{\partial a'_{rs}}{\partial x'_t} = \sum_{ikl} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} \frac{\partial x_l}{\partial x'_t} + \sum_{ik} a_{ik} \left\{ \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_t} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} + \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial^2 x_k}{\partial x'_s \partial x'_t} \right\}.$$

Hierin vertauschen wir s mit t und gleichzeitig in der dreifachen Summe auf der rechten Seite die Summationsindices k und l; dann folgt:

$$\text{(b)} \quad \frac{\partial a'_{rt}}{\partial x'_s} = \sum_{ikl} \frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} \frac{\partial x_l}{\partial x'_t} + \sum_{ik} a_{ik} \left\{ \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_s} \frac{\partial x_k}{\partial x'_t} + \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial^2 x_k}{\partial x'_s \partial x'_t} \right\}.$$

In dieser Gleichung vertauschen wir r mit s und rechts in der dreifachen Summe und im zweiten Gliede der Doppelsumme die Indices i und k. Die so entstehende Gleichung:

$$\text{(c)} \quad \frac{\partial a'_{st}}{\partial x'_r} = \sum_{ikl} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} \frac{\partial x_l}{\partial x'_t} + \sum_{ik} a_{ik} \left\{ \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_s} \frac{\partial x_k}{\partial x'_t} + \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_t} \right\}$$

addieren wir zu (b) und subtrahieren von der Summe die Gleichung (a). So erhalten wir:

$$\frac{\partial a'_{rt}}{\partial x'_s} + \frac{\partial a'_{st}}{\partial x'_r} - \frac{\partial a'_{rs}}{\partial x'_t} = \sum_{ikl} \left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \right) \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} \frac{\partial x_l}{\partial x'_t} +$$
$$+ 2 \sum_{ik} a_{ik} \frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_s} \frac{\partial x_k}{\partial x'_t}.$$

Dividieren wir diese Gleichung durch 2 und verwandeln wir in der Doppelsumme rechts den Summationsindex k in l, so haben wir:

---

*) Man beachte, dass die a'_{rs} explicite Functionen der x' sind, während die a_{rs} insofern Functionen der x' sind, als diese in den x enthalten sind, also ist:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x'_t} = \sum_l \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial x'_t} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a'_{rt}}{\partial x'_s} + \frac{\partial a'_{st}}{\partial x'_r} - \frac{\partial a'_{rs}}{\partial x'_t}\right) =$$

$$= \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial x'_t}\left[\sum_{ik} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right)\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s} + \sum_i a_{il}\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_s}\right]$$

Wir führen mit Christoffel die Drei-Indices-Symbole:

$$\left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\right) \tag{17}$$

ein und versehen dieselben Symbole für die transformierte Form f' mit Strichen; dann lässt sich die obige Gleichung auch so schreiben:

$$\left[\begin{matrix} rs \\ t \end{matrix}\right]' = \sum_l \frac{\partial x_l}{\partial x'_t}\left[\sum_{ik}\left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right]\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s} + \sum_i a_{il}\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_r \partial x'_s}\right].$$

Wir multiplicieren dieselbe mit

$$A'_{\mu t}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu},$$

summieren nach μ und t von 1 bis n, indem wir berücksichtigen, dass wegen (14), § 22, S. 39:

$$\sum_{\mu t} A'_{\mu t}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}\frac{\partial x_l}{\partial x'_t} = A_{\nu l}$$

und $\sum_l a_{il} A_{\nu l} = 0$ für $i \neq \nu$, dagegen $= 1$ für $i = \nu$ ist, und erhalten:

$$\sum_\mu\left(\sum_t A'_{\mu t}\left[\begin{matrix} rs \\ t \end{matrix}\right]'\right)\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} = \sum_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s}\left(\sum_l A_{\nu l}\left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right]\right) + \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_r \partial x'_s}.$$

Wir führen nun die neuen Christoffel'schen Drei-Indices-Symbole:

$$\left\{\begin{matrix} ik \\ \nu \end{matrix}\right\} = \sum_l A_{\nu l}\left[\begin{matrix} ik \\ l \end{matrix}\right] \tag{18}$$

ein, wobei wir die analogen für die transformierte Form gebildeten Symbole mit Strichen versehen. Dann erhalten wir die Fundamentalgleichungen, welche wir aufstellen wollten:

$$\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_r \partial x'_s} + \sum_{ik}\left\{\begin{matrix} ik \\ \nu \end{matrix}\right\}\frac{\partial x_i}{\partial x'_r}\frac{\partial x_k}{\partial x'_s} = \sum_\mu \left\{\begin{matrix} rs \\ \mu \end{matrix}\right\}'\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu}. \tag{I}$$

Dieselben drücken alle zweiten Differentialquotienten der unbekannten Functionen durch die ersten Differentialquotienten aus.

§ 25. Eigenschaften der Christoffel'schen Drei-Indices-Symbole.

Die Christoffel'schen Drei-Indices-Symbole werden in der Folge stets angewandt werden, und wir müssen daher auf ihre Eigenschaften etwas näher eingehen.

Die durch die Gleichung (17) definierten Symbole der ersten Art $\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}$ besitzen offenbar die Eigenschaft:

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ki \\ l \end{bmatrix},$$

woraus nach (18) folgt, dass auch in einem Symbol zweiter Art $\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}$ die Vertauschung der beiden oberen Indices den Wert desselben nicht ändert.

Wir bemerken ferner, dass, wie sich die Symbole $\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}$ durch die Differentialquotienten der Coefficienten der Grundform ausdrücken, so auch umgekehrt jeder dieser Differentialquotienten als Aggregat von zwei solchen Symbolen dargestellt werden kann. In der That ist:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} = \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Es ist weiter zu bemerken: wie sich die Symbole der zweiten Art durch diejenigen der ersten mittels (18) ausdrücken, so auch umgekehrt letztere durch erstere vermöge der Formel:

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix} = \sum_\nu a_{l\nu} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix}. \tag{18*}$$

Schliesslich leiten wir die Gleichung ab, die den logarithmischen Differentialquotienten der Discriminante a nach einem beliebigen x als Aggregat von Drei-Indices-Symbolen der zweiten Art darstellt.

Nach der Regel für die Differentiation einer Determinante haben wir:

$$\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x_l} = \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}$$

oder wegen (19):

$$\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x_l} = \sum_{ik} A_{ik} \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix} + \sum_{ik} A_{ik} \begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix}.$$

Die beiden Summen rechts sind einander gleich, also ist

$$\frac{1}{2a}\frac{\partial a}{\partial x_l} = \sum_{ik} A_{ik} \begin{bmatrix} il \\ k \end{bmatrix}.$$

Führen wir vermöge (18) die Symbole zweiter Art ein, so erhalten wir demnach als die gesuchte Gleichung:

$$\frac{\partial \log \sqrt{a}}{\partial x_l} = \sum_i \left\{ {il \atop i} \right\}. \tag{20}$$

Aus dieser leiten wir eine neue ab, die wir bald werden benutzen müssen. Hierzu schreiben wir sie wie vorhin, addieren beiderseits $\sum_{ik} A_{ik} \left[{ik \atop l} \right]$, wobei wir beachten, dass

$$\left[{il \atop k} \right] + \left[{ik \atop l} \right] = \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i}$$

ist, und erhalten:

$$\frac{\partial \log \sqrt{a}}{\partial x_l} + \sum_{ik} A_{ik} \left[{ik \atop l} \right] = \sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i}.$$

Da nun

$$\sum_k A_{ik}\, a_{kl} = \text{Const.}$$

ist, so folgt, wenn nach x_i differenziert und nach i summiert wird:

$$\sum_{ik} A_{ik} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} = - \sum_{ik} a_{kl} \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i},$$

sodass sich als gesuchte Gleichung ergiebt:

$$\frac{\partial \log \sqrt{a}}{d x_l} + \sum_{ik} A_{ik} \left[{ik \atop l} \right] = - \sum_{ik} a_{kl} \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_i}. \tag{21}$$

§ 26. Die covarianten zweiten Differentialquotienten und der zweite Differentialparameter $\Delta_2 U$.

Unter Zuhilfenahme der Fundamentalgleichungen (I), § 24, S. 43, können wir nun eine quadratische Differentialcovariante der gegebenen Form f bilden, deren Coefficienten aus denjenigen von f, ihren Differentialquotienten und aus den ersten und zweiten Differentialquotienten einer willkürlichen Function $U(x_1, x_2, \ldots x_n)$ gebildet sind.

In der That, bezeichnen wir mit U' den Ausdruck, der aus U entsteht, wenn darin für die x ihre Werte als Functionen der x' gesetzt werden, so haben wir offenbar:

$$\frac{\partial U'}{\partial x_r'} = \sum_\nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_r'},$$

also:

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x_r' \partial x_s'} = \sum_{\nu\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_r'} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_s'} + \sum_\nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x_r' \partial x_s'},$$

demnach wegen (I):

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x_r' \partial x_s'} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} rs \\ \mu \end{Bmatrix}' \frac{\partial U'}{\partial x_\mu'} = \sum_{\nu\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_r'} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_s'} - \sum_{\nu i k} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial x_r'} \frac{\partial x_k}{\partial x_s'} \frac{\partial U}{\partial x_\nu}.$$

Werden in der dreifachen Summe auf der rechten Seite die Summationsindices i, k, ν bezüglich in ν, μ, i verwandelt, so lässt sich die letzte Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial x_r' \partial x_s'} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} rs \\ \mu \end{Bmatrix}' \frac{\partial U}{\partial x_\mu'} = \sum_{\nu\mu} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu \partial x_\mu} - \sum_i \begin{Bmatrix} \nu\mu \\ i \end{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_r'} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_s'}.$$

Führen wir nun die Bezeichnung:

$$(22) \qquad U_{\nu\mu} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_\nu \partial x_\mu} - \sum_i \begin{Bmatrix} \nu\mu \\ i \end{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

ein und bedienen wir uns derselben Bezeichnung mit Accenten für die transformierte Form, so erhalten wir:

$$(23) \qquad U'_{rs} = \sum_{\nu\mu} U_{\nu\mu} \frac{\partial x_\nu}{\partial x_r'} \frac{\partial x_\mu}{\partial x_s'}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die in (22) mit dem Symbol $U_{\nu\mu}$ bezeichneten Combinationen der ersten und zweiten Differentialquotienten der willkürlichen Function U eben die Coefficienten einer quadratischen Covariante der Grundform f sind, denn aus (23) folgt offenbar:

$$\sum_{rs} U'_{rs} dx_r' dx_s' = \sum_{\nu\mu} U_{\nu\mu} dx_\nu dx_\mu .$$

Die U_{rs} heissen deshalb die covarianten zweiten Differentialquotienten der Function U bezüglich der quadratischen Grundform f.

Verfahren wir nun mit der covarianten Form:

$$\sum_{rs} U_{rs} dx_r dx_s,$$

(die als das zweite covariante Differential von U bezeichnet werden kann) ebenso, wie in § 23 mit dem Quadrat des ersten Differentials von U, so können wir schliessen, dass die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von k in dem Quotienten aus der Discriminante der Form:

$$\sum_{rs} (a_{rs} + k U_{rs}) dx_r dx_s$$

und derjenigen der Grundform lauter Differentialparameter (zweiter Ordnung) von U sind. Insbesondere ist der Coefficient von k, den wir immer mit $\Delta_2 U$ bezeichnen und den zweiten Differentialparameter von U nennen wollen, gegeben durch:

(24) $$\Delta_2 U = \sum_{rs} A_{rs} U_{rs} = \sum_{rs} A_{rs} \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_i \begin{Bmatrix} rs \\ i \end{Bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_i} \right\}.$$

Vermöge der Gleichung (21) des vorigen Paragraphen können wir $\Delta_2 U$ in eine andere Form bringen, die später in den Anwendungen am häufigsten gewählt werden wird. Setzen wir in (24) für die Symbole der zweiten Art ihre Werte in denjenigen der ersten ein, so haben wir:

$$\Delta_2 U = \sum_{rs} A_{rs} \frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_s} - \sum_{rsil} A_{rs} A_{il} \begin{bmatrix} rs \\ l \end{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x_i};$$

aber nach (21) ist:

$$-\sum_{rs} A_{rs} \begin{bmatrix} rs \\ l \end{bmatrix} = \frac{\partial \log \sqrt{a}}{\partial x_l} + \sum_{rs} a_{sl} \frac{\partial A_{rs}}{\partial x_r},$$

also:

$$\Delta_2 U = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{rs} \sqrt{a} A_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial U}{\partial x_r} \right) + \sum_{il} \frac{A_{il}}{\sqrt{a}} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x_l} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \\ + \sum_{rsi} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial A_{rs}}{\partial x_r} \sum_l A_{il} a_{sl}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{rs} \left\{ \sqrt{a} A_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial U}{\partial x_r} \right) + A_{rs} \frac{\partial \sqrt{a}}{\partial x_s} \frac{\partial U}{\partial x_r} \right\} + \\ + \sum_{rs} \frac{\partial A_{rs}}{\partial x_r} \frac{\partial U}{\partial x_s},$$

was wir in der definitiven Form:

(25) $$\Delta_2 U = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_s \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\sum_r A_{rs} \sqrt{a} \frac{\partial U}{\partial x_r} \right)$$

schreiben können.

Bemerkung. Für die Theorie der binären Formen (die ausschliesslich in den Anwendungen auf die Theorie der Oberflächen auftreten) sind die eingeführten Differentialparameter

$$\Delta_1 U, \quad \nabla(U, V), \quad \Delta_2 U$$

die grundlegenden. In der That lässt sich jeder andere Differentialparameter durch wiederholte Anwendung obiger drei Operationssymbole bilden*).

Es ist jedoch vorteilhaft, explicite noch einen anderen Differentialparameter zweiter Ordnung zu betrachten, der in der Theorie der Abwickelbarkeit sehr wichtig ist. Wir definieren ihn als Quotienten der beiden Discriminanten der Formen:

---

*) Vgl. Darboux, Bd. 3, S. 260.

$$U_{11}\, dx_1^2 + 2\, U_{12}\, dx_1\, dx_2 + U_{22}\, dx_2^2,$$
$$a_{11}\, dx_1^2 + 2\, a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2.$$

Wenn wir ihn mit $\Delta_{22} U$ bezeichnen, so haben wir:

$$(26) \qquad \Delta_{22} U = \frac{U_{11} U_{22} - U_{12}^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}.$$

Er drückt sich übrigens durch die Fundamentalparameter vermöge der Gleichung:

$$(26^*) \qquad \Delta_{22} U = \frac{2 \Delta_2 U . \nabla(U, \Delta_1 U) - \Delta_1(\Delta_1 U)}{4 \Delta_1 U}$$

aus.

§ 27. Vier-Indices-Symbole.

Die Covarianten der Grundform f, welche wir bisher gebildet haben, enthielten in ihren Coefficienten willkürliche Functionen. Wir wollen nun eine Covariante vierten Grades in den Differentialen bilden, deren Coefficienten aus denjenigen der Grundform und deren (ersten und zweiten) Differentialquotienten gebildet sind. Auf diese Weise sind wir imstande, uns **Differentialinvarianten** herzustellen.

Dieses lässt sich dadurch erreichen, dass wir mittels geeigneter Operationen aus den Fundamentalgleichungen (I), § 24, S. 43, die zweiten Differentialquotienten eliminieren.

Zu diesem Zwecke gehen wir aus von den beiden Gleichungen (I):

$$\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} + \sum_{ri} \begin{Bmatrix} r i \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta} = \sum_t \begin{Bmatrix} \alpha \beta \\ t \end{Bmatrix}' \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_t},$$
$$\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_\alpha \partial x'_\gamma} + \sum_{rh} \begin{Bmatrix} r h \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma} = \sum_t \begin{Bmatrix} \alpha \gamma \\ t \end{Bmatrix}' \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_t}.$$

Differenzieren wir die erste nach x'_γ, die zweite nach x'_β und subtrahieren wir, so heben sich gewisse Glieder fort, und wir finden so:

$$\sum_{rih} \left[\frac{\partial \begin{Bmatrix} r i \\ \nu \end{Bmatrix}}{\partial x_h} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} r h \\ \nu \end{Bmatrix}}{\partial x_i} \right] \frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma} + \sum_{li} \begin{Bmatrix} l i \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial^2 x_l}{\partial x'_\alpha \partial x'_\gamma} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta} -$$
$$- \sum_{lh} \begin{Bmatrix} l h \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial^2 x_l}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} \frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma} = \sum_t \left[\frac{\partial \begin{Bmatrix} \alpha \beta \\ t \end{Bmatrix}'}{\partial x'_\gamma} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} \alpha \gamma \\ t \end{Bmatrix}'}{\partial x'_\beta} \right] \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_t} +$$
$$+ \sum_t \begin{Bmatrix} \alpha \beta \\ t \end{Bmatrix}' \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_t \partial x'_\gamma} - \sum_t \begin{Bmatrix} \alpha \gamma \\ t \end{Bmatrix}' \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial x'_t \partial x'_\beta}.$$

Setzen wir hierin statt der zweiten Differentialquotienten der x die durch die Fundamentalgleichungen (I) bestimmten Werte ein, so heben sich die Glieder, welche die Producte zweier erster Differentialquotienten

enthalten, auf, und wenn wir in einigen der Summen die Indicesbezeichnung passend ändern (so dass dieselben Differentialquotienten in den verschiedenen Gliedern sowohl der linken als auch der rechten Seite zum Vorschein kommen), so ergiebt sich die Gleichung:

$$\sum_{rih}\left[\frac{\partial \begin{Bmatrix} ri\\ \nu\end{Bmatrix}}{\partial x_h}-\frac{\partial \begin{Bmatrix} rh\\ \nu\end{Bmatrix}}{\partial x_i}+\sum_l\left(\begin{Bmatrix} ri\\ l\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lh\\ \nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} rh\\ l\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} li\\ \nu\end{Bmatrix}\right)\right]\frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma}=$$

$$=\sum_t\left[\frac{\partial \begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ t\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\gamma}-\frac{\partial \begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ t\end{Bmatrix}'}{\partial x'_\beta}+\sum_u\left(\begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ u\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}u\gamma\\ t\end{Bmatrix}'-\begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ u\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}u\beta\\ t\end{Bmatrix}'\right)\right]\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_t}.$$

Die Coefficienten von $\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_t}$ und des Products $\frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma}$ in den beiderseitigen Summen sind nach demselben Gesetz gebildet, der eine bezüglich der Coefficienten der transformierten Form f', der andre bezüglich derjenigen der Grundform, und hängen bezüglich von vier Indices ab. Unter Einführung der neuen Bezeichnung:

$$(27)\qquad \{r\nu, ih\}=\frac{\partial \begin{Bmatrix} ri\\ \nu\end{Bmatrix}}{\partial x_h}-\frac{\partial \begin{Bmatrix} rh\\ \nu\end{Bmatrix}}{\partial x_i}+\sum_l\left(\begin{Bmatrix} ri\\ l\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} lh\\ \nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix} rh\\ l\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} li\\ \nu\end{Bmatrix}\right)$$

lässt sich die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$(28)\qquad \sum_{rih}\{r\nu,\ ih\}\frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma}=\sum_t\{\alpha t,\beta\gamma\}'\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_t}.$$

Zusammen mit den Vier-Indices-Symbolen der zweiten Art (27) führen wir auch noch solche der ersten Art ein, indem wir setzen:

$$(29)\qquad (rk, ih)=\sum_\nu a_{\nu k}\{r\nu, ih\};$$

hieraus folgt dann durch Auflösung nach den Symbolen der zweiten Art:

$$(29^*)\qquad \{r\nu, ih\}=\sum_k A_{\nu k}(rk, ih).$$

Multiplicieren wir (28) mit $a_{\nu k}\frac{\partial x_k}{\partial x'_\delta}$ und summieren wir über alle Werte von ν und k, wobei wir beachten, dass nach Formel (13), S. 39,

$$\sum_{\nu k} a_{\nu k}\frac{\partial x_k}{\partial x'_\delta}\frac{\partial x_\nu}{\partial x'_t}=a'_{t\delta}$$

ist, so ergiebt sich die Gleichung:

$$(30)\qquad (\alpha\delta,\beta\gamma)'=\sum_{rihk}(rk, ih)\frac{\partial x_r}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial x'_\delta}\frac{\partial x_i}{\partial x'_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial x'_\gamma},$$

also:

$$(30^*)\quad \sum_{\alpha\beta\gamma\delta}(\alpha\delta,\beta\gamma)' dx'_\alpha d^{(1)}x'_\beta d^{(2)}x'_\gamma d^{(3)}x'_\delta = \sum_{rkih}(rk,ih)\,dx_r d^{(1)}x_k d^{(2)}x_i d^{(3)}x_h,$$

wo d, $d^{(1)}$, $d^{(2)}$, $d^{(3)}$ die Symbole von vier verschiedenen Differentialsystemen sind.

In der quadrilinearen Form:

$$(31)\qquad \varphi = \sum_{rkih}(rk,ih)\,dx_r d^{(1)}x_k d^{(2)}x_i d^{(3)}x_h$$

haben wir also, wie verlangt wurde, eine Differentialcovariante von f, die aus den Coefficienten von f und deren Differentialquotienten gebildet ist.

§ 28. Krümmungsmass einer binären Differentialform.

Wenden wir die Gleichung (30) auf den Fall einer binären Form an, so können wir leicht die Existenz der sehr wichtigen Differentialinvariante nachweisen, die als das Krümmungsmass der binären Form bezeichnet wird.

Zu dem Zwecke entwickeln wir einige Eigenschaften der Vier-Indices-Symbole erster Art (rk,ih), die wir vor allen Dingen durch die Drei-Indices-Symbole erster Art ausdrücken wollen. Wegen der Gleichungen (27) und (29) haben wir:

$$(rk,ih) = \sum_\nu a_{\nu k}\frac{\partial \begin{Bmatrix} ri \\ \nu \end{Bmatrix}}{\partial x_h} - \sum_\nu a_{\nu k}\frac{\partial \begin{Bmatrix} rh \\ \nu \end{Bmatrix}}{\partial x_i} + \\ + \sum_l \left(\begin{Bmatrix} ri \\ l \end{Bmatrix}\sum_\nu a_{\nu k}\begin{Bmatrix} lh \\ \nu \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} rh \\ l \end{Bmatrix}\sum_\nu a_{\nu k}\begin{Bmatrix} li \\ \nu \end{Bmatrix}\right).$$

Nun ist nach (18*), S. 44:

$$\sum_\nu a_{\nu k}\begin{Bmatrix} ri \\ \nu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ri \\ k \end{bmatrix},\quad \sum_\nu a_{\nu k}\begin{Bmatrix} rh \\ \nu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} rh \\ k \end{bmatrix},$$

$$\sum_\nu a_{\nu k}\begin{Bmatrix} lh \\ \nu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} lh \\ k \end{bmatrix},\quad \sum_\nu a_{\nu k}\begin{Bmatrix} li \\ \nu \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} li \\ k \end{bmatrix},$$

also:

$$(rk,ih) = \frac{\partial \begin{bmatrix} ri \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_h} - \frac{\partial \begin{bmatrix} rh \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_i} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} ri \\ \nu \end{Bmatrix}\frac{\partial a_{\nu k}}{\partial x_h} + \sum_\nu \begin{Bmatrix} rh \\ \nu \end{Bmatrix}\frac{\partial a_{\nu k}}{\partial x_i} + \\ + \sum_l\left(\begin{Bmatrix} ri \\ l \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} lh \\ k \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} rh \\ l \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} li \\ k \end{bmatrix}\right).$$

Setzen wir für $\frac{\partial a_{\nu k}}{\partial x_h}$, $\frac{\partial a_{\nu k}}{\partial x_i}$ ihre bezüglichen Werte (vgl. (19) auf S. 44):

$$\begin{bmatrix} \nu h \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} hk \\ \nu \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} \nu i \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ik \\ \nu \end{bmatrix}$$

ein, so folgt hieraus:

$$(rk,\, ih) = \frac{\partial \begin{bmatrix} r\,i \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_h} - \frac{\partial \begin{bmatrix} r\,h \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_i} + \sum_l \left(\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r\,h \\ l \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} h\,k \\ l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r\,i \\ l \end{Bmatrix} \right)$$

oder nach (18), S. 43:

$$(32)\quad (rk,\, ih) = \frac{\partial \begin{bmatrix} r\,i \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_h} - \frac{\partial \begin{bmatrix} r\,h \\ k \end{bmatrix}}{\partial x_i} + \sum_{l\,m} A_{lm} \left(\begin{bmatrix} r\,h \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\,i \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h\,k \\ l \end{bmatrix} \right).$$

Entwickeln wir die beiden ersten Glieder, die nur die zweiten Differentialquotienten enthalten, so erhalten wir:

$$(32^*)\quad (r\,k,\, i\,h) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 a_{rh}}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_r \partial x_h} - \frac{\partial^2 a_{ri}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial x_r \partial x_i} \right) + $$
$$+ \sum_{l\,m} A_{lm} \left(\begin{bmatrix} r\,h \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\,i \\ m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h\,k \\ l \end{bmatrix} \right).$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich sofort folgende bemerkenswerte Eigenschaften des Symbols erster Art:

(a) $$(kr,\, ih) = -(rk,\, ih),$$

(b) $$(rk,\, hi) = -(rk,\, ih),$$

woraus folgt, dass, wenn die beiden ersten oder zweiten Indices einander gleich sind, der Wert des Symbols identisch gleich Null ist*).

Im Falle der binären Differentialformen ($n = 2$) sind nur vier der Symbole $(rk,\, ih)$ von Null verschieden, nämlich

$$(1\,2,\ 1\,2),\quad (1\,2,\ 2\,1),\quad (2\,1,\ 1\,2),\quad (2\,1,\ 2\,1),$$

aber wegen (a) und (b) ist das vierte gleich dem ersten, das zweite und dritte gleich dem ersten mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Die Gleichung (30) des vorigen Paragraphen wird dann:

$$(1\,2,\, 1\,2)' = (1\,2,\, 1\,2) \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1'} \frac{\partial x_2}{\partial x_2'} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2'} \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} \right)^2,$$

und da auch, wenn wir, wie üblich, mit a und a' die Discriminanten der Grundform f und der transformierten Form f' bezeichnen, nach (5), S. 37,

$$a' = a \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1'} \frac{\partial x_2}{\partial x_2'} - \frac{\partial x_1}{\partial x_2'} \frac{\partial x_2}{\partial x_1'} \right)^2$$

ist, so folgt daraus:

$$\frac{(1\,2,\, 1\,2)'}{a'} = \frac{(1\,2,\, 1\,2)}{a}.$$

---

*) Das Symbol $(r\,k,\, i\,h)$ besitzt auch die durch die folgenden Gleichungen charakterisierten Eigenschaften:

$$(ih,\, rk) = (rk,\, ih),$$
$$(rk,\, ih) + (r\,i,\, hk) + (rh,\, ki) = 0,$$

die wir im Falle $n = 2$ nicht zu berücksichtigen brauchen.

Der Ausdruck:

$$K = \frac{(12,12)}{a} \tag{33}$$

ist also eine Differentialinvariante der binären Form f.

Sie wird das Krümmungsmass oder die Krümmung der Form f genannt.

§ 29. Verschiedene Ausdrücke für die Krümmung.

Es liegt uns nun ob, für die Krümmung K die verschiedenen Ausdrücke zu entwickeln, auf die wir in den Anwendungen auf die Theorie der Oberflächen werden zurückgreifen müssen.

Aus (29*) folgen wegen der vorhin gefundenen Eigenschaften des Symbols (rk, ih) im Falle $n = 2$ die Gleichungen:

$$Ka_{11} = \{12, 12\}, \quad Ka_{12} = \{11, 21\},$$
$$Ka_{12} = \{22, 12\}, \quad Ka_{22} = \{21, 21\},$$

die entwickelt lauten:

$$\text{(II)} \begin{cases} Ka_{11} = \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}^2, \\ Ka_{12} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}, \\ Ka_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}, \\ Ka_{22} = \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2. \end{cases}$$

Nun schreiben wir die erste der Gleichungen (II) folgendermassen:

$$Ka_{11} = \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right] +$$
$$+ \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\right] + 2\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right),$$

berücksichtigen, dass wegen (20), § 25 (S. 45)

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\sqrt{a}}{\partial x_1}, \quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial\sqrt{a}}{\partial x_2}$$

ist, und setzen ein, so ergiebt sich:

$$K = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{a}}{a_{11}}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{a}}{a_{11}}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\right)\right] + \frac{1}{a_{11}^2}\left[\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} +\right.$$
$$\left. + 2a_{11}\left(\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\right)\right].$$

Wegen der Gleichungen (vgl. (19) u. (18*), S. 44):

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} = 2\begin{bmatrix}1\,2\\1\end{bmatrix} = 2a_{11}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + 2a_{12}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} = 2\begin{bmatrix}1\,1\\1\end{bmatrix} = 2a_{11}\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} + 2a_{12}\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}$$

ist aber

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + 2a_{11}\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\right) = 0,$$

also bleibt übrig:

$$\text{(III)} \qquad K = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{a}}{a_{11}}\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{a}}{a_{11}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right)\right].$$

In dieser Gleichung ist natürlich vorausgesetzt, dass a_{11} nicht gleich Null ist, und wir können offenbar (wenn a_{22} nicht gleich Null ist) die hierzu symmetrische Gleichung:

$$\text{(III*)} \qquad K = \frac{1}{\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\sqrt{a}}{a_{22}}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\sqrt{a}}{a_{22}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right)\right\}$$

ansetzen. Merken wir uns endlich noch, dass im Falle

$$a_{11} = a_{22} = 0,$$

in dem

$$\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} = 0,$$

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1}, \quad \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2}$$

ist, die mittleren Gleichungen (II)

$$\text{(IV)} \qquad K = -\frac{1}{a_{12}}\frac{\partial^2 \log a_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

geben. Eine wichtige Anwendung dieser Gleichung ist die folgende. Es sei

$$f = a_{11}dx_1^2 + 2a_{12}dx_1\,dx_2 + a_{22}dx_2^2$$

eine **indefinite** binäre Form ($a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$) von der Krümmung **Null**; durch eine reelle Transformation der Veränderlichen kann dieselbe auf die Form

$$2a'_{12}dx_1'dx_2'$$

gebracht werden, wozu nach Zerlegung von f in seine (reellen) Linearfactoren:

$$f = (\alpha dx_1 + \beta dx_2)(\gamma dx_1 + \delta dx_2)$$

nur

$$x_1' = \int\lambda(\alpha dx_1 + \beta dx_2), \qquad x_2' = \int\mu(\gamma dx_1 + \delta dx_2),$$

$$-a'_{12} = \frac{1}{2\lambda\mu}$$

gesetzt zu werden braucht, wenn λ bezw. μ ein Multiplicator (integrierender Factor) von $\alpha dx_1 + \beta dx_2$ bezw. $\gamma dx_1 + \delta dx_2$ ist. Wenn aber, wie wir annahmen, $K = 0$ ist, so folgt aus (IV):

$$a'_{12} = X_1 X_2,$$

wo X_1 eine Function von x_1' allein und X_2 eine von x_2' allein ist. Setzen wir nun:

$$\sqrt{2}\int X_1 dx_1' = y_1, \quad \sqrt{2}\int X_2 dx_2' = y_2,$$

so ergiebt sich:

$$a_{11} dx_1^2 + 2a_{12} dx_1 dx_2 + a_{22} dx_2^2 = dy_1 dy_2.$$

Um y_1 und y_2 wirklich zu finden, brauchen wir nur zu beachten, dass es in diesem Falle einen Multiplicator von $\alpha dx_1 + \beta dx_2$ — wir bezeichnen ihn mit e^ν — giebt, dessen reciproker Wert $e^{-\nu}$ Multiplicator von $\gamma dx_1 + \delta dx_2$ ist, und dass demnach die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial(e^\nu \alpha)}{\partial x_2} = \frac{\partial(e^\nu \beta)}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial(e^{-\nu}\gamma)}{\partial x_2} = \frac{\partial(e^{-\nu}\delta)}{\partial x_1},$$

durch welche die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \nu}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \nu}{\partial x_2}$ bestimmt werden, da $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ist. Also ergeben sich mittels einer Quadratur ν und mittels zweier weiterer y_1 und y_2. Wir haben demnach das Ergebnis: Eine indefinite binäre Form von der Krümmung Null kann lediglich durch Ausführung von Quadraturen in ein Product zweier Differentiale transformiert werden*).

§ 30. Cubische Covariante (f, φ) zweier simultaner quadratischer Differentialformen f und φ.

Wir kehren nun wieder zur Betrachtung des allgemeinen Falles von n Veränderlichen zurück und untersuchen zwei simultane quadratische Formen:

$$f = \sum_{rs} a_{rs} dx_r dx_s,$$

$$\varphi = \sum_{rs} b_{rs} dx_r dx_s$$

*) Für eine definite Form von der Krümmung Null ist das Resultat ganz ähnlich; nur sind in diesem Falle y_1, y_2 conjugiert imaginär. Wird dann

$$y_1 = \alpha + i\beta, \quad y_2 = \alpha - i\beta$$

gesetzt, so geht die Form mittels Quadraturen in den Ausdruck $d\alpha^2 + d\beta^2$ über. (Vgl. 6. Kap., § 87.)

auf die Bildung einer simultanen cubischen Differentialcovariante hin, die für die Flächentheorie sehr wichtig ist. Setzen wir hierzu voraus, dass sich f und φ beim Uebergange von den Veränderlichen x zu den x' in

$$f' = \sum_{rs} a'_{rs}\, dx'_r\, dx'_s, \qquad \varphi' = \sum_{rs} b'_{rs}\, dx'_r\, dx'_s$$

verwandeln, differenzieren wir alsdann die Gleichung (vgl. (13) auf S. 39):

$$b'_{rs} = \sum_{ik} b_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s}$$

nach x'_t und setzen wir für die zweiten Differentialquotienten die durch die Gleichungen (I) (§ 24, S. 43) bestimmten Werte, so erhalten wir:

$$(34) \qquad \frac{\partial b'_{rs}}{\partial x'_t} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} st \\ \mu \end{Bmatrix}' b'_{r\mu} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} rt \\ \mu \end{Bmatrix}' b'_{s\mu} =$$

$$= \sum_{ik\lambda} \left[\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_\lambda} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} i\lambda \\ \mu \end{Bmatrix} b_{k\mu} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} k\lambda \\ \mu \end{Bmatrix} b_{i\mu} \right] \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_t},$$

wo die Christoffel'schen Symbole für f und die transformierte Form f' gebildet sind. Diese Gleichung zeigt, dass wir in der cubischen Form:

$$\sum_{ik\lambda} \left[\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_\lambda} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} i\lambda \\ \mu \end{Bmatrix} b_{k\mu} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} k\lambda \\ \mu \end{Bmatrix} b_{i\mu} \right] dx_i\, dx_k\, dx_\lambda$$

bereits eine Simultancovariante von f und φ erhalten haben. Für unseren Zweck jedoch ist die zu bildende Form die folgende:

Von der Gleichung (34) subtrahieren wir diejenige, welche aus ihr durch Vertauschung von s mit t hervorgeht. Dann ergiebt sich:

$$\frac{\partial b'_{rs}}{\partial x'_t} - \frac{\partial b'_{rt}}{\partial x'_s} + \sum_\mu \begin{Bmatrix} rs \\ \mu \end{Bmatrix}' b'_{t\mu} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} rt \\ \mu \end{Bmatrix}' b'_{s\mu} =$$

$$= \sum_{ik\lambda} \left[\frac{\partial b_{ik}}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial b_{i\lambda}}{\partial x_k} + \sum_\mu \begin{Bmatrix} ik \\ \mu \end{Bmatrix} b_{\lambda\mu} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} i\lambda \\ \mu \end{Bmatrix} b_{k\mu} \right] \frac{\partial x_i}{\partial x'_r} \frac{\partial x_k}{\partial x'_s} \frac{\partial x_\lambda}{\partial x'_t}.$$

Setzen wir demnach:

$$(35) \qquad b_{rst} = \frac{\partial b_{rs}}{\partial x_t} - \frac{\partial b_{rt}}{\partial x_s} + \sum_\mu \begin{Bmatrix} rs \\ \mu \end{Bmatrix} b_{t\mu} - \sum_\mu \begin{Bmatrix} rt \\ \mu \end{Bmatrix} b_{s\mu},$$

so ist die in den drei verschiedenen Systemen von Differentialen dx_r, $d^{(1)}x_s$, $d^{(2)}x_t$ trilineare Form:

$$\sum_{rst} b_{rst}\, dx_r\, d^{(1)}x_s\, d^{(2)}x_t$$

eine Simultancovariante von f und φ. Dieselbe möge mit

$$(f, \varphi) = \sum_{rst} b_{rst}\, dx_r\, d^{(1)}x_s\, d^{(2)}x_t$$

bezeichnet werden, wo b_{rst} die durch Gleichung (35) angegebene Bedeutung hat. Diese Invariante heisse die für die Form φ in bezug auf f gebildete trilineare Form.

Wir sehen, dass, wenn $\varphi = f$ gesetzt wird, die trilineare Form (f, φ) identisch verschwindet. Im allgemeinen drückt nun wegen der Invarianteneigenschaft von (f, φ) das identische Verschwinden derselben eine Beziehung zwischen den beiden Grundformen f und φ aus, die bei einer Transformation der Veränderlichen ungeändert bleibt.

Die Ausdrücke mit drei Indices b_{rst} besitzen die durch die folgenden Gleichungen charakterisierten Eigenschaften:

$$b_{rst} + b_{rts} = 0,$$

$$b_{rst} + b_{str} + b_{trs} = 0.$$

Aus der ersten derselben folgt, dass diejenigen b_{rst} gleich Null sind, deren beide letzten Indices einander gleich sind.

Im Falle $n = 2$ haben wir nur vier b_{rst}, die nicht identisch verschwinden, und zwar

$$b_{112}, \quad b_{121}, \quad b_{212}, \quad b_{221},$$

von denen jedoch die beiden ersten, sowie die beiden letzten einander entgegengesetzt gleich sind. Hier wird das identische Verschwinden der trilinearen Form (f, φ) durch die beiden Gleichungen:

$$b_{112} = 0, \quad b_{221} = 0$$

oder, wenn nach (35) entwickelt wird, durch das folgende Gleichungssystem ausgedrückt:

$$(\mathrm{V}) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial b_{11}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial b_{12}}{\partial x_1} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} b_{11} + \left(\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}\right) b_{12} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} b_{22} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial b_{22}}{\partial x_1} - \dfrac{\partial b_{12}}{\partial x_2} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} b_{11} + \left(\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) b_{12} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} b_{22} = 0. \end{cases}$$

§ 31. **Gleichzeitige Reduction zweier binärer quadratischer Differentialformen auf Orthogonalformen.**

Wir betrachten zwei simultane binäre quadratische Formen:

$$f = a_{11}\, dx_1^2 + 2a_{12}\, dx_1\, dx_2 + a_{22}\, dx_2^2,$$

$$\varphi = b_{11}\, dx_1^2 + 2b_{12}\, dx_1\, dx_2 + b_{22}\, dx_2^2,$$

und setzen wenigstens von der ersten voraus, dass ihre Discriminante $a = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ von Null verschieden sei.

In den Ausdrücken:

$$H = \frac{a_{11} b_{22} - 2 a_{12} b_{12} + a_{22} b_{11}}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad K = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}$$

haben wir zwei algebraische Simultaninvarianten von f und φ *). Bilden wir die Jacobi'sche Functionaldeterminante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} dx_1 + a_{12} dx_2 & a_{12} dx_1 + a_{22} dx_2 \\ b_{11} dx_1 + b_{12} dx_2 & b_{12} dx_1 + b_{22} dx_2 \end{vmatrix},$$

so haben wir eine Form, die bei einer beliebigen Transformation der Veränderlichen mit der Substitutionsdeterminante M als Factor reproduciert wird, also gerade so, wie es bei der Quadratwurzel aus a der Fall ist (vgl. S. 39). Daraus folgt, dass die quadratische Form:

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}} \begin{vmatrix} a_{11} dx_1 + a_{12} dx_2 & a_{12} dx_1 + a_{22} dx_2 \\ b_{11} dx_1 + b_{12} dx_2 & b_{12} dx_1 + b_{22} dx_2 \end{vmatrix}$$

eine (irrationale) Simultancovariante von f und φ ist. Für diese dritte Differentialcovariante:

$$\Theta = c_{11} dx_1^2 + c_{12} dx_1 dx_2 + c_{22} dx_2^2$$

lässt sich unter der Voraussetzung, dass a_{11} nicht gleich Null ist, die Discriminante $4 c_{11} c_{22} - c_{12}^2$ identisch auf die folgende Form bringen:

$$4 c_{11} c_{22} - c_{12}^2 = -\frac{1}{a} \left\{ \left[a_{11} b_{22} - a_{22} b_{11} - \frac{2 a_{12}}{a_{11}} (a_{11} b_{12} - a_{12} b_{11}) \right]^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{4a}{a_{11}^2} (a_{11} b_{12} - a_{12} b_{11})^2 \right\}.$$

Wir setzen nun voraus, dass die Form f definit, d. h.

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$$

sei, dann folgt, dass $4 c_{11} c_{22} - c_{12}^2$ negativ ist. Auch kann dieser Ausdruck nicht gleich Null sein, wofern nicht die Proportion $b_{11} : b_{12} : b_{22} = a_{11} : a_{12} : a_{22}$ besteht, d. h. wofern sich nicht φ nur durch einen Factor von f unterscheidet.

Die quadratische Differentialgleichung:

$$\Theta = 0$$

zerfällt demnach, wenn wir diesen Fall ausschliessen, in zwei verschiedene reelle lineare Gleichungen:

(a) $$\alpha dx_1 + \beta dx_2 = 0,$$

(b) $$\gamma dx_1 + \delta dx_2 = 0.$$

Bezeichnen wir mit

$$x_1' = \text{Const.}, \quad x_2' = \text{Const.}$$

---

*) H und K sind die Coefficienten der ersten und zweiten Potenz der Constanten k in dem Quotienten

$$\frac{1}{a} \begin{vmatrix} a_{11} + k b_{11} & a_{12} + k b_{12} \\ a_{12} + k b_{12} & a_{22} + k b_{22} \end{vmatrix}.$$

die bezüglichen Integrale der Gleichungen (a) und (b) und führen wir dieselben als neue Veränderliche x_1', x_2' ein, so ergiebt sich in den transformierten Formen:

$$f' = a_{11}' dx_1'^2 + 2a_{12}' dx_1' dx_2' + a_{22}' dx_2'^2,$$
$$\varphi' = b_{11}' dx_1'^2 + 2b_{12}' dx_1' dx_2' + b_{22}' dx_2'^2$$

gleichzeitig

$$a_{12}' = 0, \quad b_{12}' = 0.$$

In der That muss sich die Covariante:

$$\Theta' = \frac{1}{\sqrt{a'}} \begin{vmatrix} a_{11}' dx_1' + a_{12}' dx_2' & a_{12}' dx_1' + a_{22}' dx_2' \\ b_{11}' dx_1' + b_{12}' dx_2' & b_{12}' dx_1' + b_{22}' dx_2' \end{vmatrix}$$

der Voraussetzung zufolge, abgesehen von einem Factor, auf das Product $dx_1' dx_2'$ reducieren, und es ist demnach:

$$\text{(c)} \qquad \begin{cases} a_{11}' b_{12}' - a_{12}' b_{11}' = 0, \\ a_{12}' b_{22}' - a_{22}' b_{12}' = 0. \end{cases}$$

Multiplicieren wir die erste dieser Gleichungen mit b_{22}', die zweite mit b_{11}' und addieren wir, so kommt:

$$b_{12}'(a_{11}' b_{22}' - a_{22}' b_{11}') = 0.$$

Da die Folgerung $a_{11}' b_{22}' - a_{22}' b_{11}' = 0$ auszuschliessen ist, weil sonst aus den beiden letzten Gleichungen die Proportion:

$$b_{11}' : b_{12}' : b_{22}' = a_{11}' : a_{12}' : a_{22}'$$

folgen würde, so haben wir mit Notwendigkeit $b_{12}' = 0$, wonach aus (c) auch $a_{12}' = 0$ folgt.

Umgekehrt sehen wir wegen der Invarianteneigenschaften von Θ sofort, dass, wenn bei einer Transformation der Veränderlichen x_1, x_2 in neue Veränderliche x_1', x_2' in den transformierten Formen f', φ' gleichzeitig $a_{12}' = 0$, $b_{12}' = 0$ ist, die Integrale von (a) und (b) gerade $x_1' =$ Const., $x_2' =$ Const. sind. Wir haben demnach den Satz: Sind zwei binäre quadratische Differentialformen gegeben, von denen wenigstens die eine definit ist, so können in ihnen durch eine reelle Transformation der Veränderlichen die Mittelglieder gleichzeitig eliminiert werden. Die neu einzuführenden Veränderlichen sind diejenigen, welche gleich Constanten gesetzt die Integrale der Gleichung $\Theta = 0$ liefern.

Es ist klar, dass in dem Ausnahmefall, in welchem die beiden Formen einander proportional sind, diese Elimination auf unendlich viele Weisen möglich ist.

Kapitel III.

Krummlinige Coordinaten auf den Flächen. Conforme Abbildung.

Krummlinige Coordinaten auf einer Fläche. — Linienelement. — Winkel einer Curve auf der Fläche mit den Parameterlinien. — Christoffel'sche Symbole, Differentialparameter und Krümmungsmass. — Isothermensysteme. — Isometrische Parameter. — Satz von Lie. — Conforme Abbildung einer Fläche auf die Ebene oder einer Fläche auf eine andere. — Isothermensysteme auf den Rotationsflächen. — Stereographische Polarprojection der Kugel. — Doppelte orthogonale Kreissysteme auf der Kugel und in der Ebene. — Darstellung der Bewegungen der complexen Kugel in sich mittels linearer Substitutionen (Cayley).

---

§ 32. Krummlinige Coordinaten auf einer Fläche.

Eine Curve, die sich unter gleichzeitiger Deformation stetig im Raume bewegt, erzeugt eine Fläche. Zur analytischen Bestimmung einer Fläche können wir durch ein ähnliches Verfahren gelangen, wie wir es in § 1 für die Curven eingeschlagen haben. Hierzu setzen wir voraus, dass die Coordinaten eines beweglichen Curvenpunktes:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u)$$

ausser von der Veränderlichen u, deren einzelne Werte die einzelnen Punkte der Curve festlegen, von einem Parameter v abhängen, d. h. (in einem gewissen Bereiche endliche und stetige) Functionen der Veränderlichen u, v sind, so dass

$$(1) \qquad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

gesetzt werden kann.

Jedem speciellen Werte v_1 von v entspricht eine specielle Curve:

$$x = x(u, v_1), \quad y = y(u, v_1), \quad z = z(u, v_1);$$

ändert sich v stetig, so bewegt sich diese Curve stetig im Raume und beschreibt so eine Fläche, die durch die Gleichungen (1) analytisch

definiert ist. Durch Elimination von u und v aus den drei Gleichungen (1) ergiebt sich offenbar eine Relation:

$$f(x, y, z) = 0,$$

und dies ist die gewöhnliche Gleichung der Fläche.

Diese Fläche ist von dem System der eben betrachteten Curven bedeckt, von denen jede einem speciellen Werte von v entspricht und deshalb eine Curve $v =$ Const. oder kurz eine Curve v heisst.

Nun ist klar, dass, was bezüglich der Gleichungen (1) von der Veränderlichen v gesagt worden ist, auch für die Veränderliche u gilt. Erteilen wir also u einen constanten Wert u_1, so liegt die Curve:

$$x = x(u_1, v), \quad y = y(u_1, v), \quad z = z(u_1, v)$$

ganz auf der Fläche, und wenn sich u stetig ändert, so bewegt sich diese Curve und beschreibt die Fläche. Wir erhalten so ein zweites System von Curven auf der Fläche, die wir als die Curven $u =$ Const. oder die Curven u bezeichnen.

Ein Flächenpunkt P ist bestimmt, wenn in ihm die Werte u_1, v_1 der Veränderlichen u, v bekannt sind. Anders ausgedrückt: jeder Punkt P ist als Schnittpunkt der beiden Curven:

$$u = u_1, \quad v = v_1$$

bestimmt, von denen die eine dem System u, die andere dem System v angehört. Die Parameterwerte u_1, v_1 heissen die krummlinigen Coordinaten des Punktes, während die Curven u, v als Parameterlinien bezeichnet werden.

Eine Gleichung zwischen den Coordinaten des beweglichen Punktes P:

(2) $$\varphi(u, v) = 0$$

beschränkt offenbar die Bewegung desselben auf eine auf der Fläche gezogene Curve; wir sagen demnach, dass (2) die Gleichung dieser Curve ist.

Die Zahl der krummlinigen Coordinatensysteme, die auf einer gegebenen Fläche:

(3) $$f(x, y, z) = 0$$

gewählt werden können, ist unendlich gross. Wir erhalten jedes derselben, wenn wir die Coordinaten eines beweglichen Punktes x, y, z durch zwei unabhängige Veränderliche α, β so ausdrücken, dass wir durch Elimination von α und β aus den drei diesbezüglichen Gleichungen:

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta)$$

wieder zur Flächengleichung (3) kommen. Sobald ferner ein krummliniges Coordinatensystem (u, v) auf der Fläche bereits fest bestimmt

ist, erhalten wir in der allgemeinsten Weise ein neues, (α, β), wenn wir u, v gleich zwei von einander unabhängigen Functionen von α, β:

$$u = u(\alpha, \beta), \quad v = v(\alpha, \beta)$$

setzen. Dabei ist zu bemerken, dass sich, wenn z. B. $u(\alpha, \beta)$ nur eine der neuen Veränderlichen, etwa nur α enthielte, die Parameterlinien u bei einer solchen Transformation nicht ändern würden, da α mit u constant wäre, und umgekehrt; nur der Parameter, welcher die einzelnen Curven innerhalb des Systems festlegt und der vorhin u war, würde in α übergehen.

Endlich bemerken wir, dass bezüglich der Functionen:

$$x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v),$$

welche die Cartesischen Coordinaten der Flächenpunkte geben, im Folgenden stets vorausgesetzt wird, dass sie in dem ganzen Aenderungsbereich für u, v endlich und stetig seien und auch endliche und stetige erste, zweite und dritte partielle Differentialquotienten nach u und v besitzen, ausgenommen höchstens in singulären Punkten oder längs isolierten singulären Curven.

Die krummlinigen Coordinaten, die wir auf diese Weise eingeführt haben, heissen auch Gaussische Coordinaten. Dieselben sind für das Studium der Eigenschaften der Flächen sehr vorteilhaft, da sie ihrer Natur nach mit der Fläche an sich, ohne Rücksicht auf die Lage der Fläche im Raume, innig verknüpft sind.

§ 33. Linienelement der Fläche.

Denken wir uns auf der Fläche eine beliebige Curve:

$$\text{(a)} \qquad \varphi(u, v) = 0$$

gezogen und bezeichnen wir ihr Bogenelement mit ds, so haben wir:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

worin für x, y, z die Werte (1) einzusetzen und in diesen u und v durch die Gleichung (a) zu verbinden sind. Alsdann haben wir:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Setzen wir nun mit Gauss:

$$(4) \qquad \begin{cases} E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \end{cases}$$

so erhalten wir:

(5) $$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

wo wegen der Gleichung (a) zwischen u und v die Differentiale du und dv durch die Relation:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,dv = 0$$

verbunden sind.

Da der durch die Gleichung (5) gegebene Ausdruck für ds für jede beliebige auf der Fläche liegende Curve gilt, so wird er als das Linienelement der Fläche bezeichnet.

Die quadratische Differentialform:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

die gleich dem Quadrat des Linienelements ist, heisst die erste quadratische Fundamentalform. Ihre Discriminante:

$$EG - F^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2,$$

die wir abgekürzt in der Form:

$$EG - F^2 = \begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{Vmatrix}^2$$

schreiben, ist positiv, d. h. die Form selbst ist definit.

Es leuchtet ein, dass ihre Coefficienten E, F, G, die durch die Gleichungen (4) gegeben sind, endliche und stetige Functionen von u, v sind und nach den getroffenen Voraussetzungen auch endliche und stetige erste und zweite partielle Differentialquotienten besitzen. Ferner sind E, G, sowie $EG - F^2$ stets positiv, und unter

$$\sqrt{E}, \quad \sqrt{G}, \quad \sqrt{EG - F^2}$$

werden wir im folgenden stets die positiven Werte der Wurzeln verstehen.

In jedem Punkte einer Parameterlinie u oder v unterscheiden wir die positive Richtung der Curve von der entgegengesetzten negativen und setzen als positive Richtung der Curven u diejenige fest, nach welcher der andere Parameter v wächst, ebenso als positive Richtung der Curven v diejenige, nach welcher der Parameter u zunimmt. Daraus folgt, dass, wenn ds_u, ds_v die positiven Bogenelemente der Curven u, v bedeuten, nach (5)

$$ds_u = \sqrt{G}\,dv, \quad ds_v = \sqrt{E}\,du$$

ist.

Bezeichnen

$$\begin{matrix} \cos(u,x), & \cos(u,y), & \cos(u,z) \\ \cos(v,x), & \cos(v,y), & \cos(v,z) \end{matrix}$$

die Cosinus der (positiven) Richtungen der Tangenten der Parameterlinien u, v, so haben wir demnach:

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \cos(u,x) = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial x}{\partial v}, & \cos(u,y) = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial y}{\partial v}, \quad \cos(u,z) = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial z}{\partial v}, \\ \cos(v,x) = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial x}{\partial u}, & \cos(v,y) = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos(v,z) = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial z}{\partial u}. \end{cases}$$

Für den zwischen 0 und π gelegenen Winkel ω, der in einem Punkte der Fläche von den positiven Richtungen der durch den Punkt gehenden Parameterlinien u, v gebildet wird, haben wir:

$$\cos\omega = \cos(u,x)\cos(v,x) + \cos(u,y)\cos(v,y) + \cos(u,z)\cos(v,z)$$

oder zufolge der obigen Gleichungen und (4):

$$\text{(6)} \qquad \cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}};$$

daraus folgt weiter:

$$\text{(6*)} \qquad \sin\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}},$$

wo die Wurzelwerte wie gewöhnlich positiv zu nehmen sind. Aus (6) folgt: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Parameterlinien auf einander senkrecht stehen, ist, dass in dem Ausdruck (5) für das Quadrat des Linienelements $F = 0$ ist.

Bemerkung. — Wir betrachten das von den vier Parameterlinien u, $u + du$, v, $v + dv$ auf der Fläche gebildete unendlich kleine Viereck; dasselbe kann bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als Parallelogramm angesehen werden. Da

$$\sqrt{E}\,du, \quad \sqrt{G}\,dv$$

die Längen seiner Seiten sind, während der von den beiden ersten Seiten u, v eingeschlossene Winkel ω durch (6*) gegeben ist, so ist sein Flächeninhalt gleich

$$\sqrt{EG - F^2}\,du\,dv,$$

woraus der Satz folgt: Das Flächenelement $d\sigma$ der Oberfläche ist durch den Ausdruck:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv$$

gegeben.

§ 34. **Winkel einer Flächencurve mit den Parameterlinien.**

Wir betrachten eine beliebige auf der Fläche gezogene Curve C, für welche die positive Richtung des Bogens s beliebig festgesetzt sein möge. Behufs der unzweideutigen Bestimmung der Winkel, welche die Curve C in jedem Punkte mit den Parameterlinien u, v bildet, denken wir uns in jedem Flächenpunkte P die Tangentialebene gelegt und definieren als die positive Seite dieser Ebene diejenige, auf welcher die Drehung der positiven Tangente der Curve v in die Lage der Tangente der Curve u um den oben angegebenen Winkel ω in positiver Drehungsrichtung, die für uns diejenige von rechts nach links sein möge, erfolgt*). Dieses vorausgeschickt, bezeichnen wir mit ϑ den zwischen 0 und 2π gelegenen Winkel, um den sich die positive Richtung der Tangente der Curve v in positivem Sinne in der Tangentialebene drehen muss, um mit der positiven Richtung der Tangente der Curve C zusammenzufallen.

Wenn ein beweglicher Punkt M längs C fortrückt, so können seine krummlinigen und seine Cartesischen Coordinaten $u, v; x, y, z$ als Functionen von s aufgefasst werden, und wenn wir mit

$$\cos(C, x), \quad \cos(C, y), \quad \cos(C, z)$$

die Richtungscosinus der Tangente der Curve C bezeichnen, so haben wir demnach:

$$(c) \quad \cos(C, x) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \quad \cos(C, y) = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$
$$\cos(C, z) = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

also:

$$\cos\vartheta = \cos(C,x)\cos(v,x) + \cos(C,y) + \cos(v,y) + \cos(C,z)\cos(v,z)$$

oder wegen der Gleichungen (b) des vorigen Paragraphen:

$$(7) \qquad \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right).$$

Nun besteht zufolge der Gleichung (5) die Identität:

$$\frac{1}{E}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)^2 + \frac{EG - F^2}{E}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1,$$

---

*) Hierbei halten wir an der schon § 7 (S. 12) bezüglich der Orientierung der Axen getroffenen Vereinbarung fest; wir setzen nämlich voraus, dass auf der positiven Seite der xy-Ebene die positive Richtung von OY links von derjenigen von OX liegt.

woraus folgt:

$$\sin\vartheta = \pm \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds}.$$

Die Zweideutigkeit des Vorzeichens wird dadurch beseitigt, dass $\sin\vartheta$ nach der von uns getroffenen Vereinbarung über das Messen von ϑ positiv ist, wenn v mit s wächst, negativ im entgegengesetzten Falle. Wir haben also:

$$(7^*) \qquad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds}.$$

Hieraus und aus (6) und (6*) des vorigen Paragraphen ergiebt sich auch:

$$(8) \qquad \sin(\omega - \vartheta) = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{G}} \frac{du}{ds}.$$

Wie aus der Gleichung:

$$(9) \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{EG-F^2}\, \frac{dv}{E\,du + F\,dv}$$

hervorgeht, hängt der Neigungswinkel einer auf der Fläche gezogenen Curve gegen die Parameterlinien nur von dem Verhältnis der Zunahmen du, dv der krummlinigen Coordinaten längs der Curve selbst ab.

Stehen die Parameterlinien auf einander senkrecht ($F = 0$), so gehen unsere Gleichungen in die einfacheren über:

$$(10) \qquad \cos\vartheta = \sqrt{E}\frac{du}{ds}, \quad \sin\vartheta = \sqrt{G}\frac{dv}{ds}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass auf der Fläche S von einem Punkte M der Curve C eine zweite, zu C orthogonale Curve C' ausgehe, und wollen die Bedingung für die Orthogonalität der beiden Curven aufzustellen suchen.

Im Punkte M sind die Richtungscosinus der Tangente an C durch die Gleichungen (c) gegeben. Wenn wir mit δs das Bogenelement von C', mit δu, δv die Zunahmen der krummlinigen Coordinaten längs C' bezeichnen, so haben wir analog:

$$\cos(C', x) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s}, \quad \cos(C', y) = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s},$$
$$\cos(C', z) = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s}.$$

Die Orthogonalitätsbedingung:

$$\cos(C, x)\cos(C', x) + \cos(C, y)\cos(C', y) + \cos(C, z)\cos(C', z) = 0$$

wird demnach:

$$(11) \qquad E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = 0.$$

Dieses ist also die Bedingung dafür, dass die Linienelemente,

die vom Punkte (u, v) der Fläche nach den beiden unendlich benachbarten Punkten $(u + du,\ v + dv)$, $(u + \delta u,\ v + \delta v)$ ausgehen, auf einander senkrecht stehen.

Mittels der Gleichung (11) können wir leicht folgende Aufgabe lösen: Gegeben ist eine Schar von ∞^1 Curven auf der Fläche; gesucht wird die Differentialgleichung ihrer orthogonalen Trajectorien. Es sei die Gleichung der gegebenen Curvenschar, nach der willkürlichen Constanten c aufgelöst:

$$\varphi(u, v) = c.$$

Sind δu, δv die Zunahmen der krummlinigen Coordinaten eines Punktes (u, v) längs der durch den Punkt gehenden Curve $\varphi = c$, so ist offenbar:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\delta v = 0$$

oder:

$$\delta u : \delta v = \frac{\partial \varphi}{\partial v} : -\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

und (11) giebt als gesuchte Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien die folgende:

$$(12) \qquad \left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) du + \left(F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) dv = 0.$$

Es ist jedoch hervorzuheben, dass wir, auch wenn die Curven der gegebenen Schar nicht direct bekannt, sondern nur durch eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$M du + N dv = 0$$

definiert sind, wegen der Proportion:

$$M : N = \frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien unmittelbar in der Form:

$$(13) \qquad (EN - FM)\,du + (FN - GM)\,dv = 0$$

angeben können.

§ 35. Christoffel'sche Symbole, Differentialparameter und Krümmungsmass.

In den im vorstehenden Paragraphen behandelten Fragen, sowie in allen denjenigen, die nur die sogenannte Geometrie auf der Fläche betreffen, treten ausschliesslich die Coefficienten E, F, G der ersten Fundamentalform auf. Es dürfte daher jetzt zweckmässig sein,

die expliciten Werte der Christoffel'schen Symbole, der Differentialparameter und des Krümmungsmasses für unsere Form:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

zu berechnen, in der jetzt $u = x_1$, $v = x_2$,

$$a_{11} = E, \quad a_{12} = F, \quad a_{22} = G$$

ist; wir haben dann nach dem 2. Kapitel (S. 37):

$$A_{11} = \frac{G}{EG - F^2}, \quad A_{12} = -\frac{F}{EG - F^2}, \quad A_{22} = \frac{E}{EG - F^2}.$$

Die Christoffel'schen Symbole erster und zweiter Art haben nun nach S. 43 die in nachstehender Tabelle zusammengefassten Werte:

$$\text{(A)}\left\{\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}1\,1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \quad \begin{bmatrix}1\,2\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \begin{bmatrix}2\,2\\1\end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\\
&\begin{bmatrix}1\,1\\2\end{bmatrix} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \begin{bmatrix}1\,2\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad \begin{bmatrix}2\,2\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v},\\
&\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial u} + F\frac{\partial E}{\partial v} - 2F\frac{\partial F}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} = \frac{-F\frac{\partial E}{\partial u} + 2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},\\
&\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = \frac{G\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)},\\
&\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} = \frac{-F\frac{\partial G}{\partial v} + 2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}, \quad \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} = \frac{E\frac{\partial G}{\partial v} + F\frac{\partial G}{\partial u} - 2F\frac{\partial F}{\partial v}}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}\right.$$

Für die beiden Differentialparameter einer willkürlichen Function φ und den gemischten Differentialparameter zweier willkürlichen Functionen φ, ψ ergeben sich nach S. 41, 47 bezüglich die Ausdrücke:

$$\text{(14)} \qquad \Delta_1\varphi = \frac{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2},$$

$$\text{(15)} \qquad \Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right]\right\},$$

$$\text{(16)} \qquad \nabla(\varphi, \psi) = \frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}}{EG - F^2}.$$

Für das Krümmungsmass unserer Fundamentalform (deren geometrische Bedeutung wir später als Krümmungsmass der Fläche erkennen werden), erhalten wir nach (III), § 29, S. 53, wenn wir für die

Symbole $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$, $\left\{ {12 \atop 2} \right\}$ die in der Tabelle (A) angegebenen Werte einsetzen, den Ausdruck:

$$(17) \quad K = \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial G}{\partial u} \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{2}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{E\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial E}{\partial u} \right] \right\}.$$

Treffen wir nun die besondere Annahme, dass die Parameterlinien auf einander senkrecht stehen, d. h. $F = 0$ sei, so wird der vorstehende Ausdruck für K:

$$(18) \quad K = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right\}.$$

Ist noch specieller ausser $F = 0$

$$E = G = \lambda$$

(was, wie wir bald sehen werden, für jede beliebige Fläche zu erreichen ist), so ergiebt sich für K der sehr einfache Ausdruck:

$$(19) \quad K = -\frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial v^2} \right).$$

§ 36. Einführung neuer krummliniger Coordinaten.

Mittels der Differentialparameter können wir die Aufgabe lösen, die Coefficienten der transformierten Form der Grundform:

$$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

zu berechnen, wenn statt der Veränderlichen u, v willkürliche neue, φ, ψ, eingeführt werden. Es sei nämlich

$$E_1 d\varphi^2 + 2F_1 d\varphi\, d\psi + G_1 d\psi^2$$

die transformierte Form. Zufolge der Fundamentaleigenschaft der Differentialparameter sind die für die Grundform berechneten Werte von

$$\Delta_1 \varphi, \quad \nabla(\varphi, \psi), \quad \Delta_1 \psi.$$

gleich den für die transformierte Form berechneten. Für letztere ergiebt sich aber aus (14) und (16):

$$\Delta_1 \varphi = \frac{G_1}{E_1 G_1 - F_1^2}, \quad \nabla(\varphi, \psi) = -\frac{F_1}{E_1 G_1 - F_1^2}, \quad \Delta_1 \psi = \frac{E_1}{E_1 G_1 - F_1^2};$$

daraus folgt:

$$\Delta_1 \varphi \Delta_1 \psi - \nabla^2(\varphi, \psi) = \frac{1}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

und es ist demnach:

$$(20)\quad \begin{cases} E_1 = \dfrac{\Delta_1\psi}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi,\psi)}, & F_1 = -\dfrac{\nabla(\varphi,\psi)}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi,\psi)}, \\ & G_1 = \dfrac{\Delta_1\varphi}{\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\psi,\varphi)}. \end{cases}$$

Wie man sieht, ist die Bedingung dafür, dass die neuen Parameterlinien:

$$\varphi = \text{Const.},\quad \psi = \text{Const.}$$

einander senkrecht schneiden, die Gleichung:

$$\nabla(\varphi,\psi) = 0,$$

wie sich in anderer Weise auch nach § 34 ergiebt.

Wir bemerken noch, dass der gemeinsame Nenner in den Gleichungen (20) identisch auf die Form:

$$\Delta_1\varphi\,\Delta_1\psi - \nabla^2(\varphi,\psi) = \frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}^2$$

gebracht werden kann.

Die Gleichungen (20) wenden wir nun zum Beweise der schon vorhin erwähnten wichtigen Eigenschaft an, dass (auf unendlich viele Weisen) eine solche Transformation der Veränderlichen vorgenommen werden kann, dass dabei $E_1 = G_1$ und $F_1 = 0$ wird.

Zu diesem Zwecke wählen wir für φ eine reelle Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta_2\varphi = 0,$$

d. h.:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = 0.$$

Der Ausdruck:

$$-\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\,du + \frac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,dv$$

ist alsdann das vollständige Differential einer Function, die wir mit ψ bezeichnen wollen, sodass also kommt:

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = -\dfrac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = \dfrac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben, nach den Differentialquotienten von φ aufgelöst:

$$(21^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial u} = \dfrac{E\dfrac{\partial \psi}{\partial v} - F\dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial v} = -\dfrac{G\dfrac{\partial \psi}{\partial u} - F\dfrac{\partial \psi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass die Function ψ, die bis auf eine additive Constante durch (21) bestimmt ist, wieder eine Lösung von:

$$\Delta_2 \psi = 0$$

ist. Wir nennen sie die zu φ conjugierte Lösung.

Es folgt ferner:

$$\nabla(\varphi, \psi) = 0, \quad \Delta_1 \varphi = \Delta_1 \psi,$$

und es nimmt demnach, wenn $\lambda = \dfrac{1}{\Delta_1 \varphi} = \dfrac{1}{\Delta_1 \psi}$ gesetzt wird, die transformierte Form wegen (20) die gewünschte Gestalt:

$$\lambda(d\varphi^2 + d\psi^2)$$

an.

§ 37. Isothermensysteme.

Das soeben erhaltene Resultat ist von solcher Wichtigkeit, dass es zweckmässig sein dürfte, dasselbe noch auf einem anderen Wege abzuleiten.

Wir zerlegen die quadratische Form:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$$

in ihre beiden conjugiert imaginären Linearfactoren:

$$ds^2 = \left\{\sqrt{E}du + (F + i\sqrt{EG - F^2})\frac{dv}{\sqrt{E}}\right\}\left\{\sqrt{E}du + (F - i\sqrt{EG - F^2})\frac{dv}{\sqrt{E}}\right\}.$$

Aus der Integralrechnung ist bekannt, dass es Multiplicatoren von

$$(\mathrm{a})\qquad \sqrt{E}du + (F + i\sqrt{EG - F^2})\frac{dv}{\sqrt{E}}$$

giebt; einer derselben sei $\mu + i\nu$. Dann haben wir, wenn wir mit $\varphi + i\psi$ die (complexe) Function bezeichnen, für welche der mit $\mu + i\nu$ multiplicierte Ausdruck (a) ein vollständiges Differential wird:

$$(\mu + i\nu)\left\{\sqrt{E}\,du + (F + i\sqrt{EG - F^2})\frac{dv}{\sqrt{E}}\right\} = d\varphi + i d\psi.$$

Demnach wird:

$$(\mu - i\nu)\left\{\sqrt{E}du + (F - i\sqrt{EG - F^2})\frac{dv}{\sqrt{E}}\right\} = d\varphi - i d\psi.$$

Wenn wir die beiden letzten Gleichungen mit einander multiplicieren und dabei $\lambda = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}$ setzen, so folgt:

$$ds^2 = \lambda(d\varphi^2 + d\psi^2). \tag{22}$$

Diese besonderen Orthogonalsysteme, in denen das Quadrat des Linienelementes der Fläche die charakteristische Form (22) annimmt, heissen Isothermensysteme. Ihre Bestimmung hängt, wie man sieht, von der Integration der Gleichung:

$$\sqrt{E}du + (F + i\sqrt{EG - F^2})\frac{dv}{\sqrt{E}} = 0$$

oder:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 = 0$$

ab. Die durch diese Gleichung bestimmten imaginären Curven auf der Fläche werden deshalb als Curven von der Länge Null (Minimalcurven) bezeichnet; sie sind durch die Eigenschaft charakterisiert, dass ihre Tangenten den imaginären Kugelkreis im Unendlichen schneiden.

Die Isothermensysteme (φ, ψ) besitzen eine charakteristische Eigenschaft. Um diese klarzulegen, beachten wir, dass das Viereck, das auf der Fläche von den beiden Curven φ, ψ und den unendlich benachbarten $\varphi + d\varphi$, $\psi + d\psi$ gebildet wird, bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als Rechteck angesehen werden kann. Wenn nun das System (φ, ψ) isotherm ist, wenn ferner φ, ψ um unendlich kleine constante Beträge $d\varphi$, $d\psi$ wachsen und ferner noch $d\varphi = d\psi$ genommen wird, so ergiebt sich nämlich sofort: Die Isothermensysteme teilen die Fläche in unendlich kleine Quadrate.

Endlich bemerken wir, indem wir zu den Gleichungen (21) zurückkehren, dass, wenn schon das ursprüngliche System (u, v) isotherm war, jene Gleichungen einfach in die folgenden übergehen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

Diese Gleichungen besagen bekanntlich, dass $\varphi + i\psi$ eine Function der complexen Veränderlichen $u + iv$ ist.

Da sich ferner bei der Verwandlung von ψ in $-\psi$ der für das Linienelement charakteristische Ausdruck (22) nicht ändert, so haben wir das Ergebnis:

Ist auf der Fläche ein Isothermensystem (φ, ψ) bekannt, so erhält man jedes andere Isothermensystem (φ', ψ'), wenn man

$$\varphi' + i\psi' = F(\varphi \pm i\psi)$$

setzt, wo F das Zeichen für eine willkürliche Function einer complexen Veränderlichen ist.

Wir fügen noch hinzu, dass jede complexe Function $\varphi + i\psi$, die aus zwei conjugierten Lösungen der Gleichung $\Delta_2\varphi = 0$ gebildet ist, als complexe Veränderliche auf der Fläche bezeichnet wird.

§ 38. Isometrische Parameter.

Wenn in einem Isothermensystem, für welches das Quadrat des Linienelementes der Fläche die Form:

$$ds^2 = \lambda(du_1^2 + dv_1^2)$$

annimmt, ohne dass die Parameterlinien geändert werden, an Stelle der sie bestimmenden Parameter neue:

$$u_1 = \varphi(u), \quad v_1 = \psi(v)$$

eingeführt werden, so geht das Quadrat des Linienelementes in die Form:

$$ds^2 = \lambda(\varphi'^2(u)du^2 + \psi'^2(v)dv^2)$$

über, wo der Quotient aus $E = \lambda\varphi'^2(u)$ und $G = \lambda\psi'^2(v)$ offenbar ein Quotient (oder ein Product) von zwei Functionen ist, von denen die eine nur von u, die andere nur von v abhängt. Ist umgekehrt in einem Orthogonalsystem (u, v), für das

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 \tag{23}$$

ist:

$$\frac{E}{G} = \frac{U}{V}, \tag{24}$$

wo U Function von u allein, V von v allein ist, so können wir auch

$$E = \lambda U, \quad G = \lambda V$$

setzen, woraus sich

$$ds^2 = \lambda(U du^2 + V dv^2)$$

ergiebt. Führen wir nun mittels der Gleichungen:

$$\int\sqrt{U}\,du = u_1, \quad \int\sqrt{V}\,dv = v_1$$

neue Parameter u_1, v_1 ein, so erhalten wir für ds^2 den Ausdruck:

$$ds^2 = \lambda(du_1^2 + dv_1^2).$$

Wenn also in dem Orthogonalsystem (u, v) die Bedingung (24) erfüllt ist, so ist dasselbe gleichfalls isotherm. Die Parameter u_1, v_1, mittels deren das Linienelement in die charakteristische Form, bei der $E = G$ ist, gebracht werden kann, heissen isometrische Parameter.

Nach diesen Bemerkungen können wir leicht die Bedingung dafür angeben, dass die Curven $\varphi =$ Const. zusammen mit den Orthogonaltrajectorien ein Isothermensystem bilden. Hierzu ist notwendig und

hinreichend, dass sich bei einer passenden Aenderung des Parameters, indem $\varphi_1 = F(\varphi)$ gesetzt wird:

$$\Delta_2 \varphi_1 = 0$$

ergiebt (wegen (12), § 34, S. 66).

Aber aus der Gleichung (15), § 35 (S. 67) folgt sofort:

$$\Delta_2[F(\varphi)] = F'(\varphi)\Delta_2\varphi + F''(\varphi)\Delta_1\varphi,$$

wo die Striche Differentiationen nach φ andeuten, und also muss

$$(25) \qquad \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} = -\frac{F''(\varphi)}{F'(\varphi)}$$

sein. Die rechte Seite ist eine Function von φ allein, folglich muss es auch die linke sein. Umgekehrt, ist $\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi}$ eine Function von φ allein, so kann $F(\varphi)$ nach der vorstehenden Gleichung so bestimmt werden, dass $\Delta_2 F(\varphi) = 0$ wird; d. h.:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Curven $\varphi =$ Const. zusammen mit ihren Orthogonaltrajectorien ein Isothermensystem bilden, ist, dass das Verhältnis der beiden Differentialparameter von φ eine Function von φ allein ist.

§ 39. **Satz von Lie über Isothermensysteme.**

Angenommen, die soeben aufgestellte Bedingung wäre erfüllt, d. h. es wären in einem doppelten orthogonalen Isothermensystem die Curven des einen der beiden Systeme

$$\varphi = \text{Const.}$$

bekannt, so lassen sich diejenigen des anderen mittels Quadraturen finden. In der That geben die Gleichungen (21), § 36 (S. 69), wenn φ durch $F(\varphi)$ ersetzt wird, die Differentialquotienten von ψ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = -F'(\varphi)\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = \quad F'(\varphi)\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}},$$

während aus (25)

$$F'(\varphi) = e^{-\int\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi}d\varphi}$$

folgt.

Dieses Ergebnis können wir folgendermassen aussprechen: Wenn die Curven $\varphi =$ Const. einem Isothermensystem angehören

und die Differentialgleichung der Orthogonaltrajectorien dieser Curven in der Form (S. 66):

$$\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\,du-\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\,dv=0$$

geschrieben wird, so hat man für dieselbe in dem Ausdruck:

$$\mu=e^{-\int\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi}d\varphi}$$

unmittelbar einen Multiplicator.

Mit Lie können wir diese Untersuchungen noch weiter führen und beweisen, dass, wenn für die Curven eines Isothermensystems nur eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$Mdu+Ndv=0$$

bekannt ist, deren Integrale die Curven der einen Schar sind, ihre Gleichung in endlicher Gestalt mittels Quadraturen gefunden werden kann.

Es folgt nämlich aus den Gleichungen (21), § 36 (S. 69), dass es unter dieser Voraussetzung einen Multiplicator λ von $Mdu+Ndv$ giebt, der zugleich Multiplicator von

$$\frac{EN-FM}{\sqrt{EG-F^2}}\,du+\frac{FN-GM}{\sqrt{EG-F^2}}\,dv$$

ist.

Setzen wir für den Augenblick:

$$M_1=\frac{EN-FM}{\sqrt{EG-F^2}},\quad N_1=\frac{FN-GM}{\sqrt{EG-F^2}},$$

so haben wir demnach die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial(\lambda M)}{\partial v}=\frac{\partial(\lambda N)}{\partial u},$$
$$\frac{\partial(\lambda M_1)}{\partial v}=\frac{\partial(\lambda N_1)}{\partial u}.$$

Aus ihnen folgt:

$$(26)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\log\lambda}{\partial u}=\dfrac{M_1\left(\dfrac{\partial N}{\partial u}-\dfrac{\partial M}{\partial v}\right)-M\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial u}-\dfrac{\partial M_1}{\partial v}\right)}{MN_1-M_1N},\\[2ex] \dfrac{\partial\log\lambda}{\partial v}=\dfrac{N_1\left(\dfrac{\partial N}{\partial u}-\dfrac{\partial M}{\partial v}\right)-N\left(\dfrac{\partial N_1}{\partial u}-\dfrac{\partial M_1}{\partial v}\right)}{MN_1-M_1N}.\end{cases}$$

Es ergiebt sich demnach λ mittels Quadraturen*).

*) Es sei bemerkt, dass $-MN_1+NM_1=EN^2-2FMN+GM^2$ wegen $EG-F^2>0$ nicht gleich Null sein kann.

Es ist auch ersichtlich, dass man hier gleichzeitig ein Mittel hat, aus der Differentialgleichung $M du + N dv = 0$ zu entscheiden, ob ihre Integralcurven einem Isothermensystem angehören. Zufolge der Gleichungen (26) ist dazu notwendig und hinreichend, dass der Ausdruck:

$$\frac{M_1\left(\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}\right) - M\left(\frac{\partial N_1}{\partial u} - \frac{\partial M_1}{\partial v}\right)}{MN_1 - M_1 N} du + \\ + \frac{N_1\left(\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}\right) - N\left(\frac{\partial N_1}{\partial u} - \frac{\partial M_1}{\partial v}\right)}{MN_1 - M_1 N} dv$$

ein vollständiges Differential ist.

§ 40. Conforme Abbildung einer Fläche auf die Ebene oder auf eine andere Fläche.

Auf einer Fläche denken wir uns ein auf die isometrischen Parameter u, v bezogenes Isothermensystem gegeben, für welches also das Quadrat des Linienelementes die Form:

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

annimmt, und deuten u, v als die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten ξ, η eines Punktes in einer Hilfsebene (Bildebene), indem wir $\xi = u$, $\eta = v$ setzen.

Auf diese Weise ordnen wir jedem Punkte $P(u, v)$ der Fläche oder des Flächengebiets, auf das sich unsere Untersuchungen erstrecken, denjenigen Punkt $P'(\xi, \eta)$ der Bildebene zu, dessen Cartesische Coordinaten den krummlinigen Coordinaten von P gleich sind; wir haben somit eine Abbildung unserer Fläche auf die Ebene. Wir wollen nun nachweisen, dass bei dieser Abbildung die Winkel erhalten bleiben (Winkeltreue stattfindet), d. h. dass der Winkel, unter dem sich zwei beliebige Curven auf der Fläche schneiden, gleich demjenigen ist, den die beiden Bildcurven in der Ebene bilden.

Um dieses einzusehen, brauchen wir uns nur an die Fundamentalformeln des § 34, speciell an die Gleichung (10) (S. 65) zu erinnern, die in unserem Falle die Form:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dv}{du}$$

annimmt und erkennen lässt, dass jede auf der Fläche gezogene Curve die Curven $v =$ Const. unter denselben Winkeln schneidet, wie ihre Bildcurve in der Ebene die Geraden $\eta =$ Const.

Wenn wir allgemein eine Zuordnung zwischen den Punkten P, P' zweier Flächen (oder Flächengebiete) S, S' festsetzen, derart, dass jedem Punkte P der einen Fläche S ein Punkt P' der anderen Fläche S'

entspricht und dass, wenn sich P stetig auf S bewegt, der Bildpunkt P' sich stetig auf S' bewegt, so sagen wir, dass die eine Fläche auf die andere abgebildet ist.

Ist die Abbildung eine solche, dass die Winkel erhalten bleiben, so heisst sie conform oder winkeltreu. Bisweilen wird diese Thatsache auch in der Weise ausgedrückt, dass man sagt, es herrsche bei dieser Abbildung Aehnlichkeit in den kleinsten Teilen, was offenbar der Winkeltreue genau entspricht.

Gemäss dem zu Beginn dieses Paragraphen erhaltenen Ergebnis ist es klar, dass man behufs Lösung der allgemeinen Aufgabe, eine Fläche S auf eine andere S' conform abzubilden, nur beide Flächen auf eine Ebene conform abzubilden und dann die allgemeinste conforme Abbildung einer Ebene auf eine andere zu bestimmen braucht.

§ 41. Allgemeine Lösung des Problems der conformen Abbildung.

Bei der Lösung der zuletzt gestellten Aufgabe ist der Fall, in dem die entsprechenden Winkel einander gleich und von gleichem Drehsinn sind, von demjenigen zu unterscheiden, in dem sie zwar auch einander gleich sind, aber entgegengesetzten Drehsinn haben*). Wir wählen in den beiden Ebenen π, π' zwei rechtwinklige Cartesische Axensysteme OX, OY; OX', OY', und es seien x, y die Coordinaten eines Punktes P von π, ferner x', y' diejenigen des entsprechenden Punktes P' von π'. Dann wird unsere Abbildung analytisch durch zwei Gleichungen:

$$x' = x'(x, y), \qquad y' = y'(x, y)$$

dargestellt, und wir müssen nun die Bedingungen suchen, die den Functionen x', y' von x, y (die wir, ebenso wie ihre partiellen Differentialquotienten, in dem abzubildenden Gebiet als endlich und stetig voraussetzen) auferlegt werden müssen, damit die Abbildung conform werde.

Betrachten wir eine Curve in π, die von P in beliebiger Richtung ausgeht, so haben wir für die im positiven Drehungssinne gemessene Neigung ϑ ihrer Tangente gegen die x-Axe die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx} \tag{27}$$

und bei der Bildcurve C' entsprechend:

*) Hierbei setzen wir voraus, dass bei beiden Ebenen die positiven Seiten gemeint und die Coordinatenaxen in gleicher Weise orientiert sind.

$$(27^*) \qquad \operatorname{tg}\vartheta' = \frac{dy'}{dx'} = \frac{\frac{\partial y'}{\partial x}dx + \frac{\partial y'}{\partial y}dy}{\frac{\partial x'}{\partial x}dx + \frac{\partial x'}{\partial y}dy}.$$

Ist für eine zweite von P ausgehende Curve C_1 der Wert von ϑ gleich ϑ_1 und der entsprechende von ϑ' gleich ϑ_1', so muss im Falle der directen Winkeltreue

$$\vartheta_1 - \vartheta = \vartheta_1' - \vartheta',$$

dagegen bei der inversen Winkeltreue

$$\vartheta_1 - \vartheta = \vartheta' - \vartheta_1'$$

sein. Daraus folgt im ersten Falle:

$$\vartheta' = \vartheta + \alpha,$$

im zweiten:

$$\vartheta' = -\vartheta + \alpha,$$

wobei α nur vom Punkte P abhängt und für alle durch den Bruch $\frac{dy}{dx}$ bestimmten Richtungen constant ist.

Setzen wir zur Abkürzung $\operatorname{tg}\alpha = m$, so haben wir:

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{m \pm \operatorname{tg}\vartheta}{1 \mp m \operatorname{tg}\vartheta},$$

wo die oberen Vorzeichen im ersten, die unteren im zweiten Falle gelten. Zufolge (27) und (27*) ergiebt sich hieraus die Gleichung:

$$\frac{\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial x'}{\partial y}\frac{dy}{dx}} = \frac{m \pm \frac{dy}{dx}}{1 \mp m\frac{dy}{dx}},$$

die also für alle Werte von $\frac{dy}{dx}$ gelten soll. Daraus folgen die Beziehungen:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \pm\frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = \mp\frac{\partial y'}{\partial x},$$

die $x' + iy'$ als Function der complexen Veränderlichen $x \pm iy$ charakterisieren. Wir schliessen daraus: **Die allgemeinste conforme Abbildung einer Ebene auf eine andere ergiebt sich, wenn die complexe Veränderliche der einen gleich einer (willkürlichen) Function der complexen Veränderlichen der andern oder der zu dieser conjugierten Veränderlichen gesetzt wird. Im ersten Falle findet directe Winkeltreue statt, im zweiten sind entsprechende Winkel ebenfalls einander gleich, aber entgegengesetzt gedreht.**

Wenn wir uns nun an das Ergebnis zum Schluss des vorigen Paragraphen erinnern, so folgern wir hieraus allgemeiner: Die allgemeinste conforme Abbildung einer Fläche auf eine andere ergiebt sich, wenn die complexe Veränderliche auf der einen gleich einer Function der complexen Veränderlichen auf der anderen (oder der conjugierten Veränderlichen) gesetzt wird.

§ 42. Isothermensysteme auf den Rotationsflächen.

Die in den vorstehenden Paragraphen enthaltenen allgemeinen Ergebnisse wollen wir auf eine Klasse von Flächen anwenden, für die wir die Isothermensysteme unmittelbar bestimmen können, auf die Rotationsflächen. Als Parameterlinien wählen wir auf einer solchen Fläche die Meridiane und Parallelkreise. Zum Parameter eines veränderlichen Meridians nehmen wir den Winkel ω, den seine Ebene mit derjenigen eines festen Meridians bildet (Länge), und zum Parameter des Parallelkreises seinen Radius r, sodass also der Fall des (geraden Kreis-)Cylinders einstweilen ausgeschlossen ist. Wählen wir als z-Axe die Rotationsaxe und als festen Meridian, von dem aus die Länge ω gerechnet wird, denjenigen in der xz-Ebene, so sind die Coordinaten eines Punktes der Fläche durch die Gleichungen:

(28) $$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega, \quad z = \varphi(r)$$

gegeben, wobei $z = \varphi(r)$ die Gleichung der Meridiancurve ist. Für das Linienelement ds der Fläche, ausgedrückt durch die Coordinaten r, ω, erhalten wir demnach die Gleichung:

$$ds^2 = (1 + \varphi'^2(r))dr^2 + r^2 d\omega^2.$$

Führen wir statt r den von einem festen Punkte gerechneten Meridianbogen u als Parameter ein, indem wir

$$u = \int \sqrt{1 + \varphi'^2(r)}\, dr$$

setzen, so haben wir:

$$r = \psi(u),$$

wo die Natur der Function ψ durch die Gestalt der Meridiancurve bestimmt wird, und es ist:

(29) $$ds^2 = du^2 + r^2 d\omega^2.$$

Diese Gleichung gilt auch für den Fall des Cylinders, in welchem

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega, \quad z = u, \quad r = \text{Const.}$$

ist. Da nun r in der Gleichung (29) eine Function von u allein ist, so folgt hiernach nach § 38 (S. 72):

Auf jeder Rotationsfläche bilden die Meridiane und die Parallelkreise ein Isothermensystem.

Schreiben wir ferner (29) in der Form:

$$ds^2 = r^2\left(\frac{du^2}{r^2} + d\omega^2\right),$$

so sehen wir, dass ω und $u_1 = \int\frac{du}{r}$ isometrische Parameter sind.

Für jede Rotationsfläche können wir demnach die Aufgabe, sie auf die Ebene conform abzubilden, lösen. Setzen wir insbesondere:

$$\xi = \omega, \quad \eta = \int\frac{du}{r},$$

und betrachten wir ξ, η als die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten eines Punktes der Bildebene, so haben wir eine conforme Abbildung, bei der die Meridiane und die Parallelkreise zu Bildern die zur η- bez. ξ-Axe parallelen Geraden haben*).

§ 43. Stereographische Polarprojection der Kugel.

Wir betrachten die Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

deren Radius wir der Einfachheit halber gleich der Längeneinheit gesetzt haben. Sie kann als Rotationsfläche mit der z-Axe als Drehaxe aufgefasst werden, und es sind dann die Coordinaten eines Punktes derselben:

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u,$$

wo v die Länge und u die Winkeldistanz des Punktes vom Pol $u = 0$, d. h. das Complement der Breite ist; für das Quadrat des Linienelementes erhalten wir ferner den Ausdruck:

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2.$$

Da nun:

$$u_1 = \int\frac{du}{\sin u} = \log \operatorname{tg}\frac{u}{2}$$

und v isometrische Parameter sind, können wir als complexe Veränderliche auf der Kugel $\tau = e^{-u_1 + iv}$, d. h.

*) Es sei erwähnt, dass bei dieser Abbildung die Loxodromen, d. h. diejenigen Curven auf der Fläche, welche die Meridiane unter constantem Winkel schneiden, die Geraden der Bildebene zu Bildern haben. Daraus folgt z. B. der Satz: In jedem auf einer Rotationsfläche von drei Loxodromenbogen gebildeten Dreieck ist die Winkelsumme gleich zwei Rechten.

(30) $$\tau = \operatorname{cotg}\frac{u}{2}\, e^{iv}$$

wählen. Als complexe Veränderliche ζ in der Ebene des Aequators können wir

$$\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$$

wählen, wo ϱ, ϑ Polarcoordinaten sind. Wenn wir dann $\tau = \zeta$, d. h.

(31) $$\varrho = \operatorname{cotg}\frac{u}{2}, \quad \vartheta = v$$

setzen, so haben wir eine conforme Abbildung der Kugel auf die Aequatorebene. Dieselbe ergiebt sich geometrisch wie folgt: Vom Pol $u = 0$ werde der Kugelpunkt $M(u, v)$ auf die Aequatorebene nach m projiciert, dann ist dieser Punkt m gerade der durch die Gleichungen (31) bestimmte Bildpunkt. Diese Abbildung der Kugel auf die Ebene wird deshalb als **stereographische Polarprojection** bezeichnet.

Ausser der Eigenschaft der Winkeltreue besitzt diese Abbildung noch die andere sehr wichtige Eigenschaft, dass jeder Kreis auf der Kugel als Bild in der Ebene einen Kreis hat und umgekehrt, wie sich mittels elementargeometrischer Betrachtungen beweisen lässt*).

Unmittelbar folgt dieses aus den Abbildungsgleichungen (31), wenn man beachtet, dass die Gleichung eines Kreises auf der Kugel die Form hat:

$$a \sin u \cos v + b \sin u \sin v + c \cos u + d = 0,$$

wo a, b, c, d Constanten sind, und dass das Bild des Kreises in der Ebene wegen (31) in Polarcoordinaten die Gleichung:

$$2a\varrho \cos\vartheta + 2b\varrho \sin\vartheta + c(\varrho^2 - 1) + d(\varrho^2 + 1) = 0$$

hat, also ein Kreis (oder eine Gerade) ist. Die Umkehrung ist ebenfalls einleuchtend.

§ 44. Doppelte Orthogonalsysteme von Kreisen auf der Kugel und in der Ebene.

Mit Hilfe der stereographischen Abbildung der Kugel können wir leicht die Aufgabe lösen: **Alle möglichen doppelten Orthogonal-**

---

*) In sehr einfacher Weise folgendermassen: Zunächst lässt sich, wenn M, M' zwei Punkte auf der Kugel, m, m' die beiden Bildpunkte in der Ebene des Aequators sind, um das Viereck $MM'm'm$ ein Kreis legen. Wir nehmen nun an, M beschreibe einen Kreis C auf der Kugel, und M' sei eine specielle Lage von M, m' der entsprechende Bildpunkt. Die Kugel, welche durch C und m' geht, enthält nach dem vorhin Gesagten den Kreis $MM'm'm$ (denn derselbe hat mit der Kugel drei Punkte gemeinsam), und deshalb ist der Ort des Bildpunktes m der Schnittkreis c dieser Kugel mit der Ebene des Aequators.

systeme von Kreisen (oder Geraden) in der Ebene zu bestimmen.

Ein solches System muss, auf die Kugel projiciert, ein doppeltes orthogonales System von Kreisen (C), (C') geben. Nun ist sofort klar, dass die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich zwei Kreise auf der Kugel rechtwinklig schneiden, ist, dass die Ebene des einen durch den Pol der Ebene des andern geht. Da hiernach für die Kreise des Systems (C) die Pole ihrer Ebenen in der Ebene jedes Kreises von (C') liegen müssen, so ist ihr Ort eine Gerade g', durch welche alle Ebenen des zweiten Systems hindurchgehen. Analog gehen die Ebenen aller Kreise des Systems (C) durch eine Gerade g, die offenbar reciproke Polare von g' bezüglich der Kugel ist.

Daraus schliessen wir, dass die allgemeinste Weise, ein doppeltes Orthogonalsystem von Kreisen auf der Kugel zu construieren, die ist, dass wir die Kugel durch zwei Ebenenbüschel schneiden, deren Axen reciproke Polaren bezüglich der Kugel sind.

Setzen wir zunächst voraus, dass die Gerade g nicht Tangente der Kugel ist, so schneidet entweder sie oder ihre reciproke Polare g' die Kugel in zwei getrennten reellen Punkten, die allen Kreisen des bezüglichen Systems gemeinsam sind. Durch stereographische Projection auf die Ebene erhalten wir:

A) Zwei orthogonale Kreisbüschel, von denen das eine reelle, das andere imaginäre Scheitelpunkte besitzt.

Ist insbesondere g die Polaraxe der Kugel, so geht das System (A) in die Geraden eines Büschels und in das System der concentrischen Kreise über, deren Mittelpunkt der Scheitel des Büschels ist.

Ist g Tangente der Kugel, so berührt g' die Kugel in demselben Punkte und steht auf g senkrecht, und durch stereographische Projection erhalten wir in der Ebene:

B) Zwei Kreissysteme, die zwei auf einander senkrecht stehende Gerade in demselben Punkte (ihrem Schnittpunkte) berühren.

Ist insbesondere der Berührungspunkt von g und g' mit der Kugel das Projectionscentrum, so haben wir in der Ebene als Grenzfall ein doppeltes orthogonales Geradensystem.

§ 45. Darstellung der Bewegungen der complexen Kugelfläche in sich mittels linearer Substitutionen nach Cayley.

Wir denken uns nun die Kugel um ihren Mittelpunkt in sich gedreht. Indem wir jeden Punkt der Kugel durch den Wert bezeichnen,

den die complexe Veränderliche τ in ihm annimmt*), sei τ' derjenige Punkt, in den τ nach der Bewegung übergegangen ist. Da zwei von den entsprechenden Punkten τ, τ' beschriebene Figuren congruent, mithin auch conform sind, so wird τ' eine Function der complexen Veränderlichen τ sein, und wir behaupten nun, dass τ' eine linear gebrochene Function von τ:

(32) $$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}$$

ist.

Nach den Fundamentalsätzen über Functionen einer complexen Veränderlichen erhellt dieses sofort daraus, dass τ' für jeden Wert von τ nur einen Wert hat und umgekehrt. Elementarer beweisen wir dieses, wenn wir beachten, dass sowohl auf der Kugel als auch in der Bildebene jedem Kreise, den τ beschreibt, ein von τ' beschriebener Kreis entspricht. Nun sind diejenigen conformen Abbildungen der Ebene auf sich selbst, welche Kreise wieder in Kreise überführen, notwendig durch lineare Substitutionen gegeben**).

*) Dieses ist offenbar gestattet, da zwischen den Werten der complexen Veränderlichen τ und den Kugelpunkten eine eindeutige Beziehung besteht, einschliesslich des Wertes $\tau = \infty$, der dem Projectionscentrum entspricht.

**) Dass eine lineare Substitution:

(1) $$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

die von z' beschriebenen Kreise in solche von z beschriebene überführt (und umgekehrt), lässt sich folgendermassen beweisen:

Bezeichnen wir (mit Hermite) mit a_0 die zu einer willkürlichen Grösse a conjugierte Grösse, so lautet die Gleichung eines von z' beschriebenen reellen Kreises in der allgemeinsten Gestalt:

$$Az'z_0' + Bz' + B_0 z_0' + C = 0,$$

wo A und C reelle Constanten sind. Die entsprechende von z beschriebene Curve hat wegen (1) die Gleichung:

$$A(\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0) + B(\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) + B_0(\alpha_0 z_0 + \beta_0)(\gamma z + \delta) + C(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) = 0$$

und ist folglich wieder ein Kreis.

Wir bemerken ferner, dass, wenn z_1 ein beliebiger fester Punkt der Ebene ist, die lineare Substitution:

$$z' = \frac{c}{z - z_1} \quad (c = \text{Const.})$$

die Kreise, die in dem festen Punkte z_1 eine bestimmte Richtung berühren, in parallele Gerade überführt, die durch passende Wahl von c einer der Coordinatenaxen parallel gemacht werden können. Nach dieser Vorbemerkung stelle nun:

$$z'' = f(z)$$

eine conforme Abbildung der Ebene auf sich selbst dar, die die Kreise wieder in Kreise überführt. Die Parallelen zu den Coordinatenaxen in der z''-Ebene gehen

Die Determinante der linearen Substitution (32), $\alpha\delta - \beta\gamma$, muss von Null verschieden sein und kann unbeschadet der Allgemeinheit gleich Eins gesetzt werden, so dass also

(33) $$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

ist. Wir wollen nun untersuchen, welche besonderen Beziehungen zwischen den Coefficienten α, β, γ, δ bestehen müssen, damit die Gleichung (32) bloss eine Bewegung der Kugel in sich darstellt. Zu diesem Zweck drücken wir das Quadrat des Linienelements der Kugel:

$$ds^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2$$

durch die complexe Veränderliche τ und ihre Conjugierte τ_0 aus. Da

$$\tau = \operatorname{cotg}\frac{u}{2}\, e^{iv}, \quad \tau_0 = \operatorname{cotg}\frac{u}{2}\, e^{-iv}$$

ist, so erhalten wir sofort:

$$ds^2 = \frac{4\, d\tau\, d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2}.$$

Damit (32) eine Bewegung darstellt, ist demnach notwendig und hinreichend, dass sich

$$\frac{d\tau'\, d\tau_0'}{(\tau'\tau_0' + 1)^2} = \frac{d\tau\, d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2}$$

ergiebt oder auch, da wegen (32) und (33)

$$d\tau' = \frac{d\tau}{(\gamma\tau + \delta)^2}, \quad d\tau_0' = \frac{d\tau_0}{(\gamma_0\tau_0 + \delta_0)^2}$$

ist, dass

$$(\alpha\tau + \beta)(\alpha_0\tau_0 + \beta_0) + (\gamma\tau + \delta)(\gamma_0\tau_0 + \delta_0) = \tau\tau_0 + 1$$

ist.

Diese Gleichung muss für jeden Wert von τ bestehen und giebt daher:

$$\alpha\alpha_0 + \gamma\gamma_0 = 1, \qquad \alpha\beta_0 + \gamma\delta_0 = 0,$$
$$\beta\alpha_0 + \delta\gamma_0 = 0, \qquad \beta\beta_0 + \delta\delta_0 = 1.$$

---

in der z-Ebene in ein System von Kreisen über, die zwei auf einander senkrecht stehende Gerade in ihrem Schnittpunkt berühren. Diese gehen wieder mittels einer passenden linearen Substitution: $z' = \frac{c}{z - z_1}$ in Parallele zu den Coordinatenaxen in der z'-Ebene über.

Wird $z'' = x'' + iy''$, $z' = x' + iy'$ gesetzt, so muss also x'' eine Function von x' oder y' allein und entsprechend y'' eine Function von y' oder x' allein sein, und die Beziehung zwischen z'' und z' ist offenbar:

$$z'' = \alpha z',$$

wo α constant (reell oder rein imaginär) ist.

Es ist demnach z'' mit z linear verknüpft, was zu beweisen war.

Wegen (33) reducieren sich diese Beziehungen auf die notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$\delta = \alpha_0, \quad \gamma = -\beta_0,$$

d. h.: δ ist conjugiert zu α, und γ ist, abgesehen vom Vorzeichen, conjugiert zu β. Daraus schliessen wir:

Die allgemeinste Bewegung der complexen Kugelfläche in sich wird durch die Vornahme einer linearen Substitution mit der complexen Veränderlichen τ:

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{-\beta_0\tau + \alpha_0}, \quad (\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 = 1) \tag{34}$$

dargestellt.

Diese Gleichung rührt von Cayley her.

Bei jeder solchen Bewegung (34) der Kugel in sich bleiben die beiden Punkte, welche den Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$\beta_0\tau^2 + (\alpha - \alpha_0)\tau + \beta = 0$$

entsprechen, fest. Sie liegen offenbar einander diametral gegenüber, und die Bewegung besteht mithin bloss in einer Drehung um den sie verbindenden Durchmesser. Für den Winkel Θ dieser Drehung ergiebt sich leicht die Gleichung:

$$\cos\frac{\Theta}{2} = \frac{\alpha + \alpha_0}{2} \text{ *)}. \tag{35}$$

*) Die Gleichung (35) ist im Falle $\beta = \beta_0 = 0$ unmittelbar evident. Bezeichnen wir nun mit S eine beliebige Substitution (34), mit T eine Substitution (34), welche die beiden bei S festen Punkte in die Pole $\tau = 0$, $\tau = \infty$ verlegt, so ist die Substitution:

$$TST^{-1},$$

die aus S vermöge der Substitution T hervorgeht, eine Drehung von derselben Amplitude wie S um die Polaraxe. Dabei ist in S und TST^{-1} die Summe des ersten und vierten Coefficienten dieselbe, wie die wirkliche Ausrechnung sofort ergiebt, sodass damit Formel (35) bewiesen ist.

Kapitel IV.

Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.

Die beiden quadratischen Fundamentalformen: $\begin{cases} E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2, \\ D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2. \end{cases}$ — Gleichungen, welche die zweiten Ableitungen von x, y, z und die ersten Ableitungen von X, Y, Z geben. — Formeln von Gauss und Mainardi-Codazzi zwischen den Coefficienten E, F, G, D, D', D'' der beiden Fundamentalformen. — Existenz und Eindeutigkeit der Fläche, die zwei solchen gegebenen Fundamentalformen entspricht, welche den Gleichungen von Gauss und Codazzi genügen. — Krümmungslinien. — Radien der ersten Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Curven. — Meusnier'scher Satz. — Euler'sche Formel. — Dupin'sche Indicatrix. — Totale und mittlere Krümmung. — Conjugierte Systeme. — Haupttangentencurven (Asymptotenlinien). — Berechnung der Differentialparameter.

§ 46. Die beiden quadratischen Fundamentalformen der Fläche.

Bei den im vorigen Kapitel angestellten Untersuchungen über gewisse Eigenschaften der Flächen haben wir nur eine einzige Differentialform auftreten sehen, diejenige nämlich, welche das Quadrat des Linienelementes der Fläche darstellt:

$$f = ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2,$$

d. h. die erste Fundamentalform. Werden jedoch diejenigen Eigenschaften untersucht, die der wirklichen Gestalt zukommen, welche die Fläche im Raume hat, so tritt neben der ersten noch eine zweite quadratische Differentialform auf, und wie wir sofort sehen werden, kömmt die Flächentheorie, von unserm Gesichtspunkte aus betrachtet, im wesentlichen auf das Studium zweier simultaner quadratischer Differentialformen hinaus.

Behufs Einführung der erwähnten zweiten Differentialform bestimmen wir zunächst die Cosinus der positiven Richtung der Flächennormale; dieselben werden wir stets mit

$$X,\ Y,\ Z$$

bezeichnen.

Wie in § 34 setzen wir fest, dass die positive Seite der Tangentialebene diejenige sein soll, auf der die positive Richtung der Tangente der Curve u links von derjenigen der Tangente der Curve v liegt*).

Die positive Richtung der Normale ist diejenige, welcher die positive Seite der Tangentialebene zugewandt ist. Nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie haben wir dann wegen (b), S. 63:

$$X = \frac{1}{\sin\omega}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\sin\omega}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$Z = \frac{1}{\sin\omega}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

wo ω der in § 33 definierte Winkel der Parameterlinien ist. Aus der Gleichung (6*) desselben Paragraphen (S. 63) folgt dann:

$$(1) \qquad X = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad Y = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Die zweite Differentialform, die wir einführen, ist:

$$\varphi = -(dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ),$$

wofür wir uns stets der Bezeichnung:

$$(2) \qquad \varphi = -\Sigma dx\,dX^{**}) = D du^2 + 2D' du\,dv + D'' dv^2$$

bedienen werden.

Wir geben anschliessend hieran die verschiedenen Formen an, auf die man die Coefficienten D, D', D'' von φ bringen kann. Aus den Identitäten:

$$\sum X\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum X\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

*) Wir halten immer daran fest, dass auf der positiven Seite der xy-Ebene die positive Richtung von OY links von derjenigen von OX liegt.

**) Das Summenzeichen Σ bezeichnet hier und im folgenden eine Summe dreier Glieder, von denen das zweite und dritte aus dem ersten dadurch abgeleitet werden, dass x, X bezüglich durch y, Y; z, Z ersetzt werden.

folgen durch Differentiation nach u und v die weiteren:

$$\begin{cases} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, \\ \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = -\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \\ \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

Wir haben demnach:

$$(3) \qquad \begin{cases} D = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = -\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}, \\ D' = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = -\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \\ D'' = \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}. \end{cases}$$

Zufolge der Gleichungen (1) können wir D, D', D'' auch in Determinantenform schreiben:

$$(3^*) \quad D = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad D' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Die beiden quadratischen Differentialformen:

$$f = \Sigma dx^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2,$$
$$\varphi = -\Sigma dx dX = D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2$$

heissen die erste und die zweite Fundamentalform der Fläche.

Es ist klar, dass dieselben bei einer beliebigen Transformation der Parameter u, v in die neuen Fundamentalformen übergehen.

§ 47. Formeln für die zweiten Ableitungen von x, y, z und für die ersten Ableitungen von X, Y, Z.

In diesem Paragraphen wollen wir die grundlegenden Gleichungen unserer Theorie aufstellen. Hierzu schicken wir die folgende

Bemerkung voraus: Sind A, B, C drei beliebige Functionen von u, v, so können wir, da die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & X \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & Y \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial z} & Z \end{vmatrix} = \sqrt{EG - F^2}$$

nicht gleich Null ist, drei unbekannte Coefficienten α, β, γ so bestimmen, dass die Gleichungen gelten:

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} A = \alpha \frac{\partial x}{\partial u} + \beta \frac{\partial x}{\partial v} + \gamma X, \\ B = \alpha \frac{\partial y}{\partial u} + \beta \frac{\partial y}{\partial v} + \gamma Y, \\ C = \alpha \frac{\partial z}{\partial u} + \beta \frac{\partial z}{\partial v} + \gamma Z. \end{cases}$$

Nach dieser Vorbemerkung bedienen wir uns für den Augenblick wieder der Bezeichnung mittels Indices und setzen:

$$u = u_1, \qquad v = u_2,$$
$$E = a_{11}, \quad F = a_{12}, \quad G = a_{22},$$
$$D = b_{11}, \quad D' = b_{12}, \quad D'' = b_{22}.$$

Da nach (4), S. 61:

$$a_{rs} = \sum \frac{\partial x}{\partial u_r} \frac{\partial x}{\partial u_s}$$

ist, so folgt daraus nach (17), S. 43:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u_t} \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s} = \begin{bmatrix} rs \\ t \end{bmatrix}.$$

Wenn wir in den Gleichungen (a)

$$A = \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s}, \quad B = \frac{\partial^2 y}{\partial u_r \partial u_s}, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial u_r \partial u_s}$$

setzen, dieselben dann der Reihe nach zuerst mit $\frac{\partial x}{\partial u_1}$, $\frac{\partial y}{\partial u_1}$, $\frac{\partial z}{\partial u_1}$, dann mit $\frac{\partial x}{\partial u_2}$, $\frac{\partial y}{\partial u_2}$, $\frac{\partial z}{\partial u_2}$, dann mit X, Y, Z multiplicieren und jedes Mal addieren, so folgt:

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta = \begin{bmatrix} rs \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$a_{12}\alpha + a_{22}\beta = \begin{bmatrix} rs \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$\gamma = b_{rs},$$

hieraus weiter nach (18), S. 43:

$$\alpha = A_{11}\begin{bmatrix} rs \\ 1 \end{bmatrix} + A_{12}\begin{bmatrix} rs \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} rs \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\beta = A_{21}\begin{bmatrix} rs \\ 1 \end{bmatrix} + A_{22}\begin{bmatrix} rs \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} rs \\ 2 \end{Bmatrix},$$

und es ist demnach:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_r\, \partial u_s} = \begin{Bmatrix} rs \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} + \begin{Bmatrix} rs \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_2} + b_{rs} X,$$

oder kürzer mittels der Bezeichnung für die covarianten zweiten Ableitungen (§ 26, Gleichung (22), S. 46):

$$x_{rs} = b_{rs} X.$$

Schreiben wir die Formeln (a) in den alten Bezeichnungen mit Rücksicht auf unsere Ergebnisse, so erhalten wir die erste Gruppe von Fundamentalgleichungen:

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + DX, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + D'X, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + D''X, \end{aligned} \right.$$

wobei wir diejenigen für y und z weglassen, die ganz analog sind und aus den vorstehenden dadurch hervorgehen, dass X bezgl. durch Y, Z ersetzt wird.

Die zweite Gruppe von Fundamentalgleichungen ist diejenige, welche die ersten partiellen Differentialquotienten von X, Y, Z durch $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, X u. s. w. ausdrückt.

Wir setzen in den Gleichungen (a) der Reihe nach entweder

$$A = \frac{\partial X}{\partial u}, \quad B = \frac{\partial Y}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial Z}{\partial u}$$

oder

$$A = \frac{\partial X}{\partial v}, \quad B = \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad C = \frac{\partial Z}{\partial v}.$$

Dann erhalten wir, wenn wir der Reihe nach das erste Mal mit $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, das zweite Mal mit $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, das dritte Mal mit X, Y, Z multiplicieren und jedes Mal addieren, für jeden der beiden Fälle Formeln für α, β, γ. Setzen wir diese Werte α, β, γ alsdann in die betreffenden Gleichungen (a) ein, so ergeben sich die gesuchten Gleichungen:

$$
\text{(II)}\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{FD'-GD}{EG-F^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{FD-ED'}{EG-F^2}\frac{\partial x}{\partial v},\\
\frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{FD''-GD'}{EG-F^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{FD'-ED''}{EG-F^2}\frac{\partial x}{\partial v},
\end{aligned}\right.
$$

wo die analogen für X und Y wieder weggelassen sind.

Wie man sieht, sind die Coefficienten der rechten Seiten der Gleichungen (I) und (II) lediglich mittels der Coefficienten der beiden Grundformen f und φ gebildet*).

§ 48. Formeln von Gauss und Mainardi-Codazzi zwischen den Coefficienten E, F, G, D, D', D'' der beiden Fundamentalformen.

Die sechs Coefficienten der beiden Grundformen,

$$E,\ F,\ G;\ D,\ D',\ D'',$$

sind nicht von einander unabhängig, sondern durch drei wichtige Relationen verbunden, die wir nun aufstellen wollen. Dazu setzen wir die Bedingungen für die Integrabilität des Systems (I) an:

$$
\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)=0,
$$

$$
\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)=0,
$$

d. h.:

$$
\text{(b)}\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial v}\left(\left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v}+DX\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v}+D'X\right)=0,\\
&\frac{\partial}{\partial u}\left(\left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v}+D''X\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial u}+\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\frac{\partial x}{\partial v}+D'X\right)=0
\end{aligned}\right.
$$

nebst analogen für y und z. Es ist klar, dass sich unter Benutzung der Fundamentalgleichungen (I) und (II) selbst die linken Seiten der Gleichungen (b) identisch auf die Form:

$$
\alpha\frac{\partial x}{\partial u}+\beta\frac{\partial x}{\partial v}+\gamma X,
$$

$$
\alpha'\frac{\partial x}{\partial u}+\beta'\frac{\partial x}{\partial v}+\gamma' X
$$

bringen lassen; es müssen daher gleichzeitig die Gleichungen bestehen:

$$
\begin{aligned}
\alpha\frac{\partial x}{\partial u}+\beta\frac{\partial x}{\partial v}+\gamma X&=0, & \alpha'\frac{\partial x}{\partial u}+\beta'\frac{\partial x}{\partial v}+\gamma' X&=0,\\
\alpha\frac{\partial y}{\partial u}+\beta\frac{\partial y}{\partial v}+\gamma Y&=0, & \alpha'\frac{\partial y}{\partial u}+\beta'\frac{\partial y}{\partial v}+\gamma' Y&=0,\\
\alpha\frac{\partial z}{\partial u}+\beta\frac{\partial z}{\partial v}+\gamma Z&=0, & \alpha'\frac{\partial z}{\partial u}+\beta'\frac{\partial z}{\partial v}+\gamma' Z&=0.
\end{aligned}
$$

*) Insbesondere ist stets festzuhalten, dass die Christoffel'schen Symbole $\left\{\begin{matrix}rs\\t\end{matrix}\right\}$, die in (I) auftreten, bezüglich der ersten Fundamentalform f gebildet sind.

Wir haben somit als gesuchte Integrabilitätsbedingungen:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0,$$
$$\alpha' = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma' = 0.$$

Die vier Bedingungen:

$$\beta = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \alpha' = 0$$

lauten in den Christoffel'schen Vier-Indices-Symbolen (§ 27, Formel (27), S. 49) geschrieben wie folgt:

$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \cdot E = \{12, 12\},$$
$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \cdot F = \{11, 21\},$$
$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \cdot F = \{22, 12\},$$
$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} \cdot G = \{21, 21\}.$$

Bezeichnet K das Krümmungsmass der ersten Fundamentalform, so ergeben diese Gleichungen übereinstimmend (Formeln (II), S. 52):

$$\text{(III)} \qquad \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = K,$$

d. h. in Worten ausgesprochen: Der Quotient der Discriminanten der beiden Fundamentalformen φ und f ist gleich dem Krümmungsmass K der ersten Fundamentalform f.

Was die beiden weiteren Bedingungen:

$$\gamma = 0, \quad \gamma' = 0$$

betrifft, so lauten dieselben entwickelt:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} - \dfrac{\partial D'}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \left(\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) D' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial D''}{\partial u} - \dfrac{\partial D'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) D' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' = 0. \end{cases}$$

Sie besagen nach den Formeln (V) des § 30 (S. 56), dass die für die zweite Fundamentalform φ bezüglich der ersten f gebildete trilineare Covariante (f, φ) identisch verschwindet.

Die Gleichung (III) ist von Gauss in den Disquisitiones u. s. w. aufgestellt worden. Dort finden sich bereits alle Elemente zur Ableitung der Gleichungen (IV) vor. Dieselben werden gewöhnlich als die Gleichungen von Codazzi bezeichnet, weil sie den von diesem Mathematiker aufgestellten völlig äquivalent sind*); in einer anderen Form sind sie weit früher (1856) von Mainardi abgeleitet worden**).

---

*) Annali di matematica, 2. Bd., S. 273 (1868).

**) Giornale dell' Istituto Lombardo, 9. Bd., S. 395.

Mit Hilfe der Gleichungen (20) des § 25 (S. 45), nämlich:

$$\frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial \log \sqrt{EG - F^2}}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

können die Gleichungen (IV) auf eine bemerkenswerte Form gebracht werden. Sie sind nämlich dem folgenden System äquivalent:

$$(\mathrm{IV}^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{EG - F^2}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{D}{\sqrt{EG - F^2}} - \\ \qquad - 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{D''}{\sqrt{EG - F^2}} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{EG - F^2}}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{D}{\sqrt{EG - F^2}} - \\ \qquad - 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{D''}{\sqrt{EG - F^2}} = 0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (III) und (IV), die zwischen den Coefficienten der beiden Fundamentalformen bestehen, geben die notwendigen und hinreichenden Bedingungen an, denen diese Coefficienten genügen müssen. Kleiden wir diese Eigenschaft in eine präcisere Form, so gilt nämlich der folgende Fundamentalsatz:

Sind zwei quadratische Differentialformen:

$$f = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2,$$

$$\varphi = D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2$$

gegeben, von denen die erste definit ist, so ist es, damit eine Fläche existiert, die dieselben bezüglich als erste und zweite Fundamentalform besitzt, notwendig und hinreichend, dass die Gleichungen (III) und (IV) befriedigt werden. Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist die entsprechende Fläche, abgesehen von Bewegungen im Raume, eindeutig bestimmt.

Durch den Beweis dieses Satzes, den wir sogleich führen werden, wird die den Formen f und φ beigelegte Bezeichnung: Fundamentalformen gerechtfertigt, und es leuchtet ein, dass alle aus der Gestalt und Grösse der Fläche sich ergebenden Eigenschaften nur von den sechs Coefficienten der Fundamentalformen abhängen werden. In Analogie mit der für eine Curve eingeführten Bezeichnung: natürliche Gleichungen können die Gleichungen:

$$f = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2,$$

$$\varphi = D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2$$

kurz die natürlichen Gleichungen der Fläche genannt werden.

§ 49. Existenz und Eindeutigkeit der Fläche, die zwei solchen gegebenen Fundamentalformen entspricht, welche den Gleichungen von Gauss und Codazzi genügen.

Wegen des invarianten Charakters der Fundamentalgleichungen (III) und (IV) können wir beim Beweise des soeben ausgesprochenen Satzes geeignetere neue Parameter u, v einführen, und zwar wollen wir im Anschluss an das Ergebnis des § 31 (S. 58) diejenigen wählen, welche gleichzeitig F und D' zu Null machen.

Wie wir in dem angeführten Paragraphen gesehen haben, sind diese neuen Veränderlichen u, v vollkommen bestimmt, ausgenommen den Fall, in dem die Proportion:

$$D : D' : D'' = E : F : G$$

besteht, die, wie man leicht einsieht, nur im Falle der Kugel (oder der Ebene)*) gilt. Gleich Constanten gesetzt geben die neuen Veränderlichen die sogenannten Krümmungslinien der Fläche (vgl. § 52).

*) In der That folgt aus der obigen Proportion:

$$D = \lambda E, \quad D' = \lambda F, \quad D'' = \lambda G.$$

Setzt man dieses aber in (IV) ein und berücksichtigt, dass man dann nach (V), S. 56, identisch hat:

$$\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} E + \left(\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) F + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} G = 0,$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} E + \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) F - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} G = 0,$$

so folgt:

$$E \frac{d\lambda}{\partial v} - F \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,$$

$$F \frac{\partial \lambda}{\partial v} - G \frac{\partial \lambda}{\partial u} = 0,$$

also

$$\lambda = \text{Const.}$$

Die Gleichungen (II), § 47, S. 89, geben dann, wenn

$$\lambda = -\frac{1}{R} \quad (R = \text{Const.})$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = R \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = R \frac{\partial Y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = R \frac{\partial Z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = R \frac{\partial X}{\partial v}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = R \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = R \frac{\partial Z}{\partial v}.$$

Die Integration liefert:

$$x = RX + a, \quad y = RY + b, \quad z = RZ + c \quad (a, b, c = \text{Const.}).$$

Demnach ist $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$, und dieses ist die Gleichung einer Kugel. Im Falle $\lambda = 0$ folgt weiter, dass X, Y, Z constant sind, d. h. dass

Setzen wir in den Fundamentalgleichungen (III) und (IV*) für die Symbole ihre wirklichen Werte (Tabelle (A), § 35, S. 67) und für K seinen durch die Gleichung (18), § 35, gegebenen Wert ein, so lauten sie:

$$
(\mathrm{V}) \qquad \begin{cases}
\dfrac{DD''}{\sqrt{EG}} + \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{E}}\right) - \dfrac{D''}{G}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{G}}\right) - \dfrac{D}{E}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0.
\end{cases}
$$

In jedem Punkte der Fläche, deren Existenz und Eindeutigkeit wir unter der Voraussetzung, dass die Gleichungen (V) erfüllt sind, nachweisen wollen, betrachten wir ein rechtwinkliges Trieder, das wir das Hauptt rieder nennen und das von den positiven Richtungen der Tangenten an den beiden Curven v und u und der Flächennormale gebildet wird. Bezeichnen wir die Cosinus dieser drei Richtungen bezüglich mit X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3, so haben wir nach (b), S. 63:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, & Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, & Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}, \\
X_2 &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, & Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, & Z_2 &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}, \\
X_3 &= X, & Y_3 &= Y, & Z_3 &= Z.
\end{aligned}
$$

Setzen wir in den Fundamentalgleichungen (I) und (II), § 47, S. 89, für die Christoffel'schen Symbole ihre wirklichen Werte ein, so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \dfrac{D}{\sqrt{E}} X_3, \\[2ex]
\dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1, \\[2ex]
\dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \dfrac{D''}{\sqrt{G}} X_3,
\end{cases}
$$

---

die Fläche eine Ebene ist. Wir können dann nämlich unbeschadet der Allgemeinheit $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 1$ setzen, und aus den Gleichungen (1), S. 86, folgt dann:

$$
\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0, \text{ d. h. } z = \text{Const.}
$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_3}{du} = -\dfrac{D}{\sqrt{E}} X_1, \\ \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = -\dfrac{D''}{\sqrt{G}} X_2. \end{cases}$$

Die unbekannten Functionen X_1, X_2, X_3 müssen also den folgenden drei homogenen totalen Differentialgleichungen genügen:

$$(4)\quad \begin{cases} dX_1 = \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} X_2 + \dfrac{D}{\sqrt{E}} X_3\right\} du + \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} X_2 dv, \\ dX_2 = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} X_1 du + \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} X_1 + \dfrac{D''}{\sqrt{G}} X_3\right\} dv, \\ dX_3 = -\dfrac{D}{\sqrt{E}} X_1 du - \dfrac{D''}{\sqrt{G}} X_2 dv. \end{cases}$$

Demselben System (4) müssen auch die Functionen Y_1, Y_2, Y_3 bez. Z_1, Z_2, Z_3 genügen.

Dabei ist das System (4) unbeschränkt integrabel, da die Integrabilitätsbedingungen zu eben den drei Relationen (V) führen, die wir als erfüllt voraussetzen.

§ 50. **Beendigung des Existenzbeweises.**

Stützen wir uns nun auf den bekannten Satz*), dass bei einem unbeschränkt integrabeln System von totalen Differentialgleichungen stets ein Lösungssystem existiert, das für die Anfangswerte u_0, v_0 der Veränderlichen u, v willkürlich gegebene Anfangswerte annimmt, so können wir unsern Beweis schnell zu Ende führen. Dazu ist nur noch zu beachten, dass, wenn X_1, X_2, X_3 und X_1', X_2', X_3' zwei verschiedene oder übereinstimmende Lösungssysteme der Gleichungen (4) sind, wegen der speciellen Form dieser Gleichungen

$$X_1 X_1' + X_2 X_2' + X_3 X_3' = \text{Const.}$$

ist, da das vollständige Differential dieses Ausdrucks zufolge der Gleichungen (4) und der analogen Gleichungen für X_1', X_2', X_3' identisch verschwindet.

Nach diesen Vorbemerkungen seien X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3; Z_1, Z_2, Z_3 drei Lösungssysteme von (4), die für $u = u_0$, $v = v_0$ in die neun Coefficienten einer orthogonalen Substitution:

$$\begin{matrix} X_1^{(0)} & X_2^{(0)} & X_3^{(0)} \\ Y_1^{(0)} & Y_2^{(0)} & Y_3^{(0)} \\ Z_1^{(0)} & Z_2^{(0)} & Z_3^{(0)} \end{matrix}$$

*) S. z. B. C. Jordan, Traité d'Analyse, Bd. 3.

übergehen mögen. Aus der obigen Bemerkung folgt, dass für alle Werte von u und v die Grössen:

$$\begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{matrix}$$

die Coefficienten einer orthogonalen Substitution sein müssen; insbesondere wird sein:

$$X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1,$$
$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0$$
u. s. w.

Nun sind infolge der Gleichungen (4) selbst die drei Ausdrücke:

$$\sqrt{E} X_1 du + \sqrt{G} X_2 dv, \quad \sqrt{E} Y_1 du + \sqrt{G} Y_2 dv, \quad \sqrt{E} Z_1 du + \sqrt{G} Z_2 dv$$

vollständige Differentiale. Setzen wir also

$$x = \int (\sqrt{E} X_1 du + \sqrt{G} X_2 dv), \quad y = \int (\sqrt{E} Y_1 du + \sqrt{G} Y_2 dv),$$
$$z = \int (\sqrt{E} Z_1 du + \sqrt{G} Z_2 dv)$$

und betrachten wir x, y, z als die laufenden Coordinaten eines Punktes einer Fläche, so hat diese Fläche in der That die beiden gegebenen Formen zu Fundamentalformen.

Was endlich denjenigen Teil des Fundamentalsatzes betrifft, der sich auf die Eindeutigkeit bezieht, so ergiebt sich dieselbe entweder aus der linearen Form der Gleichungen (4) oder mittels derselben Ueberlegung, wie wir sie bereits § 8, S. 13, für die Curven angestellt haben.

Bemerkung. Beim Beweise des obigen Satzes haben wir uns der Einfachheit halber auf ein besonderes System von Parameterlinien (Krümmungslinien) bezogen; doch ist wohl zu beachten, dass, auch wenn die unabhängigen Veränderlichen ganz allgemein gelassen werden, als Haupttrieder dasjenige z. B. eingeführt werden kann, das in jedem Punkte der Fläche von den Halbierungslinien des Winkels zwischen den Tangenten der Parameterlinien und von der Flächennormale gebildet wird. Für die neun Cosinus dieser drei Richtungen würden wir, wie hier das System (4), ein zufolge der Fundamentalgleichungen (III) und (IV) unbeschränkt integrables System totaler Differentialgleichungen erhalten, und wie in § 9, S. 15, könnte die Aufgabe, die Fläche zu bestimmen, auf die Integration einer (totalen) Differentialgleichung vom Riccati'schen Typus zurückgeführt werden. Daraus folgt das Ergebnis:

Zur wirklichen Bestimmung der zwei gegebenen Funda-

mentalformen entsprechenden Fläche ist die Integration einer Differentialgleichung vom Riccati'schen Typus erforderlich.

§ 51. **Krümmungslinien der Fläche.**

Betrachtet man auf einer Fläche S eine beliebige Curve L und errichtet man längs der Curve die Flächennormalen, so werden diese im allgemeinen eine nicht abwickelbare Linienfläche (Regelfläche) bilden. In dem besonderen Falle, dass diese Linienfläche abwickelbar ist, d. h. dass die Normalen von S längs L die Tangenten einer gewissen Curve im Raume sind (oder durch ein und denselben Punkt gehen), wird die Curve L eine Krümmungslinie der Fläche genannt.

Wir sehen sofort, dass nach dieser Definition jede in der Ebene oder auf der Kugel gezogene Curve als Krümmungslinie der Ebene bez. Kugel aufzufassen ist, da längs einer solchen die Normalenfläche ein Cylinder bez. ein Kegel ist. Auf jeder anderen Fläche giebt es, wie wir nun nachweisen wollen, nur eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Krümmungslinien, die ein doppeltes Orthogonalsystem stets reeller Curven bilden.

Wir führen zunächst einige Eigenschaften der Krümmungslinien an, die direct aus ihrer Definition und den in § 17, Kap. I (S. 30), angegebenen Sätzen A) und B) über Evoluten folgen.

Ist die Schnittcurve C zweier Flächen für beide eine Krümmungslinie, so ist der Winkel, unter dem sich die Flächen längs C schneiden, constant. Umgekehrt, schneiden sich zwei Flächen unter constantem Winkel und ist ihre Schnittcurve Krümmungslinie für die eine Fläche, so ist sie es auch für die andere.

Da ferner in der Ebene und auf der Kugel jede Curve Krümmungslinie ist, haben wir als Zusatz:

Schneidet eine Ebene oder eine Kugel eine Fläche S in einer Krümmungslinie, so schneidet sie S unter constantem Winkel. Umgekehrt, schneidet eine Ebene oder eine Kugel eine Fläche S unter constantem Winkel, so ist die Schnittcurve eine Krümmungslinie von S.

Demnach sind z. B. auf einer Rotationsfläche die Meridiane und die Parallelkreise Krümmungslinien.

Sehen wir nun zu, durch welche analytische Bedingung eine Krümmungslinie L charakterisiert ist. Längs einer solchen sind u, v; x, y, z; X, Y, Z als Functionen einer einzigen Veränderlichen, z. B. des Bogens s von L, zu betrachten. Ist $M(x, y, z)$ ein Punkt von

L und $M_1(x_1, y_1, z_1)$ derjenige Punkt, in dem die Rückkehrkante C_1 der Developpabeln, die von den Normalen längs L gebildet wird, von der Normale des Punktes M berührt wird, so haben wir:

(5) $$x_1 = x - rX, \quad y_1 = y - rY, \quad z_1 = z - rZ,$$

wo r den algebraischen Wert der Strecke M_1M bezeichnet und positiv oder negativ ist, je nachdem die Richtung von M_1 nach M mit der positiven oder negativen Richtung der Normale zusammenfällt.

Differenzieren wir die Gleichungen (5) nach s und berücksichtigen wir, dass $\frac{dx_1}{ds}, \frac{dy_1}{ds}, \frac{dz_1}{ds}$ nach Annahme proportional bez. X, Y, Z sind, da eben die Flächennormale Tangente von C_1 ist, so erhalten wir:

$$\lambda X = \frac{dx}{ds} - r\frac{dX}{ds} - X\frac{dr}{ds},$$
$$\lambda Y = \frac{dy}{ds} - r\frac{dY}{ds} - Y\frac{dr}{ds},$$
$$\lambda Z = \frac{dz}{ds} - r\frac{dZ}{ds} - Z\frac{dr}{ds}.$$

Multiplicieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit X, Y, Z und addieren wir, so folgt:

$$\lambda = -\frac{dr}{ds},$$

also: $$\frac{dx}{ds} = r\frac{dX}{ds}, \quad \frac{dy}{ds} = r\frac{dY}{ds}, \quad \frac{dz}{ds} = r\frac{dZ}{ds}$$

oder: Längs der Krümmungslinie L muss die Proportion:

(6) $$dx : dy : dz = dX : dY : dZ$$

bestehen.

Umgekehrt, wenn längs einer Flächencurve C die Proportion (6) besteht und r den gemeinsamen Wert der drei Verhältnisse:

$$\frac{dx}{dX} = \frac{dy}{dY} = \frac{dz}{dZ}$$

bezeichnet, so sieht man sofort, dass die Gleichungen (5) eine Curve C_1 definieren, deren Tangenten die Flächennormalen längs C sind. Es ist demnach die Proportion (6) für die Krümmungslinien charakteristisch.

Auch braucht hier nicht der Fall ausgenommen zu werden, in dem sich die Curve C_1 auf einen Punkt zusammenzieht; es ist dann nur:

$$dx_1 = dy_1 = dz_1 = 0,$$

also auch $dr = 0$, d. h. $r = \text{Const.}$

§ 52. Hauptkrümmungsradien der Fläche.

Wir drücken nun die für eine Krümmungslinie charakteristischen Gleichungen:

$$dx = r dX, \quad dy = r dY, \quad dz = r dZ$$

in krummlinigen Coordinaten aus. Zu diesem Zwecke schreiben wir sie wie folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = r\left(\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv\right),$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = r\left(\frac{\partial Y}{\partial u} du + \frac{\partial Y}{\partial v} dv\right),$$
$$\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = r\left(\frac{\partial Z}{\partial u} du + \frac{\partial Z}{\partial v} dv\right).$$

Statt dieser Gleichungen können wir auch das äquivalente System setzen, das sich ergiebt, wenn das erste Mal mit $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$, das zweite Mal mit $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$, das dritte Mal mit X, Y, Z multipliciert und jedes Mal addiert wird.

Das letzte Mal ergiebt sich eine Identität, und wir erhalten somit nur die beiden Gleichungen (vgl. § 46):

$$(7) \qquad \begin{cases} E du + F dv = -r(D\, du + D' dv), \\ F du + G dv = -r(D' du + D'' dv). \end{cases}$$

Die Elimination von r aus diesen beiden Gleichungen ergiebt als Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ D du + D' dv & D' du + D'' dv \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante ist genau die Jacobi'sche Form der beiden Grundformen. Schliessen wir also den Fall:

$$D : D' : D'' = E : F : G,$$

in dem die Fläche eine Kugel oder eine Ebene ist*), aus und erinnern wir uns der Ergebnisse des § 31, Kap. II (S. 58), so haben wir den Satz:

*) Zu dem in der Anmerkung zu § 49 (S. 93) hierfür gegebenen analytischen Beweise kann ein einfacher geometrischer leicht hinzugefügt werden. Im Falle der Proportion $D : D' : D'' = E : F : G$ ist wegen (8) jede Curve auf der Fläche S Krümmungslinie. Daraus folgt, dass, wenn M und M' zwei beliebige Punkte von S sind, die Normalen in M und M' in einer Ebene liegen. In der That, durch die Normale in M und durch den Punkt M' lege man die Ebene, welche S in einer Curve C schneiden möge. Die Flächennormalen längs C bilden eine abwickelbare Fläche, d. h. sie sind Tangenten einer Evolute von C. Da die Normale von M in der Ebene der Curve C liegt, so liegt auch jede andere Normale

Auf jeder Fläche giebt es ein doppeltes Orthogonalsystem von Krümmungslinien, das stets reell ist. Eine Unbestimmtheit tritt nur im Falle der Kugel und der Ebene ein; für diese Flächen ist jede Curve Krümmungslinie.

Durch jeden Flächenpunkt M gehen also zwei Krümmungslinien L_1 und L_2, die sich in ihm rechtwinklig durchsetzen. Die Normale von M berührt die Rückkehrcurve der von den Flächennormalen längs L_1 erzeugten abwickelbaren Fläche in einem Punkte, den wir mit M_1 bezeichnen wollen; dieser Punkt heisst der Krümmungsmittelpunkt der Fläche in M bezüglich der Krümmungslinie L_1. Desgleichen haben wir auf der Normale von M einen zweiten Krümmungsmittelpunkt M_2 bezüglich L_2, und die Strecken:

$$r_1 = M_1 M, \quad r_2 = M_2 M\;^{*)}$$

werden aus einem Grunde, den wir in § 54 einsehen werden, als Hauptkrümmungsradien der Fläche in M bezeichnet.

Eliminieren wir aus unseren Gleichungen (7) das Verhältnis $du : dv$, so kommen wir offenbar zu dem Ergebnis:

Die Hauptkrümmungsradien r_1 und r_2 der Fläche sind in jedem Punkte als die Wurzeln der in r quadratischen Gleichung:

$$(9)\quad (DD'' - D'^2)r^2 + (ED'' + GD - 2FD')r + EG - F^2 = 0$$

gegeben.

§ 53. Radien der ersten Krümmung der auf einer Fläche gezogenen Curven und Meusnier'scher Satz.

Wir wollen nun untersuchen, welche Beziehungen zwischen den Radien der (ersten) Krümmung der unendlich vielen Curven bestehen, die auf einer Fläche durch ein und denselben Punkt M gezogen werden können.

Es sei C eine solche Curve, längs deren $u\ v$; x, y, z Functionen des Bogens s der Curve seien. Indem wir für die Curve C die Bezeich-

längs C, insbesondere die von M', in derselben Ebene. Es schneiden sich demnach alle Normalen von S paarweise, und da sie nicht in einer Ebene liegen können, müssen sie durch einen Punkt O gehen. Liegt O in endlicher Entfernung, so ist hiernach S eine Kugel (mit dem Mittelpunkt O); liegt O im Unendlichen, so ist S eine Ebene.

*) Es sei daran erinnert, dass r_1 und r_2 positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem die Richtungen von M_1 nach M und von M_2 nach M mit der positiven oder mit der negativen Normalenrichtung zusammenfallen.

nungen des ersten Kapitels beibehalten, erhalten wir somit für die Richtungscosinus ihrer Tangente (§ 34, Kap. III):

$$(10) \quad \begin{cases} \cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit σ den zwischen 0 und π gelegenen Winkel, der von den positiven Richtungen der Hauptnormale von C und der Flächennormale gebildet wird, so haben wir nach den ersten Frenet'schen Formeln (S. 10):

$$\sum X \frac{d\cos\alpha}{ds} = \frac{\cos\sigma}{\varrho},$$

demnach zufolge (10) und (3) (S. 87):

$$\frac{\cos\sigma}{\varrho} = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{ds^2}$$

oder:

$$(11) \qquad \frac{\cos\sigma}{\varrho} = \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Durch die Flächennormale von M und durch die in M an C gezogene Tangente legen wir die Ebene; sie liefert auf der Fläche eine Schnittcurve Γ, die als Normalschnitt längs C bezeichnet werde. Die erste Krümmung $\frac{1}{R}$ von Γ in M wird wieder durch die Gleichung (11) gegeben, wenn darin $\cos\sigma = \pm 1$ gesetzt wird, je nachdem die Concavität von Γ nach der positiven oder negativen Richtung der Normale liegt. Daraus ergiebt sich sofort die Gleichung:

$$\varrho = \pm R\cos\sigma,$$

d. h. der Meusnier'sche Satz:

Der Radius der ersten Krümmung einer auf einer Fläche S gezogenen Curve C ist in jedem Punkte M gleich dem Krümmungsradius des Normalschnitts längs der Curve C in M, multipliciert mit dem Cosinus des Winkels, den die Schnittebene mit der Schmiegungsebene der Curve bildet.

Wir können uns demnach auf die Untersuchung der Normalschnitte beschränken.

Für diese wird die Gleichung (11) die folgende:

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}.$$

Dabei hängt die Wahl des oberen oder unteren Vorzeichens von dem vorhin erwähnten Umstand ab; bei dieser Wahl ergiebt sich (infolge der in der Curventheorie getroffenen Festsetzung, dass die erste Krüm-

mung stets einen positiven Wert haben soll) als thatsächliches Vorzeichen der rechten Seite in jedem Falle das positive.

Da aber hier für die unendlich vielen Normalschnitte alle Strecken R auf derselben Geraden, der Normale von M, gemessen werden, auf der die positive Richtung bereits definiert ist, so dürfte es doch zweckmässiger sein, auch R mit einem Vorzeichen zu versehen, und zwar setzen wir fest, dass R positiv gerechnet werden soll, wenn die Richtung vom Krümmungsmittelpunkt des Normalschnitts nach dem Normalenfusspunkt mit der positiven Richtung der Normale zusammenfällt, negativ im entgegengesetzten Falle (s. den vorigen Paragraphen). Zufolge dieser neuen Festsetzung haben wir in allen Fällen ausnahmslos:

$$\frac{1}{R} = -\frac{D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}. \tag{12}$$

§ 54. Euler'sche Formel und Dupin'sche Indicatrix.

Wählen wir nun die Krümmungslinien zu Parameterlinien und bezeichnen wir mit r_1 bezw. r_2 die in § 52 eingeführten Grössen, so haben wir längs der Krümmungslinien u:

$$dx = r_1 dX, \quad dy = r_1 dY, \quad dz = r_1 dZ$$

und längs der Krümmungslinien v:

$$dx = r_2 dX, \quad dy = r_2 dY, \quad dz = r_2 dZ,$$

d. h.:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= r_2 \frac{\partial X}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u} &= r_2 \frac{\partial Y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} &= r_2 \frac{\partial Z}{\partial u}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= r_1 \frac{\partial X}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= r_1 \frac{\partial Y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= r_1 \frac{\partial Z}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{13}$$ *)

folglich nach den Formeln (3) S. 87:

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1}, \tag{14}$$

demnach wegen (12):

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{E}{r_2}du^2 + \frac{G}{r_1}dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2} = \frac{E}{r_2}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{G}{r_1}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2.$$

Bedeutet ϑ den Winkel, den der betrachtete Normalschnitt mit der Curve v bildet, so ergiebt sich die Euler'sche Formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\vartheta}{r_2} + \frac{\sin^2\vartheta}{r_1}. \tag{15}$$

---

1) Gleichungen von Rodrigues.

Hieraus folgt unmittelbar: r_1 und r_2 sind die Hauptkrümmungsradien der Normalschnitte längs der Krümmungslinien. Diese Schnitte heissen Hauptschnitte, deshalb r_1 und r_2, wie bereits bemerkt, Hauptkrümmungsradien; die Krümmungsmittelpunkte der Hauptschnitte sind die beiden am Schlusse des § 52 betrachteten Punkte M_1 und M_2. Sie werden die Krümmungsmittelpunkte der Fläche in M genannt.

Wir untersuchen nun, wie sich der Krümmungsradius R des Normalschnitts ändert, wenn die Schnittebene gedreht wird. Ein recht klares Bild von der Art der Aenderung erhält man mit Hilfe der folgenden Betrachtungen:

1) Nehmen wir an, es hätten in dem betreffenden Punkte r_1 und r_2 dasselbe, z. B. das positive Zeichen. In der Tangentialebene von M führen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen Axen ξ, η bezüglich mit den Tangenten der Krümmungslinien u, v zusammenfallen, und betrachten diejenige Ellipse, welche die Gleichung:

$$\frac{\xi^2}{r_1} + \frac{\eta^2}{r_2} = 1 \tag{16}$$

hat.

Die Länge eines Halbmessers ϱ der Ellipse, der mit der η-Axe (Tangente der Curve v) den Winkel ϑ bildet, ist durch die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\cos^2\vartheta}{r_2} + \frac{\sin^2\vartheta}{r_1}$$

gegeben. Also ist wegen (15)

$$\varrho^2 = R.$$

Es ist daher das Quadrat jedes Halbmessers der Ellipse (16) gleich dem Krümmungsradius desjenigen Normalschnitts, dessen Ebene durch den betreffenden Halbmesser gelegt ist. Aus diesem Grunde wird die Ellipse (16) die Indicatrixellipse genannt.

Es mag bemerkt werden, dass dieselbe für $r_1 = r_2$ ein Kreis wird und also in diesem Falle alle Normalschnitte durch M denselben Krümmungsradius haben. Der Punkt M wird dann ein Kreis- oder Nabelpunkt genannt. Die einzige Fläche, deren sämtliche Punkte Kreispunkte sind, ist die Kugel*).

2) Es mögen nun r_1 und r_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben, und um die Ideen zu fixieren, nehmen wir r_1 positiv, r_2 negativ an. Wir betrachten dann in der Tangentialebene die beiden conjugierten Hyperbeln:

*) In der That muss für eine solche Fläche überall $D:D':D'' = E:F:G$ sein.

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{r_1} - \dfrac{\eta^2}{-r_2} = 1, \\ -\dfrac{\xi^2}{r_1} + \dfrac{\eta^2}{-r_2} = 1. \end{cases}$$

Mit dem System dieser beiden conjugierten Hyperbeln erzielen wir dieselbe geometrische Veranschaulichung wie vorher mit der Ellipse (16).

Die Ellipse (16) im ersten bez. das System der beiden Hyperbeln (17) im zweiten Falle bilden die Dupin'sche Indicatrix, so genannt nach dem Namen des Mathematikers, der zuerst die obige geometrische Deutung der Euler'schen Formel gab.

Es ist zu bemerken, dass im ersten Falle die Fläche in der Umgebung von M ganz auf einer Seite der Tangentialebene liegt. Die Normalschnitte drehen dann nämlich ihre concave Seite sämtlich derselben Richtung der Normale zu. Im zweiten Falle dagegen liegt die Fläche in der Umgebung von M teils auf der einen, teils auf der anderen Seite der Tangentialebene*), und zwar wenden diejenigen Normalschnitte, deren Ebenen die erste der Hyperbeln (17) in reellen Punkten schneiden, ihre concaven Seiten alle nach der einen, die übrigen, welche die conjugierte Hyperbel in reellen Punkten schneiden, nach der entgegengesetzten Seite. Der Uebergang von der einen zu der anderen Schnittgattung findet dann statt, wenn die durch die Normale gelegte Ebene durch eine der beiden Asymptoten der Hyperbeln (17) geht, und es ist dann für den betreffenden Normalschnitt $\frac{1}{R} = 0$, was einen Wendepunkt dieses Normalschnitts bedeutet. Diese beiden ausgezeichneten Richtungen, die in der Tangentialebene von M ausgehen, werden demnach als asymptotische Richtungen oder Haupttangenten

---

*) Auf einem kürzeren Wege gelangen wir zu demselben Ergebnis folgendermassen:

Wir betrachten die Tangentialebene im Punkte (u, v) der Fläche und berechnen die Entfernung δ des unendlich benachbarten Punktes $(u+h,\ v+k)$ (wo h und k als unendlich klein von der ersten Ordnung anzusehen sind) von dieser Ebene. Wir erhalten:

$$\delta = \tfrac{1}{2}(Dh^2 + 2D'hk + D''k^2) + \eta,$$

wo η unendlich klein von der dritten Ordnung ist. Das Zeichen von δ hängt also von demjenigen von

$$(\alpha) \qquad Dh^2 + 2D'hk + D''k^2$$

ab.

Ist nun $DD'' - D'^2 > 0$, d. h. ist der betreffende Punkt, wie man sagt, elliptisch, so ist die Form (α) definit, und δ behält immer dasselbe Zeichen; ist $DD'' - D'^2 < 0$, d. h. der Punkt hyperbolisch, so nimmt die Form (α), somit auch δ, positive und negative Werte an.

bezeichnet. Sie teilen die Fläche in der Umgebung von M in vier Sectoren, die abwechselnd auf der einen und auf der anderen Seite der Tangentialebene liegen.

§ 55. Totale und mittlere Krümmung.

Wie wir schon gesehen haben, hängt die Art, wie eine Fläche S in der Umgebung eines ihrer Punkte gekrümmt ist, aufs engste von den Werten ihrer Hauptkrümmungsradien r_1 und r_2 ab. Statt r_1, r_2 selbst können auch zur Definition dieser Art der Krümmung zwei Combinationen von r_1 und r_2 gegeben werden, aus deren Werten umgekehrt diejenigen von r_1 und r_2 berechnet werden können. Die wichtigsten zu betrachtenden Functionen von r_1, r_2 sind das Product und die Summe der beiden Hauptkrümmungen $\frac{1}{r_1}$ und $\frac{1}{r_2}$. Wir bezeichnen sie bezüglich mit

$$K = \frac{1}{r_1 r_2}, \quad H = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}.$$

Die erste heisst das Krümmungsmass, die totale oder Gaussische Krümmung, die zweite die mittlere Krümmung der Fläche. Erinnern wir uns daran, dass in beliebigen krummlinigen Coordinaten die Hauptkrümmungsradien die Wurzeln der quadratischen Gleichung (9), § 52, S. 100, sind, so erhalten wir als allgemeine Werte von K und H unmittelbar:

$$(18) \qquad \begin{cases} K = \dfrac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \\[2mm] H = \dfrac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}. \end{cases}$$

Die Ausdrücke rechts sind absolute Invarianten der beiden Fundamentalformen (s. § 31, Kap. II)*).

Für die Gaussische Krümmung aber haben wir nun gemäss den Resultaten des § 48 den höchst wichtigen Satz:

Die Gaussische Krümmung einer Fläche ist gleich der Krümmung der ersten Fundamentalform.

Diese Eigenschaft der totalen Krümmung, nur von den Coefficienten der Form für das Linienelement-Quadrat abzuhängen, ist es (wie wir im Kapitel über dieAbwickelbarkeit näher sehen werden), die eben dieser Krümmung in den geometrischen Anwendungen überwiegende

---

*) Dieses entspricht der Thatsache, dass die totale und die mittlere Krümmung eine von der Wahl der krummlinigen Coordinaten völlig unabhängige Bedeutung haben.

Bedeutung verleiht. Sie wird deshalb auch oft schlechtweg als **Krümmung** bezeichnet.

Die Krümmung K ist positiv in den Punkten mit elliptischer, negativ in solchen mit hyperbolischer Indicatrix; erstere heissen, wie schon bemerkt, **elliptische**, letztere **hyperbolische** Punkte der Fläche.

Im allgemeinen giebt es auf einer Fläche ein Gebiet elliptischer und ein solches hyperbolischer Punkte, die durch eine Curve **parabolischer**, d. h. solcher Punkte, in denen die Krümmung Null ist, geschieden werden.

Als Ergänzung zu diesen Bemerkungen wollen wir den Satz beweisen: **Eine Fläche, die in allen Punkten die Krümmung Null besitzt, ist eine abwickelbare Fläche.**

Dass alle abwickelbaren Flächen die Krümmung Null besitzen, folgt unmittelbar daraus, dass nach den Sätzen über Curvenevoluten (§ 17, Kap. I) die Krümmungslinien einer solchen Fläche die Erzeugenden und deren orthogonale Trajectorien sind; von den beiden Hauptkrümmungen ist die den Erzeugenden zukommende stets gleich Null.

Besitzt umgekehrt die Fläche S die Krümmung Null, so ist

$$DD'' - D'^2 = 0,$$

und, wenn die Krümmungslinien zu Parameterlinien gewählt werden,

$$D' = 0,$$

also auch $D = 0$ oder $D'' = 0$. Angenommen, es wäre:

$$D = 0, \quad D' = 0.$$

Nach den Grundgleichungen (II), § 47 (S. 90), ist dann:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = 0,$$

d. h. X, Y, Z sind Functionen von v allein. Aber aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} X + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} Y + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u} Z = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} = 0,$$

von denen die zweite nach (3), S. 87, aus $D' = 0$ folgt, ergiebt sich weiter, dass die Richtungscosinus der Tangente der Krümmungslinie v,

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

Functionen von v allein, folglich längs jeder einzelnen Curve v constant sind. Die Krümmungslinien v sind also gerade Linien, und S ist nach den angeführten Sätzen über Evoluten abwickelbar.

Die Annahme:

$$D'' = 0, \quad D' = 0$$

erledigt sich ganz analog, nur vertauschen dann die Curven u und v ihre Rollen.

§ 56. Conjugierte Systeme.

Zwei Tangenten einer Fläche, die von einem Punkte M der Fläche ausgehen, heissen nach Dupin conjugiert, wenn sie bezüglich der Indicatrix conjugiert sind.

Beziehen wir uns auf die Krümmungslinien u, v und bezeichnen wir mit ϑ, ϑ' die Neigungswinkel der beiden conjugierten Tangenten gegen die Curve v, so haben wir zufolge der obigen Festsetzungen:

$$\operatorname{tg}\vartheta \operatorname{tg}\vartheta' = -\frac{r_1}{r_2}.$$

Wenden wir ferner das Symbol d bei den Zunahmen längs der ersten, δ bei denjenigen längs der conjugierten Richtung an, so haben wir nach (10), S. 65:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{dv}{du}, \quad \operatorname{tg}\vartheta' = \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\delta v}{\delta u},$$

demnach:

$$\frac{E}{r_2} du\,\delta u + \frac{G}{r_1} dv\,\delta v = 0. \tag{19}$$

Zu den conjugierten Richtungen auf der Fläche werden wir auch durch die folgende Betrachtung geführt: Es sei C eine beliebige Curve auf der Fläche S, bezogen auf ein beliebiges krummliniges Coordinatensystem (u, v). Die Tangentialebenen von S längs C umhüllen eine abwickelbare Fläche, die der Fläche S längs C umschrieben ist. Wir wollen nun beweisen, dass in jedem Punkte von C die Tangente von C und die Erzeugende der umschriebenen Developpabeln conjugierte Tangenten sind*).

Wir setzen zu diesem Zwecke die Gleichung der Tangentialebene von S in einem Punkte (x, y, z) von C an:

$$(\xi - x)X + (\eta - y)Y + (\zeta - z)Z = 0. \tag{20}$$

Hierbei bedeuten ξ, η, ζ die laufenden Coordinaten. Längs C sind sosowohl x, y, z, als auch X, Y, Z Functionen des Bogens s von C, und die sich durch Differentiation von (20) nach s ergebende Gleichung:

---

*) Insbesondere folgt hieraus: Auf der einer Fläche S längs einer Krümmungslinie C umschriebenen Developpabeln ist die Curve C Orthogonaltrajectorie der Erzeugenden. Es ist dieses eine charakteristische Eigenschaft der Krümmungslinien und könnte zu ihrer Definition dienen.

$$(21) \qquad (\xi - x)\frac{dX}{ds} + (y - \eta)\frac{dY}{ds} + (\zeta - z)\frac{dZ}{ds} = 0$$

giebt mit (20) combiniert die durch den Punkt (x, y, z) gehende Erzeugende G der genannten Developpabeln. Bezeichnen wir demnach durch das Symbol δ die Zunahmen von x, y, z auf der Fläche in der Richtung von G und berücksichtigen wir, dass die Richtungscosinus von G sowohl proportional

$$Y\frac{dZ}{ds} - Z\frac{dY}{ds}, \quad Z\frac{dX}{ds} - X\frac{dZ}{ds}, \quad X\frac{dY}{ds} - Y\frac{dX}{ds}$$

als auch proportional $\delta x, \delta y, \delta z$ sind, so erhalten wir:

$$\delta x dX + \delta y dY + \delta z dZ = 0$$

oder, wenn wir x, y, z; X, Y, Z durch u und v ausdrücken:

$$(22) \qquad D du\,\delta u + D'(du\,\delta v + dv\,\delta u) + D'' dv\,\delta v = 0.$$

Werden die Krümmungslinien zu Parameterlinien gewählt, so stimmt diese Gleichung wegen der Gleichung (14), S. 102, genau mit (19) überein und beweist die vorhin ausgesprochene Eigenschaft.

Man sieht, dass die Gleichung (22), die besagt, dass die den Zunahmen d, δ entsprechenden Linienelemente conjugiert sind, bezüglich der zweiten Grundform ebenso gebildet ist, wie die Orthogonalitätsbedingung (11), § 34, Kap. (S. 65):

$$E du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G dv\,\delta v = 0$$

bezüglich der Coefficienten der ersten Grundform.

Eine doppelte Curvenschar auf einer Fläche heisst ein **conjugiertes System**, wenn in jedem Punkte die Richtungen der beiden hindurchgehenden Curven conjugiert sind.

Offenbar kann die eine der beiden Scharen willkürlich gewählt werden. Wenn ihre Gleichung, nach der willkürlichen Constanten c aufgelöst, die Form:

$$\varphi(u, v) = c$$

hat, so sind die Curven der zweiten Schar die Integralcurven der Differentialgleichung erster Ordnung (vgl. § 34, S. 66, (12)):

$$\left(D\frac{\partial\varphi}{\partial v} - D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(D'\frac{\partial\varphi}{\partial v} - D''\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv = 0.$$

Insbesondere merke man: **Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Parameterlinien selbst ein conjugiertes System bilden, ist:** $D' = 0$.

Die doppelte Schar der Krümmungslinien ist sowohl orthogonal als auch conjugiert und die einzige, der diese beiden Eigenschaften zukommen.

§ 57. Haupttangentencurven.

Eine auf einer Fläche liegende Curve heisst Asymptoten- oder Haupttangentencurve, wenn in jedem ihrer Punkte die Tangente mit der zu ihr conjugierten zusammenfällt. Aus (22) folgt, dass längs einer Haupttangentencurve die Bedingung:

$$(23) \qquad D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2 = 0$$

erfüllt sein muss. Umgekehrt: genügt eine Curve auf der Fläche der Differentialgleichung (23), so ist sie eine Haupttangentencurve. Wie die Krümmungslinien bilden auch die Haupttangentencurven eine (im allgemeinen nicht orthogonale) doppelte Schar, und in jedem Flächenpunkte fallen die Richtungen der beiden hindurchgehenden Haupttangentencurven mit den Asymptoten der Dupin'schen Indicatrix zusammen.

Natürlich sind die Haupttangentencurven nur dann reell, wenn $DD'' - D'^2 < 0$ ist, d. h. im Gebiet der hyperbolischen Punkte, imaginär im Gebiet der elliptischen Punkte. Nur bei den abwickelbaren Flächen (§ 55) fallen die beiden Systeme der Haupttangentencurven zusammen und zwar mit den Erzeugenden.

Wir können nun leicht erkennen, dass aus der obigen Definition der Haupttangentencurven unmittelbar der Satz folgt:

In jedem Punkte einer Haupttangentencurve A fällt ihre Schmiegungsebene mit der Tangentialebene der Fläche zusammen. Umgekehrt, besitzt eine Curve A diese Eigenschaft, so ist sie eine Haupttangentencurve.

Es hat nämlich die der Fläche längs der Haupttangentencurve A umschriebene Developpable die Tangenten der Curve A, die ihre Rückkehrkante ist, zu Erzeugenden.

Umgekehrt, hat die der Fläche längs A umschriebene Developpable diese Curve zur Rückkehrkante, so ist die Curve eine Haupttangentencurve.

§ 58. Laplace'sche Gleichung für die Coordinaten x, y, z der Flächenpunkte bei Zugrundelegung conjugierter Parameterlinien.

Wir wollen nun mit Darboux*) einige wichtige Eigenschaften der conjugierten Systeme und der Haupttangentencurven entwickeln.

Angenommen, die Gleichungen:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

*) Bd. I, S. 127 ff.

definieren uns eine auf ein conjugiertes System (u, v) bezogene Fläche. Da dann $D' = 0$ ist, so giebt uns die mittlere der Fundamentalgleichungen (I) des § 47 (S. 89) den Satz:

Die Cartesischen Coordinaten x, y, z eines beweglichen Flächenpunktes sind Lösungen ein und derselben Laplaceschen Gleichung von der Form:

$$(24) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = a \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b \frac{\partial \vartheta}{\partial v}, \quad \left(a = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad b = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}\right).$$

Umgekehrt gilt der Satz:

Sind $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ Lösungen ein und derselben Laplace'schen Gleichung (24), so bilden die Curven u, v auf der Fläche:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

ein conjugiertes System.

In der That ist dann

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. $D' = 0$.

Andererseits wollen wir nun annehmen, es wären die Curven u, v die Haupttangentencurven. In diesem Falle haben wir zufolge (23)

$$D = 0, \quad D'' = 0,$$

und die Gleichungen (I), § 47, (S. 89) geben den Satz:

Die Coordinaten x, y, z eines beweglichen Flächenpunktes, ausgedrückt als Functionen der Parameter u, v der Haupttangentencurven, genügen gleichzeitig zwei Gleichungen von der Form:

$$(25) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} = \alpha \dfrac{\partial \vartheta}{\partial u} + \beta \dfrac{\partial \vartheta}{\partial v}, & \left(\alpha = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \beta = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}\right), \\ \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = \gamma \dfrac{\partial \vartheta}{\partial u} + \delta \dfrac{\partial \vartheta}{\partial v}, & \left(\gamma = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \delta = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}\right). \end{cases}$$

Umgekehrt: Haben zwei simultane Gleichungen (25) drei linear von einander unabhängige gemeinsame Lösungen x, y, z *), so definieren die Gleichungen:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

eine Fläche, die auf ihre Haupttangentencurve bezogen ist.

*) Dazu muss das System (25) unbeschränkt integrabel sein.

Diese Eigenschaften können zum analytischen Beweise des folgenden Satzes dienen:

Bei den projectiven Transformationen gehen die conjugierten Systeme und die Haupttangentencurven einer Fläche in ebensolche über*).

Eine projective Transformation ist durch die Gleichungen:

$$x' = \frac{\alpha}{\delta}, \quad y' = \frac{\beta}{\delta}, \quad z' = \frac{\gamma}{\delta}$$

gegeben, wo α, β, γ, δ ganze lineare Functionen von x, y, z, also, wenn (u, v) ein conjugiertes System ist, Lösungen von (24) und, wenn (u, v) die Haupttangentencurven sind, Lösungen des Systems (25) sind. Wird aber $\vartheta' = \frac{\vartheta}{\varrho}$ gesetzt, so geht die Gleichung (24) in eine analoge für ϑ' über und ebenso das System (25) in ein solches von derselben Form, wodurch die behauptete Eigenschaft bewiesen ist. Im nächsten Kapitel, das von den Ebenencoordinaten handelt, werden wir in gleicher Weise sehen, dass auch den dualistischen Transformationen, insbesondere den Transformationen durch reciproke Polaren im Raume, die nämliche Eigenschaft zukommt (s. § 73).

Unter den conjugierten Systemen (u, v) befindet sich auch dasjenige der Krümmungslinien. Wir können nun fragen, welche besondere Eigenschaft die Gleichung (24), der x, y, z genügen, besitzt, wenn man die Krümmungslinien zu grunde legt. Mit Darboux finden wir, dass in diesem Falle auch $x^2 + y^2 + z^2$ eine Lösung von (24) ist. Setzen wir nämlich:

$$\varrho = x^2 + y^2 + z^2,$$

so folgt aus den Gleichungen (I), § 47 (S. 89):

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial v} = 2F.$$

Also nur, wenn $F = 0$ ist, ist ϱ eine Lösung von (24).

Aus diesem Umstande hat Darboux einen eleganten Beweis für den Satz gefolgert: Bei der Transformation mittels reciproker Radienvectoren gehen die Krümmungslinien in ebensolche über. Die bekannten Gleichungen für diese Transformation sind in ihrer einfachsten Gestalt die folgenden:

---

*) Geometrisch folgt dieses sofort daraus, dass die einer Fläche längs einer Curve umschriebene Developpable bei einer projectiven Transformation in die der transformierten Fläche längs der transformierten Curve umschriebene Developpable übergeht.

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Da nun in dem vorliegenden Falle

$$\varrho = x^2 + y^2 + z^2$$

eine Lösung der Gleichung (24) ist, so führt die Transformation:

$$\vartheta' = \frac{R^2 \vartheta}{\varrho}$$

diese Gleichung in eine andere derselben Art über, der offenbar x', y', z', sowie auch $x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{R^4}{\varrho}$ genügen, da $\vartheta = R^2$ eine Lösung von (24) ist*). Nach dem, was wir vorhin gesehen haben, sind dann auch auf der Ortsfläche des Punktes (x', y', z') die Curven u, v die Krümmungslinien.

§ 59. Einige Anwendungen.

Wir machen nun einige Anwendungen von den Ergebnissen des vorigen Paragraphen.

1) Wir betrachten die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0\text{**}).$$

Ihre allgemeine Lösung ist die Summe zweier willkürlicher Functionen, von denen die eine nur von u, die andere nur von v abhängt. Wird demnach

(26) $\quad x = f_1(u) + \varphi_1(v), \quad y = f_2(u) + \varphi_2(v), \quad z = f_3(u) + \varphi_3(v)$

gesetzt, so bilden auf der hierdurch definierten Fläche die Curven u, v ein conjugiertes System. Diese Flächen werden Translationsflächen genannt, weil sie durch die translatorische Bewegung einer Curve erzeugt werden, deren sämtliche Punkte infolge der Translation congruente Curven beschreiben. In der That braucht man dazu nur der Curve:

$$x = f_1(u), \quad y = f_2(u), \quad z = f_3(u)$$

eine Translationsbewegung zu erteilen, bei der jeder ihrer Punkte eine der Curve:

$$x = \varphi_1(v), \quad y = \varphi_2(v), \quad z = \varphi_3(v)$$

congruente Curve beschreibt.

Es ist klar, dass die Art der Erzeugung dieser Flächen eine doppelte ist, insofern als sie durch Translation entweder einer Curve u oder einer Curve v entstehen.

---

*) Darboux, Bd. I, S. 208.

**) Ebenda, S. 98 ff.

Mit Lie können wir uns die Translationsflächen folgendermassen erzeugt denken: Wir betrachten die beiden Curven:

$$x = 2f_1(u), \quad y = 2f_2(u), \quad z = 2f_3(u);$$
$$x = 2\varphi_1(v), \quad y = 2\varphi_2(v), \quad z = 2\varphi_3(v),$$

dann ist die Fläche der Ort der Mittelpunkte aller Strecken, welche die Punkte der ersten mit den Punkten der zweiten Curve verbinden.

Wie ersichtlich, ist die Differentialgleichung der Haupttangentencurven für die Translationsflächen gegeben durch (vgl. (3*), S. 87):

$$\begin{vmatrix} f_1''(u) & f_2''(u) & f_3''(u) \\ f_1'(u) & f_2'(u) & f_3'(u) \\ \varphi_1'(v) & \varphi_2'(v) & \varphi_3'(v) \end{vmatrix} du^2 + \begin{vmatrix} \varphi_1''(v) & \varphi_2''(v) & \varphi_3''(v) \\ f_1'(u) & f_2'(u) & f_3'(u) \\ \varphi_1'(v) & \varphi_2'(v) & \varphi_3'(v) \end{vmatrix} dv^2 = 0.$$

Wenn insbesondere

$$f_2 = 0, \quad \varphi_1 = 0$$

angenommen wird, so werden die Veränderlichen getrennt, d. h.: Für eine Translationsfläche, deren erzeugende Curven in auf einander senkrechten Ebenen liegen, ergeben sich die Haupttangentencurven mittels Quadraturen.

2) Wir betrachten zweitens die Gleichung*):

$$(27) \qquad (u - v)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = m\frac{\partial \vartheta}{\partial v} - n\frac{\partial \vartheta}{\partial u} \quad (m, n = \text{Const.}).$$

Man sieht sofort, dass für beliebige Werte der Constanten A und a

$$\vartheta = A(u-a)^m(v-a)^n$$

eine Lösung derselben ist. Setzen wir also:

$$x = A(u-a)^m(v-a)^n, \quad y = B(u-b)^m(v-b)^n, \quad z = C(u-c)^m(v-c)^n,$$

so erhalten wir eine Fläche, auf der die Curven u, v ein conjugiertes System bilden. Als Differentialgleichung der Haupttangentencurven dieser Fläche ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{m(m-1)du^2}{(u-a)(u-b)(u-c)} = \frac{n(n-1)dv^2}{(v-a)(v-b)(v-c)},$$

die mittels Quadraturen durch elliptische Functionen integriert wird.

Ist $m = n$, so ist die Gleichung der Fläche:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{1}{m}}(b-c) + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{1}{m}}(c-a) + \left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{1}{m}}(a-b) = (a-b)(b-c)(a-c),$$

und die Integralgleichung der Haupttangentencurven ist in u, v algebraisch.

Insbesondere betrachten wir den Fall einer Fläche zweiten Grades:

$$m = n = \tfrac{1}{2}.$$

*) Darboux, Bd. I, S. 242.

Mit Rücksicht darauf, dass hier $u + v$ eine Lösung der Gleichung (27) ist, erhellt, wenn

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

gesetzt wird, dass die Curven u, v gerade die Krümmungslinien der Fläche zweiten Grades sein werden, da jetzt $x^2 + y^2 + z^2$ eine Lösung von (27) ist. Im Einklang hiermit braucht man bei dem Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \quad \alpha^2 > \beta^2 > \gamma^2$$

nur

$$x^2 = \frac{\alpha^2(\alpha^2 + u)(\alpha^2 + v)}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)}, \qquad y^2 = \frac{\beta^2(\beta^2 + u)(\beta^2 + v)}{(\beta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \alpha^2)}, \qquad z^2 = \frac{\gamma^2(\gamma^2 + u)(\gamma^2 + v)}{(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2)}$$

zu setzen, wo u zwischen $-\gamma^2$ und $-\beta^2$ und v zwischen $-\beta^2$ und $-\alpha^2$ variiert, um alle reellen Punkte des Ellipsoids (in elliptischen Coordinaten) zu erhalten.

Anmerkung. In den Anwendungen kommen oft die auf die Hauptkrümmungsradien, die Krümmungslinien und die Haupttangentencurven einer Fläche bezüglichen Gleichungen vor, wenn die Gleichung der Fläche in der gewöhnlichen Form:

$$z = z(x, y),$$

bezogen auf rechtwinklige Cartesische Axen, gegeben ist. Um dieselben zu erhalten, setzen wir in unseren allgemeinen Gleichungen

$$u = x, \quad v = y$$

und führen die üblichen Monge'schen Bezeichnungen ein:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Dann erhalten wir als Coefficienten E, F, G der ersten Grundform:

(a) $$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2.$$

Als Richtungscosinus der Normale ergeben sich:

(b) $$X = -\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Y = -\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

demnach als Coefficienten D, D', D'' der zweiten Grundform:

(c) $$D = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D' = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad D'' = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Die mittlere Krümmung H und die Totalkrümmung K der Fläche sind daher durch die folgenden Ausdrücke gegeben:

(d) $$H = \frac{2pqs - (1+p^2)t - (1+q^2)r}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}, \qquad \text{(e)} \quad K = \frac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Endlich lautet die Differentialgleichung der Haupttangentencurven bezw. Krümmungslinien wie folgt:

$$\text{(f)}\qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

$$\text{(g)}\qquad \begin{cases} \{(1+p^2)s - pqr\}\,dx^2 + \{(1+p^2)t - (1+q^2)r\}\,dx\,dy + \\ \qquad\qquad + \{pqt - (1+q^2)s\}\,dy^2 = 0. \end{cases}$$

§ 60. Berechnung der Differentialparameter.

Zum Schlusse dieses Kapitels geben wir die wichtigen Ausdrücke für die Differentialparameter von x, y, z; X, Y, Z und für ihre beiden Functionen:

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \qquad W = Xx + Yy + Zz,$$

von denen die erste das halbe Quadrat der Entfernung des Coordinatenanfangspunktes vom Flächenpunkte (x, y, z) und die zweite die Entfernung des Coordinatenanfangspunktes von der Tangentialebene darstellt.

Um sie zu berechnen, beziehen wir uns unter Benutzung der Invarianteneigenschaften der Differentialparameter der grösseren Bequemlichkeit halber auf die Krümmungslinien als Parameterlinien, wobei wir beachten, dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = +1$$

die einer orthogonalen Substitution ist (vgl. S. 63), und uns im vorliegenden Falle der Gleichungen (vgl. (13) S. 102):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = r_2\frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = r_1\frac{\partial X}{\partial v}$$

bedienen.

Da nach (14) und (16), § 35, S. 67 jetzt

$$\Delta_1\varphi = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2, \qquad \nabla(\varphi, \psi) = \frac{1}{E}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} + \frac{1}{G}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

ist, erhalten wir:

$$\text{(28)}\qquad \Delta_1 x = 1 - X^2, \quad \Delta_1 y = 1 - Y^2, \quad \Delta_1 z = 1 - Z^2,$$

$$\text{(29)}\qquad \nabla(x, y) = -XY, \quad \nabla(x, z) = -XZ, \quad \Delta(y, z) = -YZ.$$

Ferner haben wir:

$$\Delta_1 X = \frac{1}{r_2^2 E}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{r_1^2 G}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

und analog $\Delta_1 Y$, $\Delta_1 Z$, woraus folgt:

$$\Delta_1 X + \Delta_1 Y + \Delta_1 Z = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}.$$

Behufs Berechnung von $\Delta_2 x$ können wir auf die allgemeine Gleichung (24), § 26, S. 47, zurückgehen. Dieselbe ergiebt hier:

$$\Delta_2 x = \frac{G x_{11} + E x_{22} - 2 F x_{12}}{EG - F^2},$$

wo die x_{rs} die covarianten zweiten Derivierten von x bezüglich der ersten Grundform sind. Infolge der Gleichungen (I), § 47, ist aber (vgl. (22), S. 46):

$$x_{11} = DX, \quad x_{12} = D'X, \quad x_{22} = D''X,$$

also:

$$\Delta_2 x = \frac{GD + ED'' - 2FD'}{EG - F^2} X$$

oder (nach (18), S. 105):

(A) $$\Delta_2 x = -HX = -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) X.$$

Diese wichtige von Beltrami abgeleitete Gleichung zeigt (§ 38, S. 73), dass auf den Flächen von der mittleren Krümmung Null (Minimalflächen) die Schnitte mit einem System paralleler Ebenen einem Isothermensystem angehören.

Eine weitere Gleichung, die für die Theorie der Abwickelbarkeit von grosser Wichtigkeit ist, erhält man, wenn man den Differentialparameter (§ 26, S. 48)

$$\Delta_{22} x = \frac{x_{11} x_{22} - x_{12}^2}{EG - F^2}$$

bildet. Für ihn ergiebt sich infolge der obigen Werte von x_{11}, x_{12}, x_{22} und der Gleichungen (28) der Ausdruck (vgl. (18), S. 105):

(B) $$\Delta_{22} x = (1 - \Delta_1 x) K = X^2 K.$$

Dieses ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für x (auch y und z genügen ihr), deren Coefficienten nur aus denjenigen der ersten Fundamentalform gebildet sind.

Einer Gleichung derselben Art genügt auch

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2).$$

In der That finden wir zunächst bei Zugrundelegung der Krümmungslinien als Parameterlinien nach (14), S. 67:

$$\Delta_1 \varrho = 2\varrho - W^2.$$

Beachten wir ferner, dass sich für die covarianten zweiten Differentialquotienten von ϱ nach (22), S. 46, sowie wegen der obigen Werte von x_{11}, x_{12}, x_{22}

$$\varrho_{11} = E + DW, \quad \varrho_{12} = F + D'W, \quad \varrho_{22} = G + D''W$$

ergiebt, so haben wir sofort nach (24), S. 47, und nach (18), S. 105:

$$\Delta_2 \varrho = 2 - W\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

ferner nach (26), S. 48:

$$\Delta_{22} \varrho = 1 - W\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) + W^2 K.$$

Durch Elimination von W und W^2 aus den Ausdrücken für $\Delta_1 \varrho$, $\Delta_2 \varrho$, $\Delta_{22} \varrho$ erhalten wir endlich noch die Gleichung:

$$\text{(C)} \qquad \Delta_2 \varrho - \Delta_{22} \varrho = 1 + K(\Delta_1 \varrho - 2\varrho).$$

Kapitel V.

Die sphärische Abbildung nach Gauss. — Ebenencoordinaten.

Sphärische Abbildung nach Gauss und ihre Eigenschaften. — Satz von Enneper über die Torsion der Haupttangentencurven. — Allgemeine Formeln für die sphärische Abbildung. — Die Flächen bezogen auf ihre Haupttangentencurven. — Formeln von Lelieuvre. — Die Flächen mit positivem Krümmungsmass bezogen auf ein isotherm-conjugiertes System. — Formeln von Weingarten für die Ebenencoordinaten der Flächen. — Flächen mit gegebenem Bilde eines conjugierten Systems. — Flächen mit einer Schar von Krümmungslinien in parallelen Ebenen.

---

§ 61. Sphärische Abbildung nach Gauss.

Sehr nutzbringend für das Studium jeder nicht abwickelbaren Fläche ist eine punktweise Abbildung derselben auf die Kugel, welche die Gaussische Abbildung heisst und die wir folgendermassen erhalten: Es sei S eine Fläche, M ein beweglicher Punkt auf ihr; wir beschreiben eine Kugel und ziehen durch ihren Mittelpunkt den Radius parallel der positiven Richtung der in M auf S errichteten Normale. Der Endpunkt M' des Radius heisse das Bild des Punktes M. Wenn sich M auf der Fläche S (oder auf einem Gebiete der Fläche) bewegt, so bewegt sich sein Bildpunkt M' auf einem entsprechenden Gebiete der Bildkugel. Es versteht sich, dass dieses sphärische Bild die Kugel im allgemeinen mehrfach überdecken wird, nämlich dann, wenn innerhalb des betreffenden Gebietes von S die Normale von S in verschiedenen Punkten von S dieselbe positive Richtung hat. Wenn man will, so kann man im allgemeinen das Gebiet von S in mehrere Teilgebiete zerlegen derart, dass das sphärische Bild jedes Teilgebietes einblättrig ist.

Der Einfachheit halber legen wir den Mittelpunkt der Kugel in den Coordinatenanfang und setzen ihren Radius gleich der Längeneinheit. Dann ist klar, dass, wenn x, y, z die Coordinaten eines Punktes M von S sind, diejenigen des Bildpunktes M' auf der Kugel genau die Cosinus der (positiven) Normalenrichtung, X, Y, Z, sind. Bezeichnen wir demnach das Linienelement der Bildkugel mit ds', so haben wir:

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

und setzen wir:

$$ds'^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

so finden wir mit Hilfe der Fundamentalgleichungen (II), § 47, Kap. IV, (S. 90) leicht:

(1) $e = -(KE + HD),\ f = -(KF + HD'),\ g = -(KG + HD'')$ *),

d. h.:

$$(2)\qquad \begin{cases} ds'^2 = -K(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2) - \\ \qquad -H(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2). \end{cases}$$

Im allgemeinen giebt es bei jeder punktweisen Abbildung einer Fläche auf eine andere ein und nur ein (stets reelles) Orthogonalsystem auf der einen, das in ein ebensolches auf der anderen übergeht, wofern die Abbildung nicht conform ist, in welchem Falle jedes Orthogonalystem auf der einen in ein ebensolches auf der anderen übergeht **). Nun sieht man sofort, dass im allgemeinen dasjenige Orthogonalsystem auf der Fläche, das bei der sphärischen Abbildung von Gauss in ein ebensolches übergeht, das der Krümmungslinien ist.

Denn wenn das System (u, v) auf der Fläche orthogonal ist, so ist $F = 0$. Ist das entsprechende auf der Kugel nach (1) orthogonal, so folgt auch:

$$HD' = 0,$$

also ist (abgesehen von dem Fall $H = 0$) $D' = 0$, und die Gleichungen: $F = 0$, $D' = 0$ charakterisieren eben das System (u, v) als das der Krümmungslinien.

Im Falle $H = 0$ hat jedes Orthogonalsystem auf der Fläche ein orthogonales sphärisches Bild. Daraus folgt: Die sphärische Abbil-

---

*) K, H bezeichnen wie gewöhnlich die totale und die mittlere Krümmung:

$$K = \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2}, \qquad H = \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2}.$$

**) Dieser Satz ergiebt sich leicht aus den Ergebnissen des § 31, Kap. II, über simultane binäre quadratische Formen. Es mögen auf den beiden Flächen zwei entsprechende Systeme (u, v) zu Parameterlinien gewählt werden. Dann können die beiden (definiten) quadratischen Formen:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad ds'^2 = E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2,$$

welche die Quadrate der Linienelemente der Flächen darstellen, auf eine und nur auf eine Weise gleichzeitig auf Orthogonalformen gebracht werden, falls nicht die Proportion:

$$E' : F' : G' = E : F : G$$

besteht. Im letzteren Falle ist die Abbildung conform, d. h. alle Orthogonalsysteme gehen in ebensolche über, und die obige Reduction ist auf unendlich viele Weisen möglich.

dung nach Gauss ist nur für die Flächen von der mittleren Krümmung Null und für die Kugel eine conforme.

Diese wichtige Eigenschaft der Flächen von der mittleren Krümmung Null, der sogenannten Minimalflächen, bildet die Grundlage für den Zusammenhang, der, wie wir im weiteren sehen werden, zwischen der Theorie dieser Flächen und derjenigen der Functionen einer complexen Veränderlichen besteht.

§ 62. Eigenschaften der Gaussischen Abbildung und Satz von Enneper über die Torsion der Haupttangentencurven.

Aus den Gleichungen (1) können wir noch eine weitere bemerkenswerte Folgerung ziehen. Wir nehmen an, das System (u, v) auf der Fläche wäre conjugiert, d. h. $D' = 0$. Die Gleichungen (1) geben:

$$e = \frac{GD^2}{EG - F^2}, \quad f = -\frac{FDD''}{EG - F^2}, \quad g = \frac{ED''^2}{EG - F^2}.$$

Bezeichnen wir mit ω bez. Ω den Winkel, der von den positiven Richtungen der Parameterlinien in jedem Punkte der Fläche S bez. der Bildkugel gebildet wird, so folgt aus den Gleichungen (vgl. (6), S. 63):

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \cos\Omega = \frac{f}{\sqrt{eg}}\text{ *)}$$

das Ergebnis:

$$\cos\Omega = \pm\cos\omega,$$

wo das obere Zeichen für einen hyperbolischen Punkt (bei dem D, D'' verschiedene Zeichen haben), das untere für einen elliptischen Punkt gilt. Daraus schliessen wir: Bei der sphärischen Abbildung bleibt der Winkel zweier conjugierter Richtungen auf der Fläche entweder ungeändert oder er geht in den Supplementwinkel über, je nachdem der Punkt, von dem die beiden Richtungen ausgehen, hyperbolisch oder elliptisch ist.

Weniger streng ergiebt sich dieser Satz auch auf Grund der folgenden Ueberlegung: Es seien t, t' zwei conjugierte Richtungen auf der Fläche. Dann erhalten wir, wenn wir mit den Symbolen d bez. δ die nach diesen Richtungen gerechneten Differentiale bezeichnen (vgl. § 56, S. 108):

$$\delta x\, dX + \delta y\, dY + \delta z\, dZ = 0.$$

Da nun dX, dY, dZ den Cosinus der t entsprechenden Richtung auf der Kugel proportional sind, so folgt, dass diese Richtung auf der Richtung t' senkrecht steht.

Hieraus ergiebt sich, dass für die (auf einander senkrechten) Hauptrichtungen und nur für diese die entsprechende Rich-

*) Es sei daran erinnert, dass die Vorzeichen der Wurzeln positiv zu nehmen sind.

tung auf der Kugel der ursprünglichen parallel wird, wie auch aus den Gleichungen von Rodrigues (§ 54, Kap. IV, (13)) erhellt.

Wir sehen auch, dass sich nach dem Vorstehenden für die Haupttangentenrichtungen die folgende Definition ergiebt: Die Haupttangentenrichtungen sind diejenigen, welche bei der sphärischen Abbildung um einen rechten Winkel gedreht werden.

Wir kehren nun zu den allgemeinen Gleichungen (1) zurück und berechnen das Flächenelement der Kugel (§ 33, S. 63):

$$d\sigma' = \sqrt{eg - f^2}\, du\, dv.$$

Wir erhalten:

$$d\sigma' = K\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = K d\sigma,$$

wenn $d\sigma$ das Flächenelement der gegebenen Fläche ist.

Wenn wir also um einen Punkt M der Fläche eine kleine geschlossene Curve ziehen und mit σ das eingeschlossene Flächenstückchen, mit σ' das entsprechende des sphärischen Bildes bezeichnen, so convergiert das Verhältnis $\frac{\sigma'}{\sigma}$, wenn das Flächenstückchen σ (nach einem beliebigen Gesetz) unendlich klein wird, gegen den Wert der Totalkrümmung $K = \frac{1}{r_1 r_2}$ im Punkte M. Diese von Gauss gegebene Definition des Krümmungsmasses weist, wie man sieht, eine völlige Analogie zu derjenigen der Krümmung ebener Curven auf.

Zum Schlusse leiten wir aus denselben Gleichungen (1) oder (2) den Satz von Enneper ab: Das Quadrat der Torsion der Haupttangentencurven ist in jedem Punkte gleich der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Totalkrümmung der Fläche.

Zum Beweise braucht nur beachtet zu werden, dass für eine Haupttangentencurve die Richtungscosinus der Binormale gerade

$$X,\ Y,\ Z$$

sind und also nach § 5

$$\frac{1}{T^2} = \frac{dX^2 + dY^2 + dZ^2}{ds^2} = \frac{ds'^2}{ds^2}$$

ist. Wegen der Gleichung (2) aber und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass längs einer Haupttangentencurve nach § 57

$$D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2 = 0$$

ist, erhalten wir:

$$\frac{1}{T^2} = -K.$$

Dieser Satz wird nachher in § 65 weiter ausgeführt werden, wo unter Berücksichtigung des Vorzeichens der Torsion bewiesen werden wird, dass in jedem (hyperbolischen) Punkte der Fläche die

beiden Haupttangentencurven, die sich in dem Punkte durchkreuzen, gleiche, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte Torsion haben.

§ 63. **Allgemeine Formeln für die sphärische Abbildung.**

Für viele Fragen der allgemeinen Flächentheorie ist die Untersuchung der Flächen mit gegebener sphärischer Abbildung von Wichtigkeit. Wir wollen nun in diesem Paragraphen die allgemeinen Gleichungen aufstellen, die sich auf das Problem beziehen: Wenn die dritte Differentialform:

$$(3) \qquad ds'^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

gegeben ist, d. h. e, f, g als Functionen von u und v gegeben sind, sollen die zugehörigen Flächen bestimmt werden.

Zu diesem Zwecke suchen wir die notwendigen und hinreichenden Bedingungen auf, denen die Coefficienten D, D', D'' der zweiten Grundform genügen müssen. Sind diese. Bedingungen erfüllt und werden X, Y, Z als bekannte Functionen von u und v vorausgesetzt, so lässt sich nachweisen, dass sich die entsprechende Fläche mittels Quadraturen ergiebt.

Zunächst sind die Grundgleichungen (I) des § 47, Kap. IV (S. 89), angewandt auf die Bildkugel, anzusetzen. Da die Cosinus der nach aussen gerichteten Kugelnormale eben X, Y, Z sind, so ist die zweite Grundform bezüglich der Kugel, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, mit der ersten identisch*). Die angeführten Gleichungen lauten also in dem vorliegenden Falle:

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial X}{\partial v} - eX, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial X}{\partial v} - fX, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial X}{\partial v} - gX, \end{aligned}\right.$$

wo der Strich an den Christoffel'schen Symbolen andeuten soll, dass dieselben aus den Coefficienten e, f, g der dritten Grundform (3) gebildet sind**).

---

*) Es wird hier also als positive Seite der Kugel die äussere genommen und in Uebereinstimmung mit den grundlegenden Festsetzungen des § 46, Kap. IV, vorausgesetzt, dass auf dieser positiven Seite die positive u-Richtung links von der positiven v-Richtung liegt.

**) Wie immer lassen wir auch hier die analogen Gleichungen in Y und Z weg.

Wir setzen nun die Grundgleichungen II (§ 47, Kap. IV, S. 90) an, aber in anders aufgelöster Form, wobei wir mittels der Gleichungen (1), § 61, die Coefficienten e, f, g einführen, und finden:

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{fD' - gD}{eg - f^2}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{fD - eD'}{eg - f^2}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{fD'' - gD'}{eg - f^2}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{fD' - eD''}{eg - f^2}\dfrac{\partial X}{\partial v}. \end{cases}$$

Nun drücken wir in den Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

die zweiten Differentialquotienten von X mittels der Gleichungen (4) aus und setzen für die Differentialquotienten der Coefficienten e, f, g ihre Werte in den Christoffel'schen Symbolen ein. Nach einfachen Umformungen finden wir als die gesuchten Bedingungen *):

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} - \dfrac{\partial D'}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \left[\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}'\right] D' + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'' = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial D''}{\partial u} - \dfrac{\partial D'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \left[\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}'\right] D' - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'' = 0. \end{cases}$$

Dies sind genau die Codazzi'schen Gleichungen (IV), § 48, Kap. IV (S. 91), wenn an Stelle der ersten Grundform die dritte gesetzt wird. Genügen ihnen D, D', D'', so ist die entsprechende Fläche wirklich vorhanden und ergiebt sich mittels Quadraturen aus den Gleichungen (5). Wir kommen somit zu dem einfachen Ergebnis: Sind die beiden Differentialformen:

$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv,$$
$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

gegeben, von denen die zweite definit ist und die positive Krümmung Eins besitzt, so ist dafür, dass eine Fläche existiere,

---

*) Um diese Rechnung in aller Kürze durchzuführen, setze man für den Augenblick:

$$\frac{fD' - gD}{eg - f^2} = M, \quad \frac{fD - eD'}{eg - f^2} = N, \quad \frac{fD'' - gD'}{eg - f^2} = P, \quad \frac{fD' - eD''}{eg - f^2} = Q,$$

woraus folgt:

$$Me + Nf = -D, \quad Mf + Ng = Pe + Qf = -D', \quad Pf + Qg = -D''.$$

Als Integrabilitätsbedingungen erhält man die Gleichungen:

$$\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial P}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}' P + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' N + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' (M - Q) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial N}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' N + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}' P - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' (M - Q) = 0,$$

die unmittelbar in die Gleichungen (6) des Textes übergehen.

welche dieselben als zweite und dritte Grundform besitzt, notwendig und hinreichend, dass die Codazzi'schen Gleichungen (6) erfüllt sind. Die betreffende Fläche ist eindeutig bestimmt und ergiebt sich, wenn X, Y, Z als Functionen von u und v bekannt sind, mittels Quadraturen aus den Gleichungen (5).

Die Bestimmung von X, Y, Z, wenn nur die Coefficienten e, f, g bekannt sind, hängt von einer Riccati'schen Gleichung ab (§ 50, Kap. IV).

Wie in § 48 (S. 92) sieht man, dass die Gleichungen (6) auch in der folgenden Form geschrieben werden können:

$$(6^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+ \\ \qquad +\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}'\dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}}-2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'\dfrac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}\right)+ \\ \qquad +\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}}-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'\dfrac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}'\dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}=0. \end{cases}$$

Endlich leiten wir die Gleichungen ab, die uns die Werte für

$$r_1+r_2,\quad r_1r_2$$

geben, wenn r_1 und r_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche sind. Als die quadratische Gleichung, durch die sie bestimmt werden, erhalten wir nach Formel (9), § 52, S. 100, die folgende:

$$(7)\qquad (eg-f^2)r^2+(eD''+gD-2fD')r+DD''-D'^2=0.$$

Also ist:

$$(8)\qquad \begin{cases} r_1+r_2=\dfrac{2fD'-eD''-gD}{eg-f^2}, \\ r_1r_2\;\;=\dfrac{DD''-D'^2}{eg-f^2}. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (1), § 61, finden wir für die Coefficienten des Quadrates des Linienelementes der Fläche die Werte:

$$(9)\qquad \begin{cases} E=-(r_1+r_2)D-r_1r_2e,\quad F=-(r_1+r_2)D'-r_1r_2f, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad G=-(r_1+r_2)D''-r_1r_2g. \end{cases}$$

§ 64. Die Flächen bezogen auf ihre Haupttangentencurven.

Diese allgemeinen Gleichungen wenden wir auf zwei Fälle von besonderem Interesse an. Im ersten Falle nehmen wir als Parameterlinien u, v auf der Kugel die Bilder der Haupttangentencurven

der Fläche, von der wir also, indem wir uns auf reelle Grössen beschränken, annehmen, dass sie, wenigstens in dem betreffenden Gebiet, nur hyperbolische Punkte besitze.

Wir haben in diesem Falle:

$$D=0,\quad D''=0.$$

Setzen wir nun:

$$r_1 r_2 = -\varrho^2,$$

d. h. bezeichnen wir mit $-\frac{1}{\varrho^2}$ das Krümmungsmass der Fläche, so erhalten wir aus (8):

$$\frac{D'}{\sqrt{eg-f^2}} = \varrho\ ^{*}).$$

Die Codazzi'schen Gleichungen (6*) lauten:

$$(10)\qquad \frac{\partial \log \varrho}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}',\quad \frac{\partial \log \varrho}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}',$$

wobei die geometrische Bedeutung von ϱ durch die Gleichung:

$$(11)\qquad K = -\frac{1}{\varrho^2}$$

gegeben ist.

Wir haben also das zum ersten Mal von Dini**) gefundene Ergebnis:

Damit die sphärischen Curven u, v die Bilder der Haupttangentencurven einer Fläche seien, ist notwendig und hinreichend, dass die für das Linienelement der Kugel berechneten Symbole $\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'$ der Gleichung:

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'$$

genügen.

Ist diese Bedingung erfüllt, so wird ϱ durch die Gleichungen (10) bis auf einen constanten Proportionalitätsfactor bestimmt. Wir erhalten dann mit Rücksicht auf die Gleichungen (5) den Satz:

Die zugehörige Fläche ist ihrer Gestalt nach mittels Quadraturen durch die Gleichungen:

---

*) Wir lassen hier das doppelte Zeichen weg und betrachten die Grösse ϱ, die durch die folgenden Gleichungen (10) definiert ist, als positiv. Die Aenderung des Zeichens von D' bedeutet nur eine Aenderung der Zeichen der rechten Seiten in (5), d. h. es ist die Fläche nur durch die zum Coordinatenanfangspunkt symmetrisch gelegene Fläche zu ersetzen.

**) Annali di matematica, Ser. 2, Bd. 4.

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\varrho f}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial u} - \dfrac{\varrho e}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\dfrac{\varrho g}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{\varrho f}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial v} \end{cases}$$

bestimmt.

Die Gleichungen (8) werden dann:

$$r_1 + r_2 = \frac{2f\varrho}{\sqrt{eg-f^2}}, \quad r_1 r_2 = -\varrho^2$$

und folglich die Gleichungen (9):

$$E = \varrho^2 e, \quad F = -\varrho^2 f, \quad G = \varrho^2 g.$$

Für das Quadrat des Linienelements der Fläche ergiebt sich also der Ausdruck:

$$(14)\qquad ds^2 = \varrho^2(e\,du^2 - 2f\,du\,dv + g\,dv^2).$$

Es mag noch auf die einfachen Beziehungen hingewiesen werden, die jetzt zwischen den für die Fläche bez. Kugel gebildeten Christoffel'schen Symbolen $\begin{Bmatrix} r\,s \\ t \end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} r\,s \\ t \end{Bmatrix}'$ bestehen. Aus der Tabelle (A), § 35, S. 67, finden wir auf einfache Weise*):

*) Es mag hier eine Reihe von einfachen und allgemeinen Gleichungen angegeben werden, die von Weingarten bemerkt und dem Verfasser brieflich mitgeteilt worden sind. Wir nehmen die vier Gleichungen (vgl. § 46):

$$D = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}, \quad D' = -\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}, \quad D' = -\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u},$$
$$D'' = -\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}$$

und differenzieren jede derselben einerseits nach u und andererseits nach v. Wenn wir dann für die zweiten Differentialquotienten von x die durch die Grundgleichungen (I), S. 89, gegebenen Werte und ebenso für diejenigen von X die Werte (4), S. 122, einsetzen, so erhalten wir die in Rede stehenden Gleichungen, die wir in der folgenden Tabelle zusammenstellen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}' D', \\[2ex] \dfrac{\partial D}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D'}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' D', \\[2ex] \dfrac{\partial D'}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial D'}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}' D' + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'', \\[2ex] \dfrac{\partial D'}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' D' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' D''; \end{cases}$$

$$
\text{(a)} \quad \left\{
\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}' - 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}', \qquad && \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' - 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}', \\
&\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}', && \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}', \\
&\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}', && \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}'.
\end{aligned}
\right.
$$

§ 65. **Zweiter Beweis des Satzes von Enneper.**

Wir zeigen zunächst, wie sich aus diesen Gleichungen wieder der in dem bereits in § 62 angedeuteten Sinne vervollständigte Satz von Enneper ergiebt.

Wir betrachten auf der Fläche S die Haupttangentencurven v, deren Bogenelement ds_v infolge der Gleichung (14) durch

$$ds_v = \varrho \sqrt{e}\, du$$

gegeben ist.

Für die Curve v erhalten wir unter Beibehaltung der in der Curvenlehre gebrauchten Bezeichnungen:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\varrho\sqrt{e}} \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\varrho\sqrt{e}} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\varrho\sqrt{e}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

d. h. infolge der Gleichungen (13):

$$\cos\alpha = \frac{f}{\sqrt{e}\sqrt{eg-f^2}} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{eg-f^2}} \frac{\partial X}{\partial v},$$

$$\cos\beta = \frac{f}{\sqrt{e}\sqrt{eg-f^2}} \frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{eg-f^2}} \frac{\partial Y}{\partial v},$$

$$\cos\gamma = \frac{f}{\sqrt{e}\sqrt{eg-f^2}} \frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{eg-f^2}} \frac{\partial Z}{\partial v}.$$

Ferner ist, da die Schmiegungsebene der Curve v mit der Tangentialebene der Fläche zusammenfällt,

$$\cos\lambda = \pm X, \quad \cos\mu = \pm Y, \quad \cos\nu = \pm Z,$$

und demnach:

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial D''}{\partial u} &= \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' D' + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'', \\
\frac{\partial D''}{\partial v} &= \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' D' + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' D''.
\end{aligned}
\right.
$$

Durch geeignete Combination dieser acht Gleichungen ergeben sich wieder die Codazzi'schen Gleichungen sowohl bezüglich der ersten als auch der dritten Grundform (S. 91 und S. 123). Wird in den obigen Weingarten'schen Gleichungen D und D'' gleich Null gesetzt, so ergeben sich unmittelbar die Gleichungen (a) des Textes.

$$\cos\xi = \begin{vmatrix} \cos\mu & \cos\nu \\ \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \begin{vmatrix} Y & Z \\ \frac{f}{\sqrt{e}\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{f}{\sqrt{e}\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Analoge Gleichungen bestehen für $\cos\eta$ und $\cos\zeta$. Ist $\frac{1}{T_v}$ die Torsion der Curve v, so kommt nach den Frenet'schen Formeln (S. 10):

$$\frac{1}{T_v} = \sum \cos\xi \frac{d\cos\lambda}{ds_v} = \pm \frac{1}{\varrho\sqrt{e}} \sum \cos\xi \frac{\partial X}{\partial u},$$

d. h. infolge der obigen Gleichung:

$$\frac{1}{T_v} = \frac{1}{\varrho\sqrt{e}} \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Es ist aber nach § 47, S. 88, oben:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \sqrt{eg-f^2},$$

demnach:

(15) $$\frac{1}{T_v} = +\frac{1}{\varrho}.$$

Wird entsprechend mit $\frac{1}{T_u}$ die Torsion der Haupttangentencurven u bezeichnet, so finden wir:

(15*) $$\frac{1}{T_u} = -\frac{1}{\varrho}.$$

Wie man sieht, geben diese Gleichungen wieder den Enneper'schen Satz und beweisen ferner, dass die beiden durch einen Flächenpunkt gehenden Haupttangentencurven zwar gleiche, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte Torsionen haben.

§ 66. Haupttangentencurven auf den Minimalflächen.

Die Gleichungen des § 64 geben, angewandt auf zwei wichtige Klassen von Flächen, die wir weiterhin untersuchen werden, nämlich auf die Minimalflächen und die pseudosphärischen Flächen, unmittelbar einige bemerkenswerte Sätze.

Wie bereits erwähnt, werden als Minimalflächen diejenigen Flächen bezeichnet, bei denen in jedem Punkte die Hauptkrümmungsradien gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind. Ihre Haupttangentencurven sind reell und stehen auf einander senkrecht, da die Dupin'sche Indicatrix in jedem Punkte aus zwei (conjugierten) gleichseitigen Hyperbeln besteht. Da hier

$$r_1 + r_2 = \frac{2f\varrho}{\sqrt{eg - f^2}} = 0$$

sein muss, so folgt $f = 0$, also auch $F = 0$ nach S. 126, d. h. die Curven u, v bilden, wie bereits bemerkt, auf der Fläche und im sphärischen Bilde ein Orthogonalsystem. Weiter folgt aber aus der Gleichung (12), da wegen (A), S. 67

$$\text{(b)} \qquad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{1}{2}\frac{\partial \log e}{\partial v}, \quad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' = \frac{1}{2}\frac{\partial \log g}{\partial u}$$

ist, die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \log e}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \log g}{\partial u \partial v}.$$

Dieselbe besagt (nach (24), § 38, S. 72), dass die sphärischen Curven u, v isotherm sind. Durch Aenderung der Parameter u, v können wir ohne weiteres e gleich g machen. Dann folgt aus den Gleichungen (b) und (10), § 64, S. 125:

$$e = g = \frac{1}{\varrho}.$$

Die Quadrate der Linienelemente auf der Kugel und auf der Fläche erhalten dann bezüglich die Formen:

$$ds'^2 = \frac{1}{\varrho}(du^2 + dv^2), \quad ds^2 = \varrho\,(du^2 + dv^2).$$

Also: Sowohl die Haupttangentencurven einer Minimalfläche als auch ihre sphärischen Bilder sind Isothermensysteme. Die vorstehenden Ausdrücke lassen wiederum erkennen, dass die sphärische Abbildung nach Gauss für die Minimalflächen conform ist. Da nun ferner alle Isothermensysteme auf der Kugel bekannt sind, so ergeben sich alle Minimalflächen aus den Gleichungen des Paragraphen 64 mittels Quadraturen.

§ 67. Haupttangentencurven der pseudosphärischen Flächen.

Wir betrachten Flächen mit constantem negativen Krümmungsmass:

$$K = -\frac{1}{\varrho^2} \quad (\varrho = \text{Const.}).$$

Diese Flächen werden auch als pseudosphärische Flächen und ϱ als ihr Radius bezeichnet. Aus den Gleichungen (10) folgt:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = 0, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' = 0,$$

d. h. nach (A), S. 67:

$$g\frac{\partial e}{\partial v} - f\frac{\partial g}{\partial u} = 0, \quad f\frac{\partial e}{\partial v} - e\frac{\partial g}{\partial u} = 0,$$

demnach:

$$\frac{\partial e}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = 0.$$

Da somit e eine Function von u allein und g eine solche von v allein ist, so kann durch Aenderung der Parameter u, v einfach

$$e = 1, \quad g = 1$$

gemacht werden, und es ergiebt sich, wenn mit ω der Winkel der Haupttangenten auf der Fläche bezeichnet wird:

(16) $$ds^2 = \rho^2(du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2),$$

(16*) $$ds'^2 = du^2 - 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2.$$

Wir betrachten nun auf der pseudosphärischen Fläche S das Viereck, welches von vier Haupttangentencurven:

$$u = u_0, \quad u = u_1, \quad v = v_0, \quad v = v_1$$

gebildet wird.

Da ρdu das Bogenelement der Curven v und ρdv dasjenige der Curven u ist und da ρ constant ist, so haben die beiden Gegenseiten:

$$v = v_0, \quad v = v_1$$

die Länge $\rho(u_1 - u_0)$ und die beiden andern Seiten die Länge $\rho(v_1 - v_0)$. Es besteht also der Satz:

In jedem krummlinigen Viereck, das von vier Haupttangentencurven einer pseudosphärischen Fläche gebildet wird, sind die gegenüberliegenden Bogen einander gleich.

Zufolge (16*) ist ferner klar, dass den sphärischen Bildern der Haupttangentencurven dieselbe Eigenschaft zukommt.

Wir bemerken noch, dass beide Eigenschaften für die pseudosphärischen Flächen charakteristisch sind. In der That, wenn diese Eigenschaft von den Curven u, v auf der Kugel vorausgesetzt wird, so besagt dieses, dass e, g durch Aenderung der Parameter u, v gleich Eins gemacht werden können, woraus sich $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}' = 0$, $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}' = 0$ und also infolge der Gleichungen (10) $\rho =$ Const. ergiebt. Berücksichtigt man andrerseits die Gleichungen (a), § 64, S. 127:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}', \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}',$$

so gelangt man offenbar zu derselben Schlussfolgerung, wenn man voraussetzt, dass die in Rede stehende Eigenschaft den Haupttangentencurven u, v auf der Fläche zukommt.

Die Aufgabe, die pseudosphärischen Flächen zu bestimmen, deckt sich mit der, auf der Kugel diejenigen Systeme von Curven u, v zu finden, für die das Quadrat des Linienelementes den Ausdruck (16*) annimmt, d. h. diejenigen Systeme zu finden, welche die Kugeloberfläche in krummlinige Vierecke teilen, deren Gegenseiten einander gleich sind. Wenn man nun mit Hilfe der Gleichung (17), § 35, Kap. III (S. 68), die Eigenschaft ausdrückt, dass die Krümmung der Form (16*) gleich Eins $\left(\text{oder diejenige der Form (16) gleich } -\frac{1}{\varrho^2}\right)$ ist, so findet man für ω die charakteristische Gleichung:

$$(17) \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega .$$

Jeder Lösung ω dieser partiellen Differentialgleichung entspricht eine pseudosphärische Fläche mit gegebenem Radius ϱ und umgekehrt*).

§ 68. **Formeln von Lelieuvre.**

Die Gleichungen (13) des § 64 (S. 126) gestatten eine von Lelieuvre**) angegebene elegante Transformation, die für die Theorie der unendlich kleinen Verbiegungen von grosser Wichtigkeit ist. Diese Transformation der Gleichungen (13) ergiebt sich unter Berücksichtigung der Identitäten***):

) Es folgt nämlich aus dem allgemeinen Satze des § 48, dass, wenn ω der Gleichung (17) genügt, zu der Kugel das Linienelement-Quadrat (16) gehört. Ist ω gegeben, so hängt die Bestimmung der entsprechenden pseudosphärischen Fläche von der Integration einer Riccati'schen Gleichung ab (§ 50).

**) Bulletin des Sciences Mathématiques, Bd. 12, S. 126.

***) Diese Identitäten sind besondere Fälle der folgenden für eine beliebige Fläche geltenden:

$$Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{E}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial x}{\partial u},$$

$$Y\frac{\partial z}{\partial v} - Z\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{G}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial x}{\partial u},$$

die dadurch bewiesen werden, dass man für X, Y, Z ihre Werte (1), § 46, Kap. IV, einsetzt. So ist z. B.:

$$\begin{aligned} Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial x}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] - \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\partial x}{\partial u}\left[\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]\right\} \\ &= \frac{E}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{\partial x}{\partial u} \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

$$
(\mathrm{a})\qquad \begin{cases} \dfrac{-f}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial u}+\dfrac{e}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial v}= \quad Y\dfrac{\partial Z}{\partial u}-Z\dfrac{\partial Y}{\partial u},\\[2ex] \dfrac{g}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial u}-\dfrac{f}{\sqrt{eg-f^2}}\dfrac{\partial X}{\partial v}=-Y\dfrac{\partial Z}{\partial v}+Z\dfrac{\partial Y}{\partial v}. \end{cases}
$$

Die Gleichungen (13) können demnach auch folgendermassen geschrieben werden:

$$
\frac{\partial x}{\partial u}=-\varrho\begin{vmatrix} Y & Z\\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=+\varrho\begin{vmatrix} Y & Z\\ \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix},
$$

$$
\frac{\partial y}{\partial u}=-\varrho\begin{vmatrix} Z & X\\ \dfrac{\partial Z}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=+\varrho\begin{vmatrix} Z & X\\ \dfrac{\partial Z}{\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial v}\end{vmatrix},
$$

$$
\frac{\partial z}{\partial u}=-\varrho\begin{vmatrix} X & Y\\ \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=+\varrho\begin{vmatrix} X & Y\\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v}\end{vmatrix}.
$$

Wird nun

$$
\sqrt{\varrho}\,X=\xi,\quad \sqrt{\varrho}\,Y=\eta,\quad \sqrt{\varrho}\,Z=\zeta
$$

gesetzt, so ergeben sich die Lelieuvre'schen Formeln:

$$
(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u}=-\begin{vmatrix} \eta & \zeta\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial u} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \dfrac{\partial x}{\partial v}=+\begin{vmatrix} \eta & \zeta\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial v}\end{vmatrix},\\[3ex] \dfrac{\partial y}{\partial u}=-\begin{vmatrix} \zeta & \xi\\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial u} & \dfrac{\partial \xi}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \dfrac{\partial y}{\partial v}=+\begin{vmatrix} \zeta & \xi\\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} & \dfrac{\partial \xi}{\partial v}\end{vmatrix},\\[3ex] \dfrac{\partial z}{\partial u}=-\begin{vmatrix} \xi & \eta\\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u} & \dfrac{\partial \eta}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \dfrac{\partial z}{\partial v}=+\begin{vmatrix} \xi & \eta\\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} & \dfrac{\partial \eta}{\partial v}\end{vmatrix}. \end{cases}
$$

Nun sind X, Y, Z infolge der mittleren der Gleichungen (4), § 63, S. 122, und infolge der Gleichungen (10), § 64, S. 125, Lösungen der Laplace'schen Gleichung:

$$
\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\log\sqrt{\varrho}}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\log\sqrt{\varrho}}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+f\varphi=0.
$$

Da dieselbe gleiche Invarianten besitzt*), so geht sie, wenn

$$
\sqrt{\varrho}\,\varphi=\vartheta
$$

gesetzt wird, in die folgende über:

$$
(19)\qquad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v}=M\vartheta,
$$

wo $M=\dfrac{1}{\sqrt{\varrho}}\dfrac{\partial^2\sqrt{\varrho}}{\partial u\,\partial v}-f$ ist.

---

*) Vgl. Darboux, Bd. 2, S. 27.

Daraus folgt: In den Lelieuvre'schen Formeln (18) sind ξ, η, ζ drei particulare Lösungen der Gleichung (19).

Nun gilt aber auch umgekehrt der Satz: Kennt man drei linear unabhängige particulare Lösungen ξ, η, ζ einer willkürlich gewählten Laplace'schen Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = M\vartheta,$$

wo M eine beliebige Function von u und v ist, so ergeben die Gleichungen (18) mittels Quadraturen eine Fläche, auf der die Curven u, v die Haupttangentencurven sind und deren Krümmungsmass K in jedem Punkte durch

$$K = -\frac{1}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2}$$

gegeben ist.

In der That ist leicht zu sehen, dass die Bedingungen für die Integrabilität der Gleichungen (18) für die Lösungen ξ, η, ζ von (19) identisch erfüllt sind; auf der sich ergebenden Fläche:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

sind ξ, η, ζ infolge der Gleichungen (18) den Richtungscosinus der Normale proportional. Demnach ist, wenn

$$\varrho = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

gesetzt wird:

$$X = \frac{\xi}{\sqrt{\varrho}}, \quad Y = \frac{\eta}{\sqrt{\varrho}}, \quad Z = \frac{\zeta}{\sqrt{\varrho}},$$

und die Gleichungen:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v} = 0,$$

die aus den Gleichungen (18) folgen, beweisen eben, dass die Curven u, v die Haupttangentencurven sind. Setzt man ferner noch:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e du^2 + 2f du\, dv + g dv^2,$$

so kommt man von den Gleichungen (18) wieder zu den Gleichungen (13), sodass der Beweis geführt ist.

Nach dem vorstehenden Satze können wir mit Hilfe von geeigneten Gleichungen (19) unendlich viele Flächen erhalten, auf denen wir unmittelbar die Haupttangentencurven kennen. Wenn wir z. B. die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0$$

nehmen und die drei particularen Lösungen

$$\xi = v, \quad \eta = \psi(v), \quad \zeta = u$$

wählen, wo $\psi(v)$ eine beliebige Function von v ist, so ergiebt die Integration der Gleichungen (18):

$$(20)\qquad x = -u\psi(v), \quad y = uv, \quad z = \int (v\psi'(v) - \psi(v))dv.$$

Diese Gleichungen definieren uns eine Fläche, auf der die Haupttangentencurven v offenbar Gerade sind, welche die z-Axe senkrecht kreuzen, d. h. ein gerades Conoid. Wegen der Willkürlichkeit der Function $\psi(v)$ ist die Fläche (20) auch das allgemeinste gerade Conoid.

§ 69. Die Flächen bezogen auf ein conjugiertes System.

Der zweite besondere Fall, auf den wir die allgemeinen Gleichungen des § 63 anwenden wollen, soll derjenige sein, in welchem die Curven u, v auf der Kugel die Bilder eines conjugierten Systems auf der Fläche sind.

Da dann $D' = 0$ ist, so nehmen die Gleichungen (6) (S. 123) folgende einfache Gestalt an:

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} = \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' D - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}' D'', \\[2ex] \dfrac{\partial D''}{\partial u} = \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' D'' - \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}' D. \end{cases}$$

Wenn ein System (u, v) auf der Kugel willkürlich gegeben ist, so giebt es unendlich viele Flächen, für die dasselbe ein conjugiertes System ist. Eine beliebige dieser Flächen ergiebt sich, wenn für D und D'' zwei Functionen von u und v genommen werden, die den Gleichungen (21) oder den nach (20), S. 45, äquivalenten Gleichungen:

$$(21^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}}\right) + \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}' \dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}} + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}' \dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}\right) + \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}' \dfrac{D}{\sqrt{eg-f^2}} + \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}' \dfrac{D''}{\sqrt{eg-f^2}} = 0 \end{cases}$$

genügen, und wenn alsdann x, y, z mittels Quadraturen aus den Gleichungen (5) (S. 123) bestimmt werden, die in diesem Falle lauten:

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{D}{eg-f^2}\left(-g\dfrac{\partial X}{\partial u} + f\dfrac{\partial X}{\partial v}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{D''}{eg-f^2}\left(+f\dfrac{\partial X}{\partial u} - e\dfrac{\partial X}{\partial v}\right) \end{cases}$$

und entsprechend für y und z.

Aus den Gleichungen (8) (S. 124) ergiebt sich:

$$(23)\qquad r_1 + r_2 = -\frac{eD'' + gD}{eg-f^2}, \quad r_1 r_2 = \frac{DD''}{eg-f^2}.$$

Die Gleichungen (9) ebenda ergeben:

$$(24)\qquad E = \frac{gD^2}{eg-f^2}, \quad F = -\frac{fDD''}{eg-f^2}, \quad G = \frac{eD''^2}{eg-f^2}.$$

Berechnen wir mittels dieser Ausdrücke die Symbole $\begin{Bmatrix} r s \\ t \end{Bmatrix}$ für die Fläche, so finden wir unter Berücksichtigung der Gleichungen (21)*):

$$(25)\quad \begin{cases} \begin{Bmatrix} 1 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \dfrac{\partial \log D}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 1 \\ 1 \end{Bmatrix}', & \begin{Bmatrix} 2 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \dfrac{\partial \log D''}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 2 2 \\ 2 \end{Bmatrix}', \\ \begin{Bmatrix} 1 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\dfrac{D''}{D} \begin{Bmatrix} 1 1 \\ 2 \end{Bmatrix}', & \begin{Bmatrix} 1 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\dfrac{D}{D''} \begin{Bmatrix} 2 2 \\ 1 \end{Bmatrix}', \\ \begin{Bmatrix} 2 2 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\dfrac{D''}{D} \begin{Bmatrix} 1 2 \\ 2 \end{Bmatrix}', & \begin{Bmatrix} 1 1 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\dfrac{D}{D''} \begin{Bmatrix} 1 2 \\ 1 \end{Bmatrix}'. \end{cases}$$

Wir nehmen nun im besonderen an, dass das System (u, v) auf der Kugel orthogonal sei und demnach die Curven u, v Krümmungslinien der Flächen seien (vgl. § 61, S. 119). Es ist dann $f = 0$ und also nach (23):

$$D = -e r_2, \quad D'' = -g r_1.$$

Wenn wir dieses in den Gleichungen (21) einsetzen und gleichzeitig die Werte der Christoffel'schen Symbole nach § 35 entwickeln, so erhalten wir:

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial r_2}{\partial v} = (r_1 - r_2) \dfrac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = (r_2 - r_1) \dfrac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u}. \end{cases}$$

Die Aufgabe, die Flächen mit gegebenen sphärischen Bildern der Krümmungslinien zu bestimmen, wird demnach bei dieser Art der Behandlung auf die Integration des Systems (26) zurückgeführt.

Eine elegantere und mehr symmetrische Methode wird sich demnächst aus den Gleichungen für die Ebenencoordinaten der Fläche ergeben.

§ 70. Flächen mit positiver Krümmung bezogen auf ein isotherm-conjugiertes System.

Auf einer Fläche (oder auf einem Flächenstück) mit positiver Totalkrümmung giebt es unendlich viele conjugierte Systeme, für welche die zweite Grundform:

$$D du^2 + 2 D' du\, dv + D'' dv^2$$

die isotherme Gestalt (§ 38) annimmt, d. h. für die bei geeigneter Wahl der Parameter u und v

$$D = D'', \quad D' = 0$$

*) Die folgenden Gleichungen des Textes ergeben sich auch unmittelbar aus den in der Anmerkung § 64, S. 126, angegebenen, wenn darin D' gleich Null gesetzt wird.

wird. Der Kürze halber nennen wir solche Systeme **isotherm-conjugiert**. Wir wollen nun für diese Systeme, die in vielen Beziehungen bei den Flächen mit elliptischen Punkten dieselbe Rolle spielen, wie das System der Haupttangentencurven bei den Flächen mit hyperbolischen Punkten, die zugehörigen Gleichungen aufstellen. Insbesondere können wir, ohne auf die Realität der Parameterlinien zu verzichten*), für die genannten Flächen ein System von Gleichungen ableiten, die den Lelieuvre'schen (§ 68) vollkommen analog sind.

Wird in den Gleichungen des vorigen Paragraphen $D = D''$ angenommen, ferner:

$$\frac{D}{\sqrt{eg-f^2}} = \frac{D''}{\sqrt{eg-f^2}} = \varrho$$

gesetzt, so ergiebt Einsetzen in den Gleichungen (21*):

$$(27)\qquad \frac{\partial \log \varrho}{\partial u} = -\left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}'\right], \quad \frac{\partial \log \varrho}{\partial v} = -\left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}'\right],$$

wo die geometrische Bedeutung von ϱ durch die Gleichung:

$$(27^*)\qquad K = \frac{1}{\varrho^2}$$

gegeben ist. Die Gleichungen (22) lauten:

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \dfrac{\varrho}{\sqrt{eg-f^2}}\left(-g\dfrac{\partial X}{\partial u} + f\dfrac{\partial X}{\partial v}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{\varrho}{\sqrt{eg-f^2}}\left(+f\dfrac{\partial X}{\partial u} - e\dfrac{\partial X}{\partial v}\right), \end{cases}$$

wonach sich E, F, G berechnen lassen, sodass

$$ds^2 = \varrho^2(g\,du^2 - 2f\,du\,dv + e\,dv^2)$$

folgt.

Also: **Damit ein System (u, v) auf der Kugel das Bild eines isotherm-conjugierten Systems auf einer Fläche sei, ist notwendig und hinreichend, dass die Christoffel'schen Symbole $\begin{Bmatrix}rs\\t\end{Bmatrix}'$, für das Linienelement auf der Kugel berechnet, der Bedingung:**

---

*) Da die Differentialgleichung der Haupttangentencurven die Form:

$$du^2 + dv^2 = 0$$

annimmt, so sind die Gleichungen der Haupttangentencurven in endlicher Gestalt:

$$u + iv = \text{Const.}, \quad u - iv = \text{Const.}$$

Wenn wir dieses berücksichtigen, können wir gleichfalls den analytischen Uebergang von den Gleichungen des vorigen Paragraphen zu denjenigen dieses Paragraphen bewerkstelligen.

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}'\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}' + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\right]$$

genügen. Ist dieselbe erfüllt, so ergiebt sich die zugehörige Fläche ihrer Gestalt nach aus den Gleichungen (27) und (28) mittels Quadraturen.

Es mag noch bemerkt werden, dass, wenn $D = D''$, $D' = 0$ ist, die Coordinaten x, y, z eines Flächenpunktes wegen der Gleichungen (I) des § 47, Kap. IV (S. 89), folgenden beiden simultanen Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \vartheta}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = \left[\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\right]\frac{\partial \vartheta}{\partial v}.$$

Umgekehrt, bilden zwei Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = a\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b\frac{\partial \vartheta}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = \alpha\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \beta\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

ein unbeschränkt integrierbares System*), und sind

$$x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v)$$

drei linear von einander unabhängige Lösungen derselben, so bilden die Curven u, v auf der Fläche:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

ein isotherm-conjugiertes System**).

§ 71. Formeln für isotherm-conjugierte Systeme.

Mit Hilfe der Identitäten (a) in § 68 können wir wieder die Gleichungen (28) in andere, den Lelieuvre'schen vollkommen analoge, transformieren. Setzen wir nämlich:

(29) $$\sqrt{\varrho}\, X = \xi, \quad \sqrt{\varrho}\, Y = \eta, \quad \sqrt{\varrho}\, Z = \zeta,$$

so gehen dieselben infolge der soeben erwähnten Identitäten über in:

---

*) Ein System wie das obige im Text kann höchstens vier linear von einander unabhängige Lösungen besitzen (mit Einschluss der Lösung: $\vartheta = \text{Const.}$); ist dieses der Fall, so ist es eben unbeschränkt integrierbar.

**) Aus dieser Bemerkung ergieht sich nach einer ganz analogen Beweismethode wie in § 58, S. 111: Die isotherm-conjugierten Systeme gehen bei projectiven Transformationen in ebensolche über.

$$(30)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial u}=+\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial v} & \dfrac{\partial\zeta}{\partial v}\end{vmatrix}, & \dfrac{\partial x}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \dfrac{\partial\eta}{\partial u} & \dfrac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix},\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u}=+\begin{vmatrix}\zeta & \xi\\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial v} & \dfrac{\partial\xi}{\partial v}\end{vmatrix}, & \dfrac{\partial y}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\zeta & \xi\\ \dfrac{\partial\zeta}{\partial u} & \dfrac{\partial\xi}{\partial u}\end{vmatrix},\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial u}=+\begin{vmatrix}\xi & \eta\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial v} & \dfrac{\partial\eta}{\partial v}\end{vmatrix}, & \dfrac{\partial z}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\xi & \eta\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial u} & \dfrac{\partial\eta}{\partial u}\end{vmatrix}.\end{cases}$$

Nun genügen X, Y, Z den Gleichungen (4) in § 63. Addieren wir die erste und dritte derselben und berücksichtigen wir die Gleichungen (27), so sehen wir, dass X, Y, Z Lösungen der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{\partial\log\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\log\varrho}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+(e+g)\varphi=0$$

sind. Diese geht, wenn

$$\sqrt{\varrho}\;\varphi=\vartheta$$

gesetzt wird, über in:

$$(31)\quad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2}=M\vartheta,$$

wobei

$$M=\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\frac{\partial^2\sqrt{\varrho}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\sqrt{\varrho}}{\partial v^2}\right)-(e+g)$$

ist. Infolge der Gleichungen (29) sind ξ, η, ζ drei particuläre Lösungen von ihr.

Umgekehrt: Ist eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2}=M\vartheta,$$

wo M eine beliebige Function von u und v ist, gegeben, und kennt man drei linear von einander unabhängige Lösungen ξ, η, ζ, so ergiebt sich aus den Gleichungen (30) mittels Quadraturen eine Fläche:

$$x=x(u, v),\quad y=y(u, v),\quad z=z(u, v),$$

auf der die Curven u, v ein isotherm-conjugiertes System bilden. Der Beweis ist derselbe wie in § 68, und auch hier ergiebt sich nach (27*), S. 136, dass das Krümmungsmass K der Fläche durch

$$(32)\quad K=+\frac{1}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}$$

gegeben ist.

Beispiel. Man betrachte die Gleichung:

$$(33)\quad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2}=0$$

und wähle die Lösungen:

$$\xi = v, \quad \zeta = u, \quad \eta = \frac{\partial \alpha}{\partial v},$$

wo α eine beliebige Lösung von (33) ist, deren conjugierte β bekanntlich durch die Bedingungen:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial v} = -\frac{\partial \beta}{\partial u}$$

bestimmt ist. Die Gleichungen (30) ergeben dann integriert:

$$x = -\alpha + u\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad y = \frac{u^2 + v^2}{2}, \quad z = \beta - v\frac{\partial \alpha}{\partial u}$$

und bestimmen eine Fläche, auf der das System (u, v) isotherm-conjugiert ist. Setzt man z. B.

$$\alpha = -hv, \quad \beta = hu,$$

so erhält man das Rotationsparaboloid:

$$y = \frac{x^2 + z^2}{2h^2} \quad (h = \text{Const.}).$$

Die Curven u, v des isotherm-conjugierten Systems sind in diesem Falle die (congruenten) parabolischen Schnitte der Fläche mit Ebenen, die den Hauptebenen parallel sind.

§ 72. Formeln von Weingarten für die Ebenencoordinaten der Fläche.

An die Theorie der Abbildung einer Fläche auf die Kugel können naturgemäss die Formeln für die Tangential- oder Ebenencoordinaten angeschlossen werden, zu deren Behandlung wir nun übergehen *).

Wir denken uns eine (nicht abwickelbare) Fläche als Enveloppe ihrer Tangentialebene und geben, um sie zu bestimmen, die Coordinaten dieser Ebene als Functionen zweier Parameter (krummliniger Coordinaten) u, v. Zu Coordinaten der Ebene wählen wir zweckmässig die Coefficienten ihrer Gleichung in der Normalform:

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z = W,$$

d. h. die Richtungscosinus X, Y, Z der Flächennormale und den Abstand W der Tangentialebene vom Coordinatenanfangspunkt. X, Y, Z, W sind als Functionen von u und v bekannt, also auch die Coefficienten e, f, g des Quadrates des Linienelements (3), § 63, auf der Bildkugel. Wir wollen nun die Coordinaten x, y, z des Berührungspunktes der

*) Weingarten, Ueber die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen (Festschrift etc. 1884).

Tangentialebene berechnen. Zu diesem Zwecke differenzieren wir die Gleichung:

$$\text{(a)} \qquad xX + yY + zZ = W$$

nach u und v und erhalten so:

$$\text{(b)} \qquad \begin{cases} x\frac{\partial X}{\partial u} + y\frac{\partial Y}{\partial u} + z\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{\partial W}{\partial u}, \\ x\frac{\partial X}{\partial v} + y\frac{\partial Y}{\partial v} + z\frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial v}, \end{cases}$$

demnach durch Auflösung des linearen Systems (a), (b) nach x, y, z:

$$x = \frac{1}{\sqrt{eg - f^2}} \begin{vmatrix} W & Y & Z \\ \frac{\partial W}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial W}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

oder wegen der Identitäten (a) in § 68 und nach (1), § 46:

$$x = WX + \frac{1}{eg - f^2}\left\{g\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} - f\left(\frac{\partial W}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right) + e\frac{\partial W}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}\right\}.$$

Dieser Ausdruck und die analogen für y und z lassen sich auch folgendermassen schreiben:

$$\text{(34)} \qquad x = WX + \nabla(W, X), \quad y = WY + \nabla(W, Y), \quad z = WZ + \nabla(W, Z),$$

wo der gemischte Differentialparameter ∇ (ebenso wie die weiteren, auf die wir stossen werden) für die gegebene Form des Linienelement-Quadrates auf der Kugel,

$$e du^2 + 2f du\, dv + g dv^2,$$

berechnet ist (vgl. § 35, S. 67).

Für die so bestimmte Fläche können wir ferner die Coefficienten D, D', D'' der zweiten Grundform leicht berechnen.

Aus den Gleichungen (b) folgt nämlich mittels nochmaliger Differentiation nach u und v wegen (3*) in § 46:

$$D = \sum x\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial u^2}, \quad D' = \sum x\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v}, \quad D'' = \sum x\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial v^2},$$

wofür sich auch unter Berücksichtigung der Grundgleichungen (4), § 63, schreiben lässt:

$$(35)\quad \begin{cases} -D = \dfrac{\partial^2 W}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}'\dfrac{\partial W}{\partial u} - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}'\dfrac{\partial W}{\partial v} + eW = W_{11} + eW \\ -D' = \dfrac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\dfrac{\partial W}{\partial u} - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\dfrac{\partial W}{\partial v} + fW = W_{12} + fW, \\ -D'' = \dfrac{\partial^2 W}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}'\dfrac{\partial W}{\partial u} - \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}'\dfrac{\partial W}{\partial v} + gW = W_{22} + gW, \end{cases}$$

wo die W_{rs} die covarianten zweiten Differentialquotienten von W bezüglich der Form:

$$e du^2 + 2f du\, dv + g dv^2$$

sind (nach (22), S. 46).

Als Gleichungen zur Bestimmung der Summe und des Products der beiden Hauptkrümmungsradien erhalten wir weiter aus den Gleichungen (8), § 63 (S. 124), die folgenden:

$$r_1 + r_2 = \frac{g W_{11} - 2f W_{12} + e W_{22}}{eg - f^2} + 2W,$$

$$r_1 r_2 = \frac{W_{11} W_{22} - W_{12}^2}{eg - f^2} + W \frac{g W_{11} - 2f W_{12} + e W_{22}}{eg - f^2} + W^2$$

oder:

$$(36)\quad \begin{cases} r_1 + r_2 = \Delta_2 W + 2W, \\ r_1 r_2 = W^2 + W\Delta_2 W + \Delta_{22} W, \end{cases}$$

wo die zweiten Differentialparameter Δ_2, Δ_{22}, wie gesagt, für die Grundform:

$$e du^2 + 2f du\, dv + g dv^2$$

zu berechnen sind. (Vgl. (24), S. 47.)

Von den beiden Ausdrücken (36) ist der erste wegen seiner Einfachheit besonders bemerkenswert; im folgenden machen wir von ihm einige wichtige Anwendungen.

§ 73. Flächen mit gegebenem Bilde eines conjugierten Systems.

Wir nehmen nun an, es sei das System (u, v) auf der Fläche ein conjugiertes. In diesem Falle muss $D' = 0$ oder infolge der mittelsten der Gleichungen (35)

$$W_{12} + fW = 0$$

sein, d. h. W muss eine Lösung der Laplace'schen Gleichung:

$$(37)\quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\frac{\partial \vartheta}{\partial v} - f\vartheta$$

sein, von der auch (nach (4) in § 63) X, Y, Z particulare Lösungen sind. Also: W e n n d a s S y s t e m (u, v) c o n j u g i e r t i s t, s o s i n d d i e E b e n e n c o o r d i n a t e n X, Y, Z, W L ö s u n g e n e i n u n d d e r s e l b e n

Laplace'schen Gleichung (37). Umgekehrt sieht man sofort: Sind die Ebenencoordinaten X, Y, Z, W Lösungen ein und derseben Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = a \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + c\vartheta,$$

so ist das System (u, v) auf der Fläche ein conjugiertes.

Die bereits in § 69 berührte Aufgabe, die Flächen mit gegebenem sphärischen Bilde eines conjugiertes Systems (u, v) zu bestimmen, wird somit auf die Integration der Laplace'schen Gleichung (37) zurückgeführt; jede (linear von X, Y, Z) unabhängige Lösung derselben liefert uns eine Fläche, die der gestellten Bedingung genügt.

Wir erwähnen noch, dass, wenn das System (u, v) auf der Fläche dasjenige der Haupttangentencurven ist, gleichzeitig $D = 0$, $D'' = 0$ ist, d. h. dann ist W ebenso wie X, Y, Z eine gemeinsame Lösung der Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \vartheta}{\partial v} - e\vartheta,$$
$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \vartheta}{\partial v} - g\vartheta.$$

Aus diesen Entwickelungen ergiebt sich der analytische Beweis des in § 58 (S. 111) ausgesprochenen Satzes: Bei den dualistischen Transformationen des Raumes gehen die conjugierten Systeme und die Haupttangentencurven einer Fläche in ebensolche über.

Hierbei brauchen wir uns, da nach dem angeführten Paragraphen der analoge Satz für projective Transformationen gilt, nur auf eine besondere Reciprocität zu beschränken, und wir wählen diejenige dualistische Transformation, die jeder Ebene des Raumes:

$$\xi X + Y\eta + \zeta Z = W$$

ihren Pol bezüglich der Kugel:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

d. h. den Punkt mit den Coordinaten:

$$x = \frac{X}{W}, \quad y = \frac{Y}{W}, \quad z = \frac{Z}{W}$$

zuordnet.

Wenn das System (u, v) ein conjugiertes System auf der Enveloppe der Ebenen (X, Y, Z, W) ist, so geht die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = a \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + c\vartheta,$$

der X, Y, Z, W genügen, mittels der Transformation:

$$\vartheta = W\varphi$$

in eine Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

über, der die Coordinaten x, y, z des Poles genügen. Es bilden daher auf der Ortsfläche des Punktes (x, y, z) nach § 58, S. 110, die Curven u, v ein conjugiertes System.

In ganz ähnlicher Weise erledigt sich der Fall der Haupttangentencurven.

§ 74. Flächen mit einer Schar Krümmungslinien in parallelen Ebenen.

Wir haben allgemein gesehen, dass die Bestimmung der Flächen mit gegebenem sphärischen Bilde (u, v) eines conjugierten Systems mit der Integration der Laplace'schen Gleichung (37) gleichbedeutend ist. Insbesondere gilt dieses von der Aufgabe, die Flächen mit gegebenen sphärischen Bildern der Krümmungslinien zu bestimmen. Und um hiervon eine einfache Anwendung zu geben, wollen wir jetzt alle diejenigen Flächen bestimmen, die (wie die Rotationsflächen) eine Schar Krümmungslinien in parallelen Ebenen besitzen.

Für jede dieser Curven ist das sphärische Bild offenbar ein Kreis in einer der Curvenebene parallelen Ebene*); es sind demnach die gesuchten Flächen durch die Eigenschaft gekennzeichnet, dass die sphärischen Bilder ihrer Krümmungslinien ein System von Meridianen und Parallelkreisen auf der Bildkugel sind. Daraus folgt, dass die Krümmungslinien des zweiten Systems gleichfalls eben sind und dass ihre Ebenen die ersteren Ebenen und die Fläche rechtwinklig schneiden.

Sind nun, wie gewöhnlich,

$$X = \sin u \cos v, \quad Y = \sin u \sin v, \quad Z = \cos u$$

die von den Parametern u, v der Parallelkreise und der Meridiane abhängigen Coordinaten eines Punktes der Bildkugel und ist also:

$$ds'^2 = du^2 + \sin^2 u \, dv^2$$

der Ausdruck für das Quadrat des Linienelementes der Kugel, so wird die zu integrierende Gleichung (37) nach Tabelle (A), § 35, folgende:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \operatorname{cotg} u \frac{\partial \vartheta}{\partial v}.$$

*) Es sei daran erinnert, dass in jedem Punkte einer Krümmungslinie ihre Tangente derjenigen des sphärischen Bildes parallel ist (vgl. § 62).

Ihr allgemeines Integral ist gegeben durch:

$$W = \sin u\, \varphi(v) + \psi(u),$$

wo $\varphi(v)$, $\psi(u)$ willkürliche Functionen von v bez. u sind. Die Gleichungen (34) liefern uns also für die gesuchten Flächen die Gleichungen:

$$(38)\quad \begin{cases} x = \cos v\,\varphi(v) - \sin v\,\varphi'(v) + \cos v\,[\psi(u)\sin u + \psi'(u)\cos u], \\ y = \sin v\,\varphi(v) + \cos v\,\varphi'(v) + \sin v\,[\psi(u)\sin u + \psi'(u)\cos u], \\ z = \psi(u)\cos u - \psi'(u)\sin u. \end{cases}$$

Die Ebenen der Curven $v = \text{Const.}$ sind senkrecht zu einem gewissen Cylinder, den sie längs der Erzeugenden schneiden. Die Axe dieses Cylinders ist der z-Axe parallel, und sein Schnitt mit der xy-Ebene wird durch die Curve:

$$(\mathrm{a})\quad \begin{cases} x = \cos v\,\varphi(v) - \sin v\,\varphi'(v), \\ y = \sin v\,\varphi(v) + \cos v\,\varphi'(v) \end{cases}$$

gegeben. In jeder der erwähnten Ebenen sind die Gleichungen der Curve v, bezogen auf die Normale der Curve (a) als η- und auf die Erzeugende des Cylinders als ζ-Axe, offenbar:

$$(\mathrm{b})\quad \begin{cases} \eta = \psi(u)\sin(u) + \psi'(u)\cos u, \\ \zeta = \psi(u)\cos(u) - \psi'(u)\sin u. \end{cases}$$

Wegen des Auftretens der beiden willkürlichen Functionen $\varphi(v)$ und $\psi(u)$ bleibt sowohl die Gestalt des (Leit-)Cylinders (a) als auch diejenige des Querschnittes (b) willkürlich, und es entstehen demnach die gesuchten Flächen auf folgende Weise: *Man nehme eine Cylinderfläche, zeichne in einer Ebene Π eine beliebige Curve Γ und eine beliebige Gerade v und bewege Π so, dass v der Reihe nach mit den Erzeugenden des Cylinders zusammenfällt und dabei Π normal zum Cylinder bleibt; dann beschreibt die ebene Curve Γ die gesuchte Fläche.*

Eine solche Fläche heisst eine *Gesimsfläche mit cylindrischer Abwickelung* (nach Monge: *moulure*)*). Ihre Krümmungslinien sind die verschiedenen Lagen der Curve Γ und die Schnitte mit Ebenen, die auf den Erzeugenden des Leitcylinders senkrecht stehen.

Wenn wir die Bezeichnungen unwesentlich abändern, nämlich mit v

*) Im allgemeinen werden diejenigen Flächen als *Gesimsflächen* (*moulures*) bezeichnet, bei denen die Krümmungslinien der einen Schar in Ebenen liegen, die zur Fläche normal sind. Sie entstehen durch die Bewegung einer ebenen Curve, deren Ebene, ohne zu gleiten, auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche rollt.

den Bogen des Querschnittes $z = 0$ des Leitcylinders, mit α den Winkel zwischen der Tangente des Schnittes und der x-Axe, mit

$$x = x(v), \quad y = y(v)$$

die Gleichungen des Schnittes des Cylinders mit der Ebene $z = 0$, endlich mit

$$\eta = U, \quad \zeta = \int \sqrt{1 - U'^2}\, du$$

die Gleichungen der erzeugenden Curve, bezogen auf ihren Bogen u, bezeichnen, so erhalten wir als Gleichungen der Fläche offenbar:

$$(39) \quad x = x(v) + \sin \alpha\, U, \quad y = y(v) - \cos \alpha\, U, \quad z = \int \sqrt{1 - U'^2}\, du,$$

also für das Quadrat des Linienelementes den Ausdruck:

$$(40) \qquad ds^2 = du^2 + \left(1 + \frac{U}{R}\right)^2 dv^2,$$

wo $R = R(v)$ der Krümmungsradius des Querschnittes des Leitcylinders ist.

Kapitel VI.

Geodätische Krümmung. — Geodätische Linien.

Tangentiale oder geodätische Krümmung. — Bonnet'scher Ausdruck. — Liouville-scher Ausdruck für die Krümmung K. — Geodätische Linien. — Verschiedene Formen ihrer Differentialgleichung. — Geodätisch parallele Linien. — Geodätische Ellipsen und Hyperbeln. — Geodätische Torsion einer Curve. — Allgemeine Sätze über die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linien. — Geodätische Linien auf den Liouville'schen Flächen, insbesondere auf den Rotationsflächen. — Satz von Gauss über die Totalkrümmung eines geodätischen Dreiecks. — Doppelte Orthogonalsysteme von Curven mit constanter geodätischer Krümmung.

---

§ 75. Tangentiale oder geodätische Krümmung orthogonaler Parameterlinien.

Wir betrachten auf einer Fläche S eine Curve C, die von einem Punkte M der Fläche ausgeht, und projicieren die Curve senkrecht auf die Tangentialebene in M. Die Krümmung ihrer Projection γ im Punkte M heisst die tangentiale oder geodätische Krümmung*) der Curve C im Punkte M, und der zugehörige Krümmungsmittelpunkt m der Curve γ wird als Mittelpunkt der geodätischen Krümmung der Curve C bezeichnet, während die Strecke Mm, deren reciproker Wert die geodätische Krümmung ist, den Namen Radius der geodätischen Krümmung führt. Wir bezeichnen diesen Radius mit

$$\varrho_g = \overline{Mm}$$

und beachten, dass er von M aus in der Tangentialebene in der zur Curve C normalen Richtung gemessen wird, nachdem auf der Normale der positive Sinn festgelegt worden ist. Wir wollen daher ϱ_g das positive oder negative Vorzeichen erteilen, je nachdem die Richtung von M nach m den positiven oder den negativen Sinn hat. Bezeichnen wir ferner mit $\frac{1}{\varrho}$ die (wie gewöhnlich absolut genommene) erste

*) Der Grund für die zweite Bezeichnung wird später (§ 80) erkannt werden.

Krümmung der Curve C in M und mit ε den Winkel, den die positive Richtung der Hauptnormale der Curve C in M mit der eben festgelegten positiven Richtung in der Tangentialebene normal zur Curve C bildet, so haben wir:

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\cos\varepsilon}{\varrho}\ ^{*)}.$$

Wir wollen nun den Ausdruck für die Tangentialkrümmung einer auf einer Fläche gezogenen Curve ableiten, wenn die Curve in krummlinigen Coordinaten durch die Gleichung:

$$\varphi(u, v) = 0$$

gegeben ist. Wir betrachten zunächst den Fall, in dem die Parameterlinien u, v auf einander senkrecht stehen, also

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

ist, und suchen die Ausdrücke für die geodätischen Krümmungen dieser Parameterlinien, die wir mit

$$\frac{1}{\varrho_u} \text{ bez. } \frac{1}{\varrho_v}$$

bezeichnen wollen. Infolge der obigen und der bereits früher hinsichtlich der positiven Richtungen der Parameterlinien getroffenen Festsetzungen kommen diesen Krümmungen vollkommen bestimmte Vorzeichen zu.

Für eine Curve $u = \text{Const.}$ haben wir unter Beibehaltung der gewöhnlichen Bezeichnungen aus der Curvenlehre (Kap. I):

$$ds_u = \sqrt{G}\, dv,$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Hieraus ergiebt sich durch eine neue Differentiation nach dem Bogen der Curve u und unter Berücksichtigung der Frenet'schen Formeln:

$$\frac{\cos\xi}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad \frac{\cos\eta}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\cos\zeta}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

wo ϱ der (absolut genommene) Radius der ersten Krümmung der Curve $u = \text{Const.}$ ist. Hieraus folgern wir:

---

*) Es ist dieses die Meusnier'sche Gleichung (§ 53, Kap. IV), angewandt auf die Curve C und den Querschnitt γ durch den Cylinder, der C auf die Tangentialebene projiciert. Man sieht, dass der Mittelpunkt m der geodätischen Krümmung derjenige Punkt ist, in welchem die Axe des Schmiegungskreises im Punkte M der Curve C die Tangentialebene schneidet.

$$\frac{1}{\varrho_u} = \frac{\cos \varepsilon}{\varrho} = \sum \frac{\cos \xi}{\varrho} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Nun ist:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

wegen:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

Ferner ergiebt sich aus der letzten Gleichung durch Differentiation nach v:

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = -\sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial u}.$$

Also ist:

(1)
$$\frac{1}{\varrho_u} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

und analog:

(1*)
$$\frac{1}{\varrho_v} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}.$$

§ 76. Bonnets Ausdruck für die geodätische Krümmung.

Die Ausdrücke (1) oder (1*) können wir durch Einführung der Differentialparameter auf eine andere Form bringen. Wir haben nämlich:

$$\Delta_1 u = \frac{1}{E}, \quad \Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{\frac{G}{E}}, \quad \nabla(u, \sqrt{E}) = \frac{1}{E} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u},$$

weil F gleich Null ist und nach § 35, sodass der Ausdruck (1) auch in der Form:

(2)
$$-\frac{1}{\varrho_u} = \frac{\Delta_2 u}{\sqrt{\Delta_1 u}} + \nabla\left(u, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 u}}\right)$$

geschrieben werden kann.

Nunmehr können wir leicht in ihrer ganzen Allgemeinheit die Aufgabe lösen: Eine Fläche ist auf ein beliebiges System von Parameterlinien u, v bezogen, für die das Quadrat des Linienelements die Form:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

annimmt, und es ist ferner die Gleichung:

$$\varphi(u, v) = \text{Const.}$$

einer Schar von Curven auf der Fläche gegeben; es soll die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_\varphi}$ dieser Curven berechnet werden.

Um auch das Vorzeichen von ϱ_φ eindeutig zu bestimmen, treffen wir die Festsetzung, dass als positive Richtung normal zu einer Curve

$\varphi =$ Const. in der Tangentialebene diejenige gewählt werden soll, längs welcher der Parameter φ wächst. Wählen wir zu Parameterlinien die Curven $\varphi =$ Const. und ihre Orthogonaltrajectorien $\psi =$ Const., so nimmt das Quadrat des Linienelements die Gestalt:

$$ds^2 = E_1 d\varphi^2 + G_1 d\psi^2$$

an, und wir haben wegen der Gleichung (1)

$$-\frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{E_1 G_1}} \frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial \varphi}$$

oder wegen der Gleichung (2)

$$(3) \qquad -\frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{\Delta_2 \varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} + \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}\right).$$

Wegen der grundlegenden Eigenschaft der Differentialparameter ist es gleichültig, ob wir sie in den neuen Coordinaten (φ, ψ) oder in den alten (u, v) berechnen, und es giebt uns demnach die vorstehende Gleichung den gesuchten Ausdruck. Die Entwickelung der rechten Seite giebt nach § 35:

$$-\frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right] +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}\right) + \frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{(EG-F^2)\Delta_1 \varphi}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{(EG-F^2)\Delta_1 \varphi}}\right)\right\}.$$

Wir erhalten somit für die geodätische Krümmung den Bonnetschen Ausdruck:

$$(4) \quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \Bigg\{ & \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}}\right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F\frac{\partial \varphi}{\partial u} - E\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}}\right)\Bigg\}. \end{aligned}\right.$$

Hierin ist die rechte Seite nach (3) ein Differentialparameter von φ. Dieser Umstand zieht eine sehr wichtige Eigenschaft der geodätischen Krümmung nach sich, deren geometrische Bedeutung wir in der Theorie der Abwickelbarkeit der Flächen auf einander erkennen werden.

Sind die Curven:

$$\varphi = \text{Const.}$$

nicht durch eine endliche Gleichung, sondern durch eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$Mdu + Ndv = 0$$

bestimmt, so können wir offenbar ihre geodätische Krümmung ebenfalls nach Gleichung (4) berechnen, indem wir berücksichtigen, dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v} = M : N$$

ist. Es folgt also:

$$(4^*) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho_\varphi} = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \dfrac{\partial}{\partial u} \left(\dfrac{FN - GM}{\sqrt{EN^2 - 2FMN + GM^2}} \right) + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\partial}{\partial v} \left(\dfrac{FM - EN}{\sqrt{EN^2 - 2FMN + GM^2}} \right) \right\}. \end{cases}$$

§ 77. Liouvilles Ausdruck für die Krümmung einer Fläche.

An die vorstehenden Ausdrücke schliesst sich ein weiterer bemerkenswerter an, der von Liouville für das Krümmungsmass K einer Fläche, ausgedrückt durch die geodätischen Krümmungen

$$\frac{1}{\varrho_u}, \; \frac{1}{\varrho_v}$$

der Parameterlinien gegeben worden ist. Aus der Bonnet'schen Gleichung (4) erhalten wir:

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho_u} = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\dfrac{\partial}{\partial v} \left(\dfrac{F}{\sqrt{G}} \right) - \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right], \\ \dfrac{1}{\varrho_v} = \dfrac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\dfrac{\partial}{\partial u} \left(\dfrac{F}{\sqrt{E}} \right) - \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right]. \end{cases}$$

Indem wir rechts für die Differentialquotienten der Coefficienten ihre Werte in den Christoffel'schen Symbolen nach (A), S. 67, einsetzen, erhalten wir die gleichbedeutenden Ausdrücke:

$$(5^*) \quad \frac{1}{\varrho_u} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{G\sqrt{G}} \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad \frac{1}{\varrho_v} = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{E\sqrt{E}} \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Nun benutzen wir den Ausdruck (III), § 29 (S. 53), für das Krümmungsmass K:

$$K = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) - \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{E} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \right) \right],$$

den wir infolge der zweiten der Gleichungen (5*) auch folgendermassen schreiben können:

$$\text{(a)} \qquad K = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\varrho_v}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right)\right].$$

Mittels der bekannten Gleichungen (S. 63):

$$\cos\Omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin\Omega = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{EG}}$$

führen wir den Winkel Ω zwischen den Parameterlinien u, v ein. Indem wir nämlich die erste dieser Gleichungen nach v differenzieren und für $\sin\Omega$ den durch die zweite Gleichung gegebenen Wert einsetzen, erhalten wir:

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{F}{2E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{F}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}\right].$$

Wenn wir rechts für die Differentialquotienten der Coefficienten die Werte in den Christoffel'schen Symbolen einsetzen, so folgt:

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial v} = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{G}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} + \frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}$$

oder wegen der ersten der Gleichungen (5*):

$$\frac{\sqrt{EG-F^2}}{E}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = -\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u} - \frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

Mithin nimmt der Ausdruck (a) die elegante und symmetrische Gestalt:

$$\text{(6)} \qquad K = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\varrho_v}\right)\right]$$

an. Dieses eben ist der Liouville'sche Ausdruck.

Falls die Parameterlinien auf einander senkrecht stehen $\left(\Omega = \frac{\pi}{2}\right)$, lautet er:

$$K = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\varrho_v}\right) + \frac{1}{\varrho_u}\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{1}{\varrho_v}\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$$

oder auch infolge der Gleichungen (1), (1*) mit Rücksicht darauf, dass

$$\sqrt{E}\,du, \quad \sqrt{G}\,dv$$

die Bogenelemente ds_v, ds_u der Parameterlinien sind:

$$\text{(6*)} \qquad K = \frac{\partial}{\partial s_v}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) + \frac{\partial}{\partial s_u}\left(\frac{1}{\varrho_v}\right) - \left(\frac{1}{\varrho_u}\right)^2 - \left(\frac{1}{\varrho_v}\right)^2. \text{*)}$$

---

*) Eine unmittelbare Folgerung aus dieser Gleichung ist der Satz: Nur auf den Flächen mit constantem negativem Krümmungsmass (den pseudosphärischen Flächen) giebt es doppelte Orthogonalsysteme von Curven von der Beschaffenheit, dass die Curven jedes Systems dieselbe constante geodätische Krümmung besitzen.

§ 78. Geodätische Linien.

Eine auf einer Fläche S gezogene Curve L nennen wir eine **geodätische Linie** von S, wenn in jedem Punkte von L die Hauptnormale der Curve mit der Flächennormale zusammenfällt; mit anderen Worten: die geodätischen Curven sind die Curven mit der Tangentialkrümmung Null*).

Von dieser Definition ausgehend wollen wir die Differentialgleichung der geodätischen Linien aufstellen.

Angenommen, G wäre eine solche Curve, so denken wir uns die krummlinigen Coordinaten (u, v) eines beweglichen Punktes von G als Functionen des Bogens s von G ausgedrückt und haben sofort die Beziehung:

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1. \tag{7}$$

Für die Curve G haben wir unter Anwendung der üblichen Bezeichnungen des Kapitels I:

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$
$$\cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds}.$$

Durch nochmalige Differentiation nach s und mit Rücksicht darauf, dass infolge der Voraussetzung

$$\cos\xi = \pm X, \quad \cos\eta = \pm Y, \quad \cos\zeta = \pm Z$$

ist, ergiebt sich infolge der Grundgleichungen (I), § 47, Kap. IV (S. 89), und nach den Freuet'schen Formeln:

$$\pm\frac{X}{\varrho} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2v}{ds^2} + \left[\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + DX\right]\left(\frac{du}{ds}\right)^2 +$$
$$+ 2\left[\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + D'X\right]\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} +$$
$$+ \left[\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + D''X\right]\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

nebst analogen Gleichungen für Y und Z. Daraus und aus (11), § 53, S. 101 ($\sigma = 0$), folgt, dass für eine geodätische Linie die **charakteristischen Gleichungen** gelten müssen:

*) Wenn auf der Fläche eine Gerade liegt, so braucht man nur die zweite Definition anzuwenden, um zu erkennen, dass sie eine geodätische Linie ist.

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{ds^2} + \left\{ {11 \atop 1} \right\} \left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2 \left\{ {12 \atop 1} \right\} \dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{ {22 \atop 1} \right\} \left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{d^2v}{ds^2} + \left\{ {11 \atop 2} \right\} \left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2 \left\{ {12 \atop 2} \right\} \dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \left\{ {22 \atop 2} \right\} \left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 = 0. \end{cases}$$

Diese zusammen mit der Gleichung (7) bestimmen den Verlauf der geodätischen Linien auf der Fläche.

Für die Gleichungen (8) können wir auch diejenigen setzen, welche sich aus ihnen ergeben, wenn wir das eine Mal die erste mit E, die zweite mit F, das andere Mal die erste mit F, die zweite mit G multiplicieren und jedesmal addieren, d. h. nach (18*), S. 44, die Gleichungen:

$$E\frac{d^2u}{ds^2} + F\frac{d^2v}{ds^2} + \begin{bmatrix} 11 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\begin{bmatrix} 12 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \begin{bmatrix} 22 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0,$$

$$F\frac{d^2u}{ds^2} + G\frac{d^2v}{ds^2} + \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \begin{bmatrix} 22 \\ 2 \end{bmatrix} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichungen können nach (A), S. 67, in der folgenden einfacheren Form geschrieben werden:

$$(9)\quad \begin{cases} 2\dfrac{d}{ds}\left(E\dfrac{du}{ds} + F\dfrac{dv}{ds}\right) = \dfrac{\partial E}{\partial u}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \dfrac{\partial G}{\partial u}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2, \\ 2\dfrac{d}{ds}\left(F\dfrac{du}{ds} + G\dfrac{dv}{ds}\right) = \dfrac{\partial E}{\partial v}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 + 2\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2. \text{*)} \end{cases}$$

Wollen wir endlich die Differentialgleichung der geodätischen Linien ansetzen, indem wir als den die einzelnen Curvenpunkte bestimmen-

---

*) Es mag darauf hingewiesen werden, dass von den beiden Gleichungen (9) oder auch (8) die eine eine Folge der andern und der Gleichung (7) ist. Durch Differentiation der letzteren nach s ergiebt sich nämlich die Identität:

$$(a)\qquad \alpha\frac{du}{ds} + \beta\frac{dv}{ds} = 0,$$

wo

$$\alpha = 2\frac{d}{ds}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right) - \frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2,$$

$$\beta = 2\frac{d}{ds}\left(F\frac{du}{ds} + G\frac{dv}{ds}\right) - \frac{\partial E}{dv}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 - 2\frac{\partial F}{dv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

gesetzt ist.

Aus dieser Identität (a), die für jede beliebige auf der Fläche gelegene Curve gültig ist, folgt, dass, abgesehen von den Parameterlinien u, v, für jede beliebige Curve die eine der beiden Gleichungen (9):

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

die andere nach sich zieht. Handelt es sich aber darum, die Eigenschaft, dass eine der Parameterlinien, z. B. eine Curve $v =$ Const., eine geodätische Linie ist, zum Ausdruck zu bringen, so müssen wir die zweite Bedingung $\beta = 0$ ansetzen, da die erste, $\alpha = 0$, in diesem Falle identisch erfüllt ist.

den Parameter nicht gerade die Bogenlänge wählen, sondern ihn willkürlich lassen, so brauchen wir nur aus den Gleichungen (8) die folgende abzuleiten:

$$(10)\quad du\,d^2v - dv\,d^2u + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} du^3 + \left(2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) du^2 dv +$$
$$+ \left(\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) du\,dv^2 - \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} dv^3 = 0,$$

die offenbar giltig ist, welches auch die unabhängige Veränderliche sein mag. Nehmen wir insbesondere u als unabhängige Veränderliche und denken wir uns die Gleichung der geodätischen Linie in der Form:

$$v = \varphi(u),$$

geschrieben, so erhalten wir, wenn wir

$$v' = \frac{du}{dv}, \quad v'' = \frac{d^2v}{du^2}$$

setzen, zur Bestimmung der geodätischen Linien die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(10^*)\quad v'' - \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} v'^3 + \left(\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) v'^2 +$$
$$+ \left(2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) v' + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Aus diesen verschiedenen Gestalten der Gleichung der geodätischen Linien ergiebt sich: Auf jeder Fläche giebt es doppelt unendlich viele geodätische Linien; eine solche Linie ist bestimmt, wenn ein Flächenpunkt, durch den sie hindurchgehen soll, und die Richtung, die sie in diesem Punkte hat, gegeben sind.

§ 79. **Kürzeste Flächencurve zwischen zwei gegebenen Punkten.**

Auf die Theorie der geodätischen Linien werden wir auch durch die folgende Aufgabe aus der Variationsrechnung geführt: Auf einer Fläche sind zwei Punkte A und B gegeben; gesucht wird die kürzeste Linie, die auf der Fläche A mit B verbindet. Angenommen, G sei die gesuchte Linie, so müssen wir nach den Regeln der Variationsrechnung die Bedingung dafür aufstellen, dass die erste Variation der Länge des zwischen A und B gelegenen Bogenstückes von G gleich Null wird, sobald G, die Endpunkte A, B als fest gedacht, eine unendlich kleine Gestaltsänderung erfährt. Wenn wir nun u und v längs G durch den Bogen s von G ausdrücken, so müssen wir also:

$$\delta \int_A^B ds = 0$$

setzen, wo u und v durch die Gleichung verknüpft sind:

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1.$$

Wenden wir die Regeln der Variationsrechnung an, so erhalten wir auf diese Weise genau die Gleichungen (9); daraus schliessen wir: Die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten der Fläche ist notwendigerweise eine geodätische Linie, d. h. die Hauptnormale der Curve muss in jedem Punkte mit der Flächennormale zusammenfallen.

Es ist jedoch zu beachten, dass, wenn auf einer geodätischen Linie G zwei Punkte A und B willkürlich angenommen werden, durchaus nicht behauptet werden darf, dass G die kürzeste Linie sei, die auf der Fläche A mit B verbindet. Diese Eigenschaft findet, wie wir demnächst sehen werden, nur dann statt, wenn A und B einander hinreichend nahe sind und die Linie G innerhalb eines hinlänglich kleinen Gebietes liegt. Als Beleg braucht man nur auf einer Kugel einen solchen Bogen eines grössten Kreises (der hier eben geodätische Linie ist), der grösser als die Halbperipherie ist, oder auf einem geraden Kreiscylinder einen Bogen einer Schraubenlinie, der mehr als einen halben Umgang auf dem Cylinder macht, zu betrachten, um sich geometrisch von der Richtigkeit unserer Behauptung zu überzeugen. Die bleibende Eigenschaft der geodätischen Linien während ihres ganzen Verlaufes ist diejenige, von der wir, um sie zu definieren, im vorigen Paragraphen ausgegangen sind; die andere, dass sie nämlich den kürzesten Weg zwischen zweien ihrer Punkte angiebt, gilt im allgemeinen nur für hinreichend kurze Bogen.

§ 80. Gaussische Form der Differentialgleichung der geodätischen Linien.

Gauss hat die Differentialgleichung der geodätischen Linien durch Einführung des Neigungswinkels ϑ der geodätischen Linie gegen die Curven v auf eine bemerkenswerte Form gebracht. Messen wir ϑ genau so wie in § 34, Kap. III, so haben wir die Gleichungen:

$$\text{(a)}\qquad \cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right),\quad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{EG-F^2}}{\sqrt{E}}\frac{dv}{ds}.$$

Setzen wir nun voraus, dass die betreffende geodätische Linie nicht eine Curve $v = \text{Const.}$ ist, so können wir die Bedingung dafür, dass sie eine geodätische Linie ist, mittels der ersten der Gleichungen (9) (s. die Anmerkung zu S. 153) aufstellen. Dieselbe lässt sich wie folgt schreiben:

(b) $$2ds\,d(\sqrt{E}\cos\vartheta) = \frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2.$$

Ferner haben wir infolge der Gleichungen (a) selbst:

$$2ds\,d(\sqrt{E}\cos\vartheta) = \frac{1}{E}(E\,du + F\,dv)\,dE - 2\sqrt{EG-F^2}\,dv\,d\vartheta =$$

$$= \frac{\partial E}{\partial u}du^2 + \frac{\partial E}{\partial v}du\,dv + \frac{F}{E}dv\left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right) - 2\sqrt{EG-F^2}\,dv\,d\vartheta.$$

Indem wir dieses in (b) einsetzen, das beiden Seiten gemeinsame Glied $\frac{\partial E}{\partial u}du^2$ heben und dann durch $2dv$, das nach der Voraussetzung nicht gleich Null ist, dividieren, erhalten wir die Gaussische Gleichung:

(11) $$\begin{cases} \sqrt{EG-F^2}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right) + \\ \qquad + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{\partial F}{\partial u}du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv. \end{cases}$$

Dieselbe gilt, wie unmittelbar ersichtlich ist, auch in dem zuerst ausgeschlossenen Falle einer geodätischen Linie $v = \text{Const.}$

Stehen insbesondere die Curven u, v auf einander senkrecht, so erhalten wir die einfachere Gleichung:

$$\sqrt{EG}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv,$$

die wir auch in der Form:

(11*) $$d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}du - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}dv$$

schreiben können.

Mittels dieser Gleichungen können wir eine zweite Definition der tangentialen oder geodätischen Krümmung einer Curve geben, durch welche die letztere Bezeichnung gerechtfertigt wird. Es sei l eine beliebige Curve auf S; wir betrachten einen Punkt M dieser Curve, nehmen einen zweiten M sehr nahe gelegenen Punkt M' auf l an und ziehen in M und M' die l berührenden geodätischen Linien, die sich in einem Punkte N schneiden und einen sehr kleinen Winkel Δ_ε mit einander bilden werden. Dividieren wir Δ_ε durch die Länge Δ_s des Bogens MM', so können wir beweisen, dass der Grenzwert des Verhältnisses $\frac{\Delta_\varepsilon}{\Delta_s}$, wenn sich M' dem Punkte M unendlich nähert, gleich der geodätischen Krümmung der Curve l im Punkte M ist.

Zum Beweise nehmen wir die Parameterlinien u, v senkrecht auf einander an. Es seien ferner $u=0$ die Curve l und $(0, v)$, $(0, v+dv)$ die beiden Punkte M bez. M' auf der Curve l. Es seien endlich g, g'

die geodätischen Linien, die l in M und M' berühren, also N ihr Schnittpunkt. Bezeichnen wir noch mit P den Punkt, in dem die geodätische Linie g die Curve $v + dv$ unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} + d\vartheta$ schneidet, da ϑ in M gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Nach (11*) ist dann:

$$d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} du - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv.$$

Da du gleich Null ist, so kommt:

$$d\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv.$$

Das unendlich kleine Dreieck $M'NP$ kann aber bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung als geradlinig angesehen werden, und der von g und g' gebildete Winkel bei N wird durch $d\vartheta$ angegeben. Ferner ist:

$$\text{Bogen } \overline{MM'} = ds_u = \sqrt{G}\, dv$$

und folglich:

$$\lim_{\Delta_s = 0} \frac{\Delta_\varepsilon}{\Delta_s} = \frac{d\vartheta}{ds_u} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Dieser Wert stimmt mit dem in § 75 (S. 148) für die Tangentialkrümmung $\frac{1}{\varrho_u}$ der Curven u berechneten Werte (1) genau überein.

Auf diese zweite Art definiert ist die geodätische Krümmung einer auf einer Fläche gelegenen Curve die natürliche Verallgemeinerung des Begriffs der gewöhnlichen Krümmung einer ebenen Curve, wenn die Geraden (die geodätischen Linien) der Ebene durch die geodätischen Linien der Fläche ersetzt werden.

Auch folgt daraus eine weitere charakteristische Eigenschaft der geodätischen Krümmung, der zufolge sie auch Abwickelungskrümmung genannt werden kann. Es besteht nämlich der Satz: Die geodätische Krümmung einer auf einer Fläche S gelegenen Curve L ist gleich der gewöhnlichen Krümmung derjenigen ebenen Curve, in die L übergeht, wenn die der Fläche S längs L umschriebene abwickelbare Fläche Σ in eine Ebene ausgebreitet wird. Da sich nämlich S und Σ längs der Curve L berühren, so hat die Curve L die nämliche geodätische Krümmung, mag sie nun als zu S oder als zu Σ gehörig betrachtet werden. Bei der Abwickelung von Σ in eine Ebene bleiben aber die Längen der Seiten und die Winkel der auf Σ gezeichneten Figuren ungeändert, und es verwandeln sich die geodätischen Linien von Σ in die Geraden der Ebene.

Wenden wir diesen Satz z. B. auf die Bestimmung der geodätischen Krümmung eines Parallelkreises auf einer Rotationsfläche an und berücksichtigen wir, dass in diesem Falle die umschriebene abwickelbare Fläche ein Rotationskegel ist, der mit der Fläche die Drehaxe gemeinsam hat, so kommen wir zu dem Ergebnis:

Der Radius der geodätischen Krümmung eines Parallelkreises auf einer Rotationsfläche ist gleich dem Stück der Meridiantangente zwischen dem Berührungspunkt und der Drehaxe.

§ 81. Geodätisch parallele Linien.

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien kann nur in wenigen besonderen Fällen integriert werden; trotzdem kann man, von der Differentialgleichung selbst ausgehend, einige wichtige Eigenschaften dieser Linien ableiten, und mit diesen wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Wir betrachten zunächst eine einfach unendliche Schar von geodätischen Linien und ihre orthogonalen Trajectorien. Dieses doppelte Orthogonalsystem wählen wir als Coordinatensystem (u, v), und wir setzen voraus, dass die Curven v die geodätischen seien. Dann haben wir:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2$$

und nach Voraussetzung (vgl. (1*), S. 148):

$$\frac{1}{\varrho_v} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

d. h.:

$$\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0$$

oder:

$$\sqrt{E} = U,$$

wo U eine Function von u allein ist. Wir ersetzen nun den Parameter u, der die einzelnen orthogonalen Trajectorien bestimmt, durch $\int U du$. Dann nimmt das Quadrat des Linienelementes die charakteristische Form:

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2 \tag{12}$$

an, aus der sich sehr wichtige Folgerungen ziehen lassen. Betrachten wir den Bogen einer beliebigen geodätischen Linie v, der zwischen zwei festen Curven des Systems u, etwa

$$u = u_0, \quad u = u_1$$

liegt, so ist seine Länge durch das Integral:

$$\int_{u_0}^{u_1} du = u_1 - u_0$$

gegeben, das von v ganz unabhängig ist. Daraus folgt der Satz:

A) Die Bogen, die auf den geodätischen Linien v von zweien ihrer orthogonalen Trajectorien ausgeschnitten werden, haben sämtlich gleiche Länge.

Dieser Satz kann auch in der folgenden Fassung ausgesprochen werden:

B) Werden durch die Punkte einer Curve L die orthogonalen geodätischen Linien g gezogen und auf allen diesen von L aus Bogen von gleicher Länge abgetragen, so ist der Ort der Endpunkte dieser Bogen wieder eine orthogonale Trajectorie der geodätischen Linien g*).

Aus diesem Grunde werden die orthogonalen Trajectorien einer einfach unendlichen Schar von geodätischen Linien geodätisch parallel genannt. Bemerkenswert ist der Ausdruck für die Gaussische Krümmung K der Fläche in den geodätischen Coordinaten u, v der Gleichungen (12). Er lautet nach Gleichung (18), S. 68:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}. \tag{13}$$

Wir wollen nun die Bedingung dafür aufstellen, dass eine einfach unendliche Curvenschar, deren Gleichung

$$\varphi(u, v) = \text{Const.}$$

ist, aus geodätisch parallelen Curven besteht. Wählen wir die Curven $\varphi =$ Const. und ihre orthogonalen Trajectorien $\psi =$ Const. zu Parameterlinien, so nimmt das Quadrat des Linienelementes die Form:

$$ds^2 = E_1 d\varphi^2 + G_1 d\psi^2$$

an, und es ist nach § 35:

$$\Delta_1 \varphi = \frac{1}{E_1}.$$

Folglich erhalten wir dafür, dass die Curven ψ geodätische sein sollen:

$$\Delta_1 \varphi = f(\varphi),$$

wo $f(\varphi)$ eine Function von φ allein ist. Also:

---

*) Es ist dieses eine charakteristische Eigenschaft der geodätischen Linien. D. h.: wenn in einem doppelten Orthogonalsystem (u, v) die Bogen aller Curven v zwischen zwei beliebigen orthogonalen Trajectorien u_0 und u_1 gleich lang sind, so sind die Curven v geodätische Linien. In der That, wählt man den Bogen u der Curven v, von einer festen orthogonalen Trajectorie an gerechnet, als Parameter, so ergiebt sich: $E = 1$, also die Form (12).

Damit die Curven $\varphi = \text{Const.}$ geodätisch parallel sind, ist notwendig und hinreichend, dass sich

$$\Delta_1(\varphi) = f(\varphi)$$

ergiebt.

Führen wir unter dieser Voraussetzung statt des Parameters φ den von einer festen orthogonalen Trajectorie an gerechneten Bogen ϑ der geodätischen Linien ψ als Parameter ein, d. h. setzen wir:

$$\vartheta = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}},$$

so erhalten wir:

$$\Delta_1 \vartheta = 1.$$

Wir haben somit das wichtige Ergebnis:

Ist die Function $\vartheta(u, v)$ ein Integral der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta_1 \vartheta = 1,$$

so sind die Curven $\vartheta = \text{Const.}$ geodätisch parallel, und es ist ϑ der von einer festen Curve $\vartheta = \vartheta_0$ an gerechnete Bogen der orthogonalen geodätischen Linien.

§ 82. Geodätische Kreise.

In Satz B) des vorigen Paragraphen ist die Curve L willkürlich. Wenn wir annehmen, dass sie um einen Flächenpunkt O beschrieben, sehr klein und geschlossen ist, wenn wir sie ferner um O immerfort zusammenziehen und schliesslich auf diesen Punkt zusammenschrumpfen lassen, so ergiebt sich aus Satz B) der folgende:

Werden auf den geodätischen Linien, die von einem Punkte O ausgehen, von O Bogen von gleicher Länge abgetragen, so ist der Ort der Endpunkte dieser Bogen eine zu allen diesen geodätischen Linien orthogonale Curve.

Das Quadrat des Linienelementes der Fläche nimmt, wenn diese geodätischen Linien und ihre orthogonalen Trajectorien zu Parameterlinien gewählt werden, ebenfalls die Gestalt (12) an.

Auf strengere und directere Art können wir den letzten Satz wie folgt beweisen: Als Parameter v, der die einzelnen von O ausgehenden geodätischen Linien bestimmt, wählen wir den Winkel, den eine veränderliche geodätische Linie des Büschels mit einer festen bildet, und als Curven u den Ort der Endpunkte der geodätischen Bogen, die in der Länge u von O aus abgetragen werden. Das Quadrat des Linienelementes der Fläche möge dann die Gestalt:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

annehmen.

Da nun das Bogenelement der geodätischen Linien gleich du ist, so haben wir sofort: $E=1$, und da die Linien v geodätische sind, so ist (§ 77, (5)):

$$\frac{1}{\varrho_v}=\frac{1}{\sqrt{G-F^2}}\frac{\partial F}{\partial u}=0$$

und folglich:

$$F=\varphi(v),$$

wo φ eine Function von v allein bezeichnet. Wenn nun x_0, y_0, z_0 die Coordinaten von O sind, so reducieren sich die Functionen:

$$x(u,v),\quad y(u,v),\quad z(u,v)$$

für $u=0$, was auch v sein mag, auf die drei Constanten x_0, y_0, z_0. Es ist daher:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{u=0}=0,\quad \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{u=0}=0,\quad \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u=0}=0,$$

also auch:

$$(F)_{u=0}=0.$$

Da nun aber F von u unabhängig ist, so folgt hieraus, dass F überhaupt gleich Null ist, d. h. die Curven u, v stehen auf einander senkrecht, wie behauptet wurde. Das Quadrat des Linienelements nimmt daher auch hier die Gestalt an:

$$ds^2=du^2+G\,dv^2.$$

Aber die Function G besitzt in dem vorliegenden Falle besondere bemerkenswerte Eigenschaften. Zu diesem Zwecke entwickeln wir

$$x(u,v),\quad y(u,v),\quad z(u,v)$$

in der Umgebung von O nach Potenzen von u, wobei wir nur bis zu den zweiten Potenzen von u gehen und das Coordinatensystem so legen, dass der Anfangspunkt mit O, die z-Axe mit der Flächennormale und die x-Axe mit der Tangente der geodätischen Linie $v=0$ in O zusammenfällt. Wir haben dann bei passender Wahl des Parameters v:

$$x=u\cos v+\varepsilon_1,$$
$$y=u\sin v+\varepsilon_2,$$
$$z=\frac{u^2}{2\varrho}+\varepsilon_3,$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ bezüglich u unendlich klein von der dritten Ordnung sind und ϱ den Radius der ersten Krümmung der geodätischen Linie $v=0$ bezeichnet. Daraus folgt:

$$G=u^2+\eta,$$

wo η unendlich klein von der dritten Ordnung in u ist, und also:

$$(\sqrt{G})_{u=0}=0,\quad \left(\frac{\partial\sqrt{G}}{du}\right)_{u=0}=1.$$

Berücksichtigen wir ferner die Gleichung (13), nach der

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -K\sqrt{G}$$

ist, so folgern wir daraus weiter:

$$\left(\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}\right)_{u=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial u^3}\right)_{u=0} = -K_0,$$

wo K_0 das Krümmungsmass der Fläche in O ist.

Entwickeln wir $\sqrt{G}$ nach Potenzen von u, so erhalten wir demnach die Gleichung:

(14) $$\sqrt{G} = u - \frac{K_0 u^3}{6} + \cdots.$$

In dem Falle, den wir augenblicklich betrachten, werden die Curven $u = \text{Const.}$, welche die Eigenschaft besitzen, dass alle ihre Punkte von dem festen Punkte O gleichen geodätischen Abstand haben, geodätische Kreise*) genannt. Der Punkt O heisst ihr Mittelpunkt, und der constante geodätische Abstand ihr Radius.

Aus der Gleichung (14) erhalten wir für den Umfang C eines geodätischen Kreises mit dem unendlich kleinen Radius u, nämlich für

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, dv,$$

den Wert:

(15) $$C = 2\pi u - \frac{\pi K_0 u^3}{3} + \varepsilon,$$

wo ε von höherer als dritter Ordnung in u ist.

Aus der geodätischen Form (12) des Quadrates des Linienelements können wir endlich den Beweis des folgenden Satzes ableiten: Für zwei Punkte A und B, die in hinreichend kleiner Entfernung auf einer geodätischen Linie g angenommen werden, ist diese Linie in der That der kürzeste Weg, auf dem man auf der Fläche von A nach B gelangen kann.

Betrachten wir nämlich in der Gleichung (12) für u, v einen

*) Wegen der eben genannten Eigenschaft sind die geodätischen Kreise die natürliche Verallgemeinerung der Kreise in der Ebene. Geht man jedoch von der anderen Eigenschaft des gewöhnlichen Kreises aus, dass er nämlich eine constante Krümmung besitzt, so wird man dazu geführt, als geodätische Kreise die Curven mit constanter geodätischer Krümmung zu definieren. Einige Autoren, wie Darboux, stellen gerade diese zweite Definition auf. Was zu beachten ist, ist der Umstand, dass die beiden Definitionen, die sich im Falle der Ebene (und allgemeiner der Flächen mit constantem Krümmungsmass) decken, für eine allgemeine Fläche Curven ganz verschiedener Art charakterisieren.

Aenderungsbereich, in dem die Function G eindeutig, endlich und stetig ist, und sind

$$A(u_0, v), \quad B(u_1, v)$$

zwei Punkte, die in diesem Bereich auf der geodätischen Linie v gewählt sind, so ist die Länge des geodätischen Bogens AB durch den Ausdruck:

$$\int_{u_0}^{u_1} du = u_1 - u_0$$

gegeben. Für eine andere Curve:

$$v = \varphi(u),$$

welche dieselben Punkte A und B verbindet und ganz in dem betrachteten Bereiche liegt, ist die Länge des Bogens zwischen A und B durch

$$s = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{1 + G\varphi'^2(u)}\, du$$

gegeben, und dieser Wert übertrifft offenbar den Wert $\int_{u_0}^{u_1} du = u_1 - u_0$, da G positiv ist.

§ 83. Geodätische Ellipsen und Hyperbeln.

Auf einer Fläche S nehmen wir zwei Curven C und C' an, die nicht geodätisch parallel sind, und wählen als Parameterlinien u, v die geodätischen Parallelen zu C und C', als Parameter u die geodätische Entfernung von der Grundcurve C und als Parameter v diejenige von der Grundcurve C'. Wenn

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

der Ausdruck für das Quadrat des Linienelements ist, so müssen wir nach dem Schlussergebnis des § 81

$$\Delta_1 u = 1, \quad \Delta_1 v = 1,$$

d. h.

$$\frac{G}{EG - F^2} = 1, \quad \frac{E}{EG - F^2} = 1$$

oder

$$E = G, \quad F = \sqrt{E(E-1)}$$

setzen.

Wird mit ω der Winkel der Parameterlinien bezeichnet, so ist demnach (vgl. S. 63):

$$E = G = \frac{1}{\sin^2 \omega}, \quad F = \frac{\cos \omega}{\sin^2 \omega}$$

und folglich:

(16)
$$ds^2 = \frac{du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2}{\sin^2\omega}.$$

Führen wir nun als neue Parameterlinien die Curven:

$$u + v = \text{Const.}, \quad u - v = \text{Const.}$$

ein und setzen wir noch:

$$u + v = 2\alpha, \quad u - v = 2\beta,$$

so erhalten wir:

(17)
$$ds^2 = \frac{d\alpha^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}} + \frac{d\beta^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}}.$$

Die neuen Parameterlinien stehen also auf einander senkrecht, d. h.: Auf jeder beliebigen Fläche bilden die Ortscurven derjenigen Punkte, für welche die Summe oder die Differenz der geodätischen Entfernungen von zwei festen Grundcurven constant ist, ein Orthogonalsystem (Weingarten).

Wenn die Curven C und C' durch unendliches Zusammenziehen auf Punkte einschrumpfen, so ist das soeben betrachtete System die Verallgemeinerung des Systems confocaler Ellipsen und Hyperbeln in der Ebene. Es werden daher auch allgemein die Curven:

$$\alpha = \text{Const.}, \quad \beta = \text{Const.},$$

welches auch die Grundcurven sein mögen, geodätische Ellipsen und Hyperbeln genannt.

Der Ausdruck (17) für das Quadrat des Linienelements gilt nach dem Vorstehenden für jede Fläche. Es ist klar, dass, wenn es auf diese Form gebracht ist, die Curven $\alpha = \text{Const.}$, $\beta = \text{Const.}$ geodätische Ellipsen und Hyperbeln bezüglich gewisser zweier Grundcurven sind. Um das Quadrat des Linienelements einer gegebenen Fläche wirklich auf die Form (17) zu bringen, braucht man nur die geodätischen Linien der Fläche und ihren Bogen zu kennen. Somit werden wir z. B. für die Ebene und die Kugel in der allgemeinsten Weise das Quadrat des Linienelements auf diese Form bringen können*).

§ 84. Torsion einer geodätischen Linie.

Eine geodätische Linie ist durch den in einer gegebenen Richtung erfolgenden Durchgang durch einen Punkt P bestimmt (vgl. § 78). Wir stellen uns die Aufgabe, aus diesen beiden Elementen einer geodätischen

*) In betreff der hierauf bezüglichen wirklichen Gleichungen s. Darboux, 2. Bd., S. 422.

Linie g ihre Torsion $\frac{1}{T_g}$ in P nebst dem zugehörigen Vorzeichen zu berechnen.

Für eine solche geodätische Linie ist unter Beibehaltung der üblichen Bezeichnungen:

$$\cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}, \quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

$$\cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds},$$

$$\cos\xi = \pm X, \quad \cos\eta = \pm Y, \quad \cos\zeta = \pm Z,$$

also:

$$\cos\lambda = \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\eta & \cos\zeta \end{vmatrix} = \pm\left(Z\frac{\partial y}{\partial u} - Y\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{du}{ds} \pm \left(Z\frac{\partial y}{\partial v} - Y\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{dv}{ds}$$

nebst analogen Ausdrücken für $\cos\mu$ und $\cos\nu$. Unter Berücksichtigung der Identitäten (§ 68, S. 131 Anmerkung):

$$Z\frac{\partial y}{\partial u} - Y\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(F\frac{\partial x}{\partial u} - E\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

$$Z\frac{\partial y}{\partial v} - Y\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(G\frac{\partial x}{\partial u} - F\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

ergiebt sich:

$$\cos\lambda = \pm\frac{F\frac{\partial x}{\partial u} - E\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{du}{ds} \pm \frac{G\frac{\partial x}{\partial u} - F\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{dv}{ds},$$

$$\cos\mu = \pm\frac{F\frac{\partial y}{\partial u} - E\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{du}{ds} \pm \frac{G\frac{\partial y}{\partial u} - F\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{dv}{ds},$$

$$\cos\nu = \pm\frac{F\frac{\partial z}{\partial u} - E\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{du}{ds} \pm \frac{G\frac{\partial z}{\partial u} - F\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{dv}{ds}.$$

Aber nach den Frenet'schen Formeln ist:

$$\frac{1}{T_g} = -\sum\cos\lambda\frac{d\cos\xi}{ds} = \mp\sum\cos\lambda\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right).$$

Wenn für $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ die obigen Werte eingesetzt werden, so fällt die Zweideutigkeit des Vorzeichens fort und es ergiebt sich (nach S. 87) als der gesuchte Ausdruck:

$$(18)\quad \frac{1}{T_g} = \frac{(FD-ED')du^2 + (GD-ED'')du\,dv + (GD'-FD'')dv^2}{(Edu^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2)\sqrt{EG-F^2}}.$$

Derselbe giebt also die Torsion derjenigen geodätischen Linie an, die durch den Flächenpunkt (u, v) in der durch das Verhältnis $\frac{dv}{du}$ bestimmten Richtung hindurchgeht.

Der Zähler dieses Ausdrucks ist, wie man sieht, genau die Jacobische Determinante der beiden Grundformen:

$$\begin{vmatrix} Ddu + D'dv & D'du + D''dv \\ Edu + Fdv & Fdu + Gdv \end{vmatrix},$$

die, gleich Null gesetzt, die Differentialgleichung der Krümmungslinien liefert. Daraus ergeben sich die folgenden leicht auch direct zu beweisenden Sätze*):

1) Wenn eine Krümmungslinie eine geodätische Linie ist, so ist sie eben.

2) Jede ebene geodätische Linie ist eine Krümmungslinie.

§ 85. Geodätische Torsion einer Flächencurve.

Die Ergebnisse des vorigen Paragraphen führen dazu, für eine beliebige auf einer Fläche gezogene Linie L in jedem ihrer Punkte noch ein weiteres geometrisches Element einzuführen, dessen Betrachtung von Wichtigkeit ist, die sogenannte geodätische Torsion. Nach Bonnet wird mit diesem Namen die Torsion derjenigen geodätischen Linie bezeichnet, welche die Curve L in einem Punkte P berührt**). Die geodätische Torsion $\frac{1}{T_g}$ einer Curve L ist durch den Ausdruck (18) gegeben, wobei unter du, dv die Zunahmen der krummlinigen Coordinaten längs L zu verstehen sind.

---

*) Werden die Krümmungslinien als Parameterlinien gewählt, so nimmt die Gleichung (18) die einfachere Gestalt an (vgl. § 54, S. 102):

$$\frac{1}{T_g} = \sqrt{EG}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\cos\vartheta \sin\vartheta,$$

d. h.:

$$\frac{1}{T_g} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\sin 2\vartheta.$$

Hieraus geht hervor, dass die Richtungen der Krümmungslinien das Büschel der von P ausgehenden geodätischen Linien in zwei Teile zerlegen; die geodätischen Linien der einen Schaar sind alle rechts, diejenigen der anderen alle links gewunden. Zwei auf einander senkrechte geodätische Linien haben dem absoluten Wert nach gleiche, dem Zeichen nach entgegengesetzte Torsion. Diejenigen geodätischen Linien, welche die Winkel zwischen den Hauptrichtungen halbieren, haben die grösste Torsion, nämlich $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

**) Er sei darauf hingewiesen, dass die Bezeichnung „geodätische Torsion" der Bezeichnung „geodätische oder tangentiale Krümmung" nicht analog ist, da sich sonst rückwärts als die tangentiale Krümmung der geodätischen Linie gerade diejenige ergäbe, die wir die normale Krümmung genannt haben, während sie doch nach Definition gleich Null ist.

Aus dieser Gleichung folgt für die Krümmungslinien offenbar die weitere Definition:

Die Krümmungslinien sind diejenigen Curven, die in jedem Punkte die geodätische Torsion Null besitzen.

Wir sehen nun, dass aus der Gleichung (18) speciell für die geodätischen Torsionen $\frac{1}{T_u}, \frac{1}{T_v}$ der Parameterlinien die Ausdrücke folgen:

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{T_u} = \dfrac{GD' - FD''}{G\sqrt{EG - F^2}}, \\[2ex] \dfrac{1}{T_v} = \dfrac{FD - ED'}{E\sqrt{EG - F^2}}, \end{cases}$$

und, wenn überdies die Curven u, v auf einander senkrecht stehen, $(F = 0)$:

$$(19^*)\qquad \frac{1}{T_u} = -\frac{1}{T_v} = \frac{D'}{\sqrt{EG}},$$

woraus hervorgeht, dass zwei von einem Punkte ausgehende und auf einander senkrechte geodätische Linien gleiche, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Torsion haben. (Vgl. die vorletzte Anmerkung.)

Wir wollen nun die Beziehung aufsuchen, die zwischen der geodätischen und der absoluten Torsion einer beliebigen auf einer Fläche gezogenen Curve besteht. Der Einfachheit halber wählen wir zu diesem Zwecke ein orthogonales System als Parameterlinien u, v, und die in Rede stehende Curve L sei eine Curve des Systems u. Mit σ bezeichnen wir den Winkel, den die Flächennormale mit der Hauptnormale von L bildet, und also auch denjenigen Winkel, um welchen in der Normalenebene eines Punktes P von L die positive Richtung der Flächennormale in positivem Sinne gedreht werden muss, um mit der positiven Richtung der Hauptnormale von L zusammenzufallen*). In den gewöhnlichen Bezeichnungen haben wir:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\cos\xi = \cos\sigma\, X + \frac{\sin\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \cos\eta = \cos\sigma\, Y + \frac{\sin\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\cos\zeta = \cos\sigma\, Z + \frac{\sin\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

*) Natürlich ist als positive Seite der genannten Normalenebene diejenige anzusehen, welche der positiven Richtung der Tangente von L zugewandt ist.

$$\cos\lambda = -\sin\sigma X + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \cos\mu = -\sin\sigma Y + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\cos\nu = -\sin\sigma Z + \frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u},$$

also nach den Frenet'schen Formeln für die absolute Torsion $\frac{1}{T}$ der Curve u:

$$\frac{1}{T} = \sum \cos\xi \frac{d\cos\lambda}{ds_u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum \cos\xi \frac{\partial \cos\lambda}{\partial v} = \frac{D'}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sigma}{\partial v},$$

wofür auch wegen (19*)

$$\frac{1}{T_u} = \frac{1}{T} + \frac{\partial\sigma}{\partial s_u} \tag{20}$$

geschrieben werden kann.

Dieses ist die Gleichung, um deren Ableitung es sich handelte; sie zeigt uns, dass die geodätische Torsion mit der absoluten für alle diejenigen Curven und nur für solche zusammenfällt, deren Hauptnormale gegen die Fläche um einen constanten Winkel geneigt ist. Zu dieser Klasse von Curven gehören die geodätischen Linien und die Haupttangentencurven; für die ersteren ist σ gleich Null (oder gleich π), für die letzteren gleich $\frac{\pi}{2}$. Im allgemeinen bilden die Curven dieser Art, die einem constanten Werte von σ entsprechen, wie die geodätischen Linien eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit, ausgenommen in dem Grenzfalle $\sigma = \frac{\pi}{2}$ (der Haupttangentencurven)*).

§ 86. Allgemeine Sätze über die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linien.

Indem wir nun zu der Differentialgleichung der geodätischen Linien zurückkehren, wollen wir einige allgemeine Sätze angeben, die ihre Integration betreffen**).

Zunächst bemerken wir, dass die Bonnet'sche Gleichung (4*), § 76, sofort auf den folgenden Satz führt:

A) Wenn die durch die Differentialgleichung erster Ordnung:

$$M du + N dv = 0$$

definierten Curven geodätische Linien sind, so lassen sich ihre orthogonalen Trajectorien durch eine Quadratur bestimmen.

---

*) Infolge des in der Anmerkung zu § 84 Gesagten folgt hieraus weiter, dass die beiden von einem Punkte ausgehenden Haupttangentencurven gleiche und dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Torsion haben.

**) Darboux, 2. Bd., S. 424 ff.

Es ist nämlich die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien durch (§ 34, S. 66, (13)):

$$(EN - FM)du + (FN - GM)dv = 0$$

gegeben, und wegen der eben angeführten Gleichung (4*) ist nach der Voraussetzung:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FN - GM}{\sqrt{EN^2 - 2FMN + GM^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{EN - FM}{\sqrt{EN^2 - 2FMN + GM^2}}\right),$$

d. h. der Ausdruck:

$$\frac{EN - FM}{\sqrt{EN^2 - 2FMN + GM^2}}\,du + \frac{FN - GM}{\sqrt{EN^2 - 2FMN + GM^2}}\,dv$$

ein vollständiges Differential. Setzen wir also:

$$\vartheta(u, v) = \int \frac{(EN - FM)du + (FN - GM)dv}{\sqrt{EN^2 - 2FMN + GM^2}},$$

so ist ϑ das gesuchte Integral. Dies folgt auch so: Wir haben offenbar

$$\Delta_1 \vartheta = 1,$$

folglich ist nach § 84 die Gleichung der gesuchten orthogonalen Trajectorien: $\vartheta =$ Const. Dabei ist ϑ der von einer festen orthogonalen Trajectorie an gerechnete Bogen der geodätischen Linie.

Wir nehmen nun an, es sei eine solche Lösung ϑ der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta_1 \vartheta = 1$$

bekannt, die eine wesentliche, d. h. in ϑ nicht additiv auftretende willkürliche Constante a enthält. Wird die Gleichung: $\Delta_1 \vartheta = 1$ oder:

$$E\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\frac{\partial \vartheta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 = EG - F^2$$

nach dem Parameter a, der nur in ϑ enthalten ist, differenziert, so ergiebt sich nach § 35:

$$\nabla\left(\vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial a}\right) = 0.$$

Dieses beweist, dass für jeden bestimmten Wert von a die Gleichung:

(21) $$\frac{\partial \vartheta}{\partial a} = b,$$

in der b eine willkürliche Constante bedeutet, die zu den Curven $\vartheta =$ Const. orthogonalen geodätischen Linien darstellt (vgl. § 36). Die Gleichung (21) enthält die beiden willkürlichen Constanten a und b und ist die allgemeine Gleichung der geodätischen Linien der Fläche. Um dieses zu beweisen, braucht man nur zu zeigen, dass eine Curve:

$$\vartheta = \text{Const.}$$

durch einen beliebigen Punkt der Fläche in beliebiger Richtung gelegt werden kann. Es kann nun das Verhältnis $\frac{\partial \vartheta}{\partial u} : \frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ nicht unabhängig von a sein, denn da ausserdem $\frac{\partial \vartheta}{\partial u}$ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ durch die Gleichung: $\Delta_1 \vartheta = 1$ verbunden sind, würden ja sonst beide Grössen von a unabhängig und also a in ϑ additiv enthalten sein. Ist aber (u_0, v_0) ein beliebiger Punkt der Fläche, so stellt die Gleichung:

$$\vartheta(u, v, a) = \vartheta(u_0, v_0, a)$$

eine Curve $\vartheta =$ Const. dar, welche von (u_0, v_0) ausgeht. Ihre Richtung in diesem Punkte hängt von dem Verhältnis $\frac{\partial \vartheta}{\partial u} : \frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ ab, das bei der Aenderung von a alle Werte annehmen kann*). Wir haben also den Satz:

B) Ist von der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta_1 \vartheta = 1$$

eine Lösung ϑ mit einer wesentlichen Constanten a bekannt, so ergiebt sich die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der geodätischen Linien mittels Differentiation in der Form:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial a} = b,$$

wobei b eine zweite willkürliche Constante ist. Der Bogen jeder geodätischen Linie ist gleich der Differenz der Werte, welche die Function ϑ in den beiden Endpunkten annimmt.

§ 87. Jacobi's Satz über die Differentialgleichung der geodätischen Linien.

Auf Grund der letzten Ergebnisse können wir mit Jacobi beweisen, dass man von der Differentialgleichung zweiter Ordnung der geodätischen Linien nur eine intermediäre Integralgleichung erster Ordnung mit einer willkürlichen Constanten a zu kennen braucht, um mittels Quadraturen die Gleichung dieser Curven in endlicher Gestalt zu erhalten. Es sei nämlich durch

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v, a)$$

eine solche bekannte intermediäre Integralgleichung dargestellt. Setzen wir dann in dem Satze A) des vorigen Paragraphen

$$M = -\varphi, \quad N = 1,$$

*) Darboux, 2. Bd., S. 428.

so sehen wir, dass der Ausdruck:

$$\frac{(E+F\varphi)\,du+(F+G\varphi)\,dv}{\sqrt{E+2F\varphi+G\varphi^2}}$$

ein vollständiges Differential ist. Setzen wir also:

$$\vartheta=\int\frac{(E+F\varphi)\,du+(F+G\varphi)\,dv}{\sqrt{E+2F\varphi+G\varphi^2}},$$

so ist nach Satz B)

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial a}=b$$

die Gleichung der geodätischen Linien in endlicher Gestalt.

Dieses Ergebnis benutzen wir jetzt zum Beweise des Satzes: Bei den Flächen mit dem Krümmungsmass Null (den abwickelbaren Flächen) lässt sich die Differentialgleichung der geodätischen Linien mittels zweier Quadraturen integrieren.

Wir schreiben nämlich die Differentialgleichung der geodätischen Linien in der Gaussischen Form (§ 80, S. 156):

$$d\psi=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}-2\frac{\partial F}{\partial u}\right)du+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial G}{\partial u}\right)dv,$$

wo ψ der Winkel zwischen den geodätischen Linien und den Curven v ist. Gemäss der Gleichung (17), § 35, S. 68, besagt die Bedingung: $K=0$, dass die rechte Seite dieser Gleichung ein vollständiges Differential ist. Durch eine Quadratur ergiebt sich sofort eine intermediäre Integralgleichung mit einer willkürlichen Constanten a:

$$\psi=f(u,v)+a,$$

und eine zweite Quadratur giebt die Gleichung der geodätischen Linien in endlicher Gestalt. Mit anderen Worten: Hat eine quadratische Differentialform:

$$Edu^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

die Krümmung Null, so genügen zwei Quadraturen, um sie auf die Normalform dx^2+dy^2 zu bringen. (Vgl. dasselbe Problem in § 29.)

§ 88. Geodätische Linien auf den Liouville'schen Flächen.

Es giebt eine Klasse von Flächen, die in ihrer ganzen Allgemeinheit zuerst von Liouville betrachtet worden sind und bei denen das Verfahren, das durch die Sätze in § 86 für die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linie angegeben wurde, vollständig

durchführbar ist. Es sind dieses diejenigen Flächen, bei denen das Quadrat des Linienelements auf die Form:

(22) $$ds^2 = \{\alpha(u) + \beta(v)\}(du^2 + dv^2)$$

gebracht werden kann, wo $\alpha(u)$ eine Function von u allein und $\beta(v)$ eine Function von v allein ist. Für diese besondere Form des Quadrates des Linienelements geht die Gleichung:

$$\Delta_1 \vartheta = 1$$

nach § 35 über in:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 = \alpha(u) + \beta(v).$$

Wir suchen ihr dadurch zu genügen, dass wir ϑ gleich der Summe zweier Functionen setzen, von denen die eine nur von u, die andere nur von v abhängt:.

$$\vartheta = U + V.$$

Dieses giebt:

$$U'^2 - \alpha(u) = \beta(v) - V'^2 = a,$$

wo a eine willkürliche Constante ist. Wird also

(23) $$\vartheta = \int \sqrt{\alpha(u) + a}\, du \pm \int \sqrt{\beta(v) - a}\, dv$$

gesetzt, so ist ϑ eine Lösung von $\Delta_1 \vartheta = 1$ mit der wesentlichen Constanten a, und folglich (§ 86) erhalten wir als Gleichung der geodätischen Linien in endlicher Gestalt:

(24) $$2\frac{\partial \vartheta}{\partial a} = \int \frac{du}{\sqrt{\alpha(u) + a}} \mp \int \frac{dv}{\sqrt{\beta(v) - a}} = b,$$

während uns (23) ihren Bogen ϑ giebt. Wir fügen überdies hinzu, dass, wenn mit ψ der Winkel zwischen den geodätischen Linien und den Curven v bezeichnet wird,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{dv}{du}$$

ist, woraus infolge von (24) die Gleichung:

(25) $$\beta(v)\cos^2\psi - \alpha(u)\sin^2\psi = a$$

hervorgeht, die uns ein intermediäres Integral erster Ordnung der Gleichung der geodätischen Linien auf den Liouville'schen Flächen giebt.

Dini*) hat bemerkt, dass der Ausdruck (22) für das Quadrat des Linienelements dadurch gekennzeichnet werden kann, dass man sagt: Die Parameterlinien u, v bilden ein isothermes System von

---

*) Sopra un problema della rappresentazione geografica di una superficie sopra un' altra. Annali di Matematica, Bd. III, 1869.

geodätischen Ellipsen und Hyperbeln. Um dieses zu beweisen, führen wir statt der Parameter u, v andere ein, indem wir

$$u = u(u_1), \quad v = v(v_1)$$

setzen, sodass

$$\left(\frac{du_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dv_1}{dv}\right)^2 = \alpha(u) + \beta(v)$$

wird. Setzen wir noch:

$$\sin\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{du_1}{du}}{\sqrt{\alpha(u) + \beta(v)}}, \quad \cos\frac{\omega}{2} = \frac{\frac{dv_1}{dv}}{\sqrt{\alpha(u) + \beta(v)}},$$

so nimmt der Ausdruck (22) die charakteristische Gestalt (17) aus § 83 an:

$$ds^2 = \frac{du_1^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dv_1^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}},$$

wodurch unsere Behauptnng bewiesen ist. Umgekehrt ist sofort einleuchtend, dass, wenn ein Orthogonalsystem von geodätischen Ellipsen und Hyperbeln auch noch isotherm ist, durch Einführung neuer Parameter das Linienelement auf die Liouville'sche Form gebracht werden kann.

Wir können demnach sagen: Die Liouville'schen Flächen sind diejenigen Flächen, auf denen es ein isothermes System von geodätischen Ellipsen und Hyperbeln giebt*).

§ 89. Geodätische Linien auf den Rotationsflächen.

Zu der Klasse der Liouville'schen Flächen gehören die Flächen zweiten Grades und die Rotationsflächen, auf denen nämlich die Krümmungslinien ein isothermes System geodätischer Ellipsen und Hyperbeln bilden.

Wir wenden die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf den letzteren Fall, d. h. auf das Quadrat des Linienelements:

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2$$

(vgl. § 42) an, das wir auf die isometrischen Parameter:

$$u_1 = \int\frac{du}{r}, \quad v$$

beziehen, wodurch wir erhalten:

$$ds^2 = r^2(du_1^2 + dv^2).$$

*) Die diesem Buche gesteckten Grenzen gestatten uns nicht, hier auf die neueren wichtigen Resultate einzugehen, die verschiedene Mathematiker bezüglich der Theorie der Liouville'schen Flächen erhalten haben, insbesondere auf die Kriterien dafür, ob eine gegebene Fläche zu dieser Klasse gehört.

Dieser Ausdruck für das Quadrat des Linienelements ergiebt sich aus dem Liouville'schen (22), wenn darin

$$\alpha(u_1) = r^2, \quad \beta(v) = 0$$

gesetzt wird.

Die Constante a in der Gleichung (23) muss in dem vorliegenden Falle für die reellen geodätischen Linien einen negativen Wert haben. Wird also

$$a = -k^2$$

gesetzt, so lautet die Gleichung (24) der geodätischen Linien in endlicher Gestalt:

$$v = \pm k \int \frac{du}{r\sqrt{r^2 - k^2}} + b, \tag{26}$$

und die Gleichung (23), die den Bogen s der geodätischen Linien giebt:

$$s = \pm kv + \int \frac{\sqrt{r^2 - k^2}}{r} du = \int \frac{r\,du}{\sqrt{r^2 - k^2}}. \tag{27}$$

Es ist klar, dass das einfach unendliche System von geodätischen Linien, das sich aus (26) für einen festen Wert von k und veränderliches b ergiebt, aus lauter congruenten Curven besteht, die durch Drehung um die Axe mit einander zur Deckung gebracht werden können.

Die intermediäre Integralgleichung (25) liefert uns die Gleichung:

$$r \sin \psi = k, \tag{28}$$

d. h. den Clairaut'schen Satz: In jedem Punkte einer auf einer Rotationsfläche gezogenen geodätischen Linie ist das Product aus dem Radius des betreffenden Parallelkreises und dem Sinus des Neigungswinkels der geodätischen Linie gegen den betreffenden Meridian constant.

Besitzt die Fläche einen grössten Parallelkreis vom Radius R, so ist für jede reelle geodätische Linie der Wert der Constanten k kleiner als R. Die Curve verläuft ganz innerhalb der Zone, in der die Radien der Parallelkreise nicht grösser sind als k, wie aus der Gleichung (28) hervorgeht.

§ 90. Gauss' Satz über die Totalkrümmung eines geodätischen Dreiecks.

Indem wir nun zu der allgemeinen Theorie der geodätischen Linien zurückkehren, betrachten wir mit Gauss ein geodätisches, d. h. ein von drei geodätischen Bogen gebildetes Dreieck ABC, das ein Stück der Fläche S einschliessen wird. Wir berechnen seine Totalkrümmung

(**Curvatura integra**), d. h. das über das ganze Dreieck erstreckte Doppelintegral:

$$\sum = \iint K\,d\sigma,$$

wo $d\sigma$ das Flächenelement und K wie gewöhnlich das Krümmungsmass bezeichnet.

Als Parameterlinien v wählen wir die von der Ecke A ausgehenden geodätischen Linien und als Parameter v den Winkel, den sie mit der festen geodätischen Linie AB ($v = 0$) bilden. Als Curven u wählen wir die orthogonalen Trajectorien der Curven v (die geodätischen Kreise um A) und rechnen den Bogen u der geodätischen Linien vom Punkte A aus. Da dann das Quadrat des Linienelements durch

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2$$

gegeben ist, so genügt die Function $\sqrt{G}$ den Bedingungen (§ 82):

$$(29)\qquad (\sqrt{G})_{u=0}, \quad \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 1.$$

Da ferner (nach S. 159 u. 63)

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}, \quad d\sigma = \sqrt{G}\,du\,dv$$

ist, so kommt:

$$(30)\qquad \sum = \iint -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}\,du\,dv = \int_0^{\hat{A}} dv \int_0^u -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}\,du,$$

wo $\hat{A}$ den Dreieckswinkel an der Ecke A bedeutet.

Längs der geodätischen Linie BC, als deren positive Richtung wir diejenige von B nach C festsetzen wollen, ist die Gaussische Differentialgleichung der geodätischen Linien (Formel (11*), § 80, S. 156) erfüllt, d. h.:

$$(31)\qquad d\vartheta = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\,dv.$$

Bezeichnen wir die Dreieckswinkel in B und C mit $\hat{B}$ und $\hat{C}$, so haben wir demnach:

$$\vartheta_B = \pi - \hat{B}, \quad \vartheta_C = \hat{C},$$

wo ϑ_B, ϑ_C die Werte von ϑ in B bez. C sind.

Nun giebt uns Gleichung (30):

$$\sum = \int_0^{\hat{A}} \left\{\left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right\} dv,$$

d. h. gemäss (29) und (31):

$$\sum = \int_0^{\hat{A}} (dv + d\vartheta) = \hat{A} + \vartheta_C - \vartheta_B = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.$$

In dieser bemerkenswerten Gleichung ist der Satz von Gauss enthalten:

Die Totalkrümmung eines geodätischen Dreiecks ist gleich dem Ueberschuss seiner Winkelsumme über zwei Rechte (dem sphärischen Excess).

Dieser Ueberschuss ist positiv, wenn alle Punkte im Innern des Dreiecks elliptisch sind, negativ, wenn sie hyperbolisch sind, und gleich Null im Falle der abwickelbaren Flächen. Schliesslich bemerken wir noch, dass, wenn das Krümmungsmass K der Fläche constant ist, der vorstehende Satz als besonderen Fall den folgenden liefert:

Auf einer Fläche mit constantem Krümmungsmass ist der Flächeninhalt eines geodätischen Dreiecks dem Ueberschuss der Winkelsumme desselben über zwei Rechte proportional.

§ 91. Doppelte Orthogonalsysteme von Curven constanter geodätischer Krümmung.

Wir schliessen dieses Kapitel mit der Ableitung einiger einfacher Sätze über Curven mit constanter geodätischer Krümmung.

Wir nehmen an, dass in einem auf einer Fläche S befindlichen doppelten Orthogonalsystem (u, v) jede Curve des Systems u sowohl wie jede Curve des Systems v constante geodätische Krümmung besitze. Ist

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

der Ausdruck für das Quadrat des Linienelements, so haben wir der Voraussetzung zufolge (§ 75, S. 148):

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = U, \quad \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = V,$$

wo U eine Function von u allein, V eine Function von v allein ist. Daraus folgt:

$$V \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = U \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},$$

oder:

$$\frac{\partial (V\sqrt{G})}{\partial u} = \frac{\partial (U\sqrt{E})}{\partial v}.$$

Demnach ist

$$U\sqrt{E}\,du + V\sqrt{G}\,dv$$

das vollständige Differential einer Function φ, und dabei ist:

$$\sqrt{E} = \frac{1}{U}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \quad \sqrt{G} = \frac{1}{V}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Werden diese Werte in (a) eingesetzt, so ergiebt sich zur Bestimmung von φ die eine Gleichung:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

deren allgemeine Lösung

$$\varphi = -\log[\alpha(u) + \beta(v)]$$

ist, wo $\alpha(u)$, $\beta(v)$ willkürliche Functionen von u bez. v sind. Daraus ergiebt sich für das Quadrat des Linienelements der Ausdruck:

$$ds^2 = \frac{1}{[\alpha(u) + \beta(v)]^2}\left[\frac{\alpha'^2(u)}{U^2}du^2 + \frac{\beta'^2(v)}{V^2}dv^2\right]$$

oder durch Einführung neuer Parameter u_1, v_1:

(32) $$ds^2 = \frac{du_1^2 + dv_1^2}{(U_1 + V_1)^2}\,{}^{*)}.$$

Wir haben also nach § 37, S. 71, den Satz:

Ein doppeltes Orthogonalsystem von Curven mit constanter geodätischer Krümmung ist stets isotherm.

Auch besteht der umgekehrte Satz:

Sind in einem doppelten Isothermensystem die Curven des einen Systems Curven mit constanter geodätischer Krümmung, so sind es auch diejenigen des zweiten Systems.

Wählen wir nämlich isometrische Parameter, so hat das Quadrat des Linienelements die Gestalt:

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2).$$

Nun ist nach S. 148:

$$\frac{1}{\varrho_u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad \frac{1}{\varrho_v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

und von den beiden Bedingungen:

*) Falls die Functionen U, V nur Constanten sind, erhält ds^2 die Form:

$$ds^2 = \frac{1}{(au_1 + bv_1)^2}(du_1^2 + dv_1^2) \quad (a,\ b = \text{Const.}),$$

und gehört zu einer pseudosphärischen Fläche vom Krümmungsmass

$$K = -(a^2 + b^2).$$

(Vgl. die Anmerkung S. 151.)

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\varrho_u}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\varrho_v}\right) = 0$$

ist, wie ersichtlich, die eine eine Folge der anderen.

Es ist klar, dass die hier betrachteten doppelten Orthogonalsysteme nur auf besonderen Flächen wirklich vorhanden sind. Insbesondere giebt es in der Ebene und auf der Kugel unendlich viele solcher Systeme, und in § 44, Kap. III, haben wir die Aufgabe, alle diese zu bestimmen, bereits geometrisch gelöst.

Kapitel VII.

Auf einander abwickelbare Flächen.

Biegsame Flächen. — Gaussischer Satz von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmasses bei Verbiegung. — Kriterien dafür, ob zwei gegebene Flächen auf einander abwickelbar sind. — Fall der Flächen von constantem Krümmungsmass. — Abwickelbarkeit eines Stückes einer Fläche von constantem Krümmungsmass auf ein beliebiges anderes Stück derselben Fläche. — Flächen, die eine stetige Verbiegung in sich gestatten. — Auf einander abwickelbare Rotationsflächen. — Schraubenflächen und Satz von Bour. — Die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, von der die Verbiegung einer gegebenen Fläche abhängt. — Allgemeine Sätze über Verbiegung. — Bonnets Satz von der Möglichkeit, eine Fläche so zu verbiegen, dass die Haupttangentencurven des einen Systems Haupttangentencurven bleiben.

---

§ 92. Definition der Abwickelbarkeit von Flächen auf einander.

Wie in der ebenen und in der sphärischen Geometrie die Eigenschaften der in der Ebene oder auf der Kugel gezeichneten Figuren ohne Rücksicht auf ihre absolute Lage im Raume untersucht werden, ebenso kann eine analoge Untersuchung für jede beliebige Fläche S angestellt werden. Diejenigen Eigenschaften nun, welche nur die Grössen- und Lagenbeziehungen der auf der Fläche gezeichneten Figuren insoweit betreffen, als sie auf der Fläche gelten, machen die Geometrie der Fläche aus.

Unter diesem Gesichtspunkt können zwei der Gestalt nach sehr verschiedene Flächen dieselbe Geometrie haben. So ist es klar, dass die Sätze der ebenen Geometrie immer noch gültig sind, wenn die Ebene, in der die Figuren gezeichnet sind, auf einen Cylinder, einen Kegel oder eine beliebige andere abwickelbare Fläche aufgewickelt gedacht wird.

Um das Wesen derjenigen Eigenschaften, welche die Geometrie einer Fläche ausmachen, wohl zu erfassen, denke man sich zweckmässiger Weise die Fläche aus einer unendlich dünnen, vollkommen biegsamen, aber undehnbaren Hülle gebildet.

Diejenigen Eigenschaften, welche sich nicht ändern, wie die Fläche auch verbogen werden mag, fallen in ihre Geometrie, die übrigen haften der Gestalt und der wirklichen Lage der Fläche im Raume an.

Zwei Flächen S, S', deren Punkte P, P' einander so zugeordnet werden können, dass die entsprechenden Linienelemente gleich werden, haben dieselbe Geometrie, weil dann auch die endlichen Bogen, die Winkel und die Flächenräume der Figuren auf S den entsprechenden Stücken der Figuren auf S' gleich sind. In diesem Falle heissen die beiden Flächen S, S' auf einander abwickelbar, womit gesagt werden soll, dass die eine Fläche (oder ein Stück von ihr) durch blosse Verbiegung, ohne Riss oder Faltung, auf die andere ausgebreitet werden kann. Damit aber diese Abwickelung für wirklich ausführbar gehalten werden kann, muss offenbar das Vorhandensein einer stetigen Aufeinanderfolge von Gestaltsänderungen der biegsamen Fläche S, welche von S zu S' hinüberleitet, nachgewiesen werden.

Wenn für zwei Flächen S, S' die Ausdrücke für die Quadrate der Linienelemente gegeben sind:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2,$$
$$ds'^2 = E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2,$$

so muss man, um zu erkennen, ob sie auf einander abwickelbar sind, untersuchen, ob zwischen den Punkten (u, v) der einen und den Punkten (u', v') der andern eine solche Zuordnung möglich ist, dass sich die Gleichheit der Linienelemente:

$$ds = ds'$$

ergiebt.

Für die Abwickelbarkeit der beiden Flächen auf einander ist es demnach notwendig und hinreichend, dass die Differentialformen:

$$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$
$$E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2$$

in einander transformierbar sind.

§ 93. Gaussischer Satz von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmasses bei Verbiegung.

Aus den obigen Betrachtungen ergiebt sich, dass die Geometrie der Fläche schon durch den Ausdruck für ihr Linienelement oder durch ihre erste Grundform:

(1) $$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

vollkommen bestimmt ist. Mit anderen Worten, die unendlich vielen Gestaltsänderungen, die eine Fläche S beim Verbiegen erleiden kann,

haben die erste Grundform gemeinsam; jede einzelne von ihnen wird dann erst durch ihre zweite Grundform (Kap. IV) näher bestimmt.

Wenn die Geometrie einer Fläche als durch das Linienelement der Fläche definiert behandelt wird, so ist von jeder besonderen Flächengestalt, die dem Linienelement wirklich entspricht, abzusehen. Analytisch haben wir eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, die von den beiden Variabeln u, v erzeugt wird und deren Elemente (Punkte) von je einem Wertepaar (u_0, v_0) bestimmt werden; die Entfernung ds zwischen zwei einander unendlich nahen Punkten (u, v), $(u + du, v + dv)$ bestimmt sich nach der Grundform (1), und der Winkel ϑ zwischen den beiden Linienelementen $ds, \delta s$, die den Punkt (u, v) mit den Punkten $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$ verbinden, aus der Gleichung (vgl. § 34):

$$\cos\vartheta = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta u}{ds\,\delta s}.$$

Zwischen der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit und den Wertepaaren (u_0, v_0) haben wir somit ein eindeutiges Entsprechen.

Der Aenderungsbereich, den wir für u, v betrachten, soll stets ein solcher sein, dass innerhalb desselben die Functionen E, F, G samt ihren ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten eindeutig, stetig und endlich und ferner $E, G, EG - F^2$ positiv sind. Der Winkel ω der Parameterlinien, der durch die Gleichungen:

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

bestimmt ist (vgl. § 34, S. 63), ändert sich demnach in dem betreffenden Bereich stetig zwischen 0 und π, ohne jemals diese Endwerte zu erreichen.

Bei diesen allgemeinen Untersuchungen finden die Begriffe Differentialinvarianten und Differentialparameter, die wir im zweiten Kapitel behandelt haben, eine unmittelbare wichtige Anwendung. Die Krümmung einer Fläche ist eine Differentialinvariante der Form (1); ihr Wert in jedem Punkte hängt nur von den Coefficienten der Form (1) ab und bleibt demnach derselbe, wie die Fläche auch verbogen werden mag (vgl. § 55).

Daraus ergiebt sich der grundlegende Satz von Gauss: Das Krümmungsmass einer Fläche bleibt bei einer beliebigen Verbiegung der Fläche ungeändert. Dieses Ergebnis lässt sich auch noch in folgender Fassung aussprechen: Sind zwei Flächen auf einander abwickelbar, so haben sie in je zwei entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmass.

Dieses ist die Eigenschaft, welche, wie bereits anderwärts (S. 105)

bemerkt worden ist, dem Gaussischen Krümmungsmass bei den geometrischen Anwendungen überwiegende Bedeutung verleiht.

Wir betrachten nun einen Differentialparameter der Form (1), der eine oder mehrere willkürliche Functionen

$$\varphi, \psi \ldots$$

enthält. Der Wert, den er in jedem Punkte der Fläche annimmt, ist von den Coordinaten, die zu seiner Berechnung verwandt werden, unabhängig und bleibt bei jeder beliebigen Verbiegung der Fläche derselbe. Werden $\varphi, \psi \ldots$ gleich Constanten gesetzt, so ergeben sich auf der Fläche ebensoviele Curvensysteme, und der Differentialparameter stellt einen mit diesen Curven unzertrennlich verbundenen Ausdruck dar, der sich nicht ändert, wie die Fläche auch verbogen werden mag.

Betrachten wir z. B. die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_\varphi}$ der Curven $\varphi =$ Const. Sie ist (§ 76, (3), S. 149) durch den Differentialparameter

$$-\frac{1}{\varrho_\varphi} = \frac{\Delta_2 \varphi}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}} + \nabla\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta_1 \varphi}}\right)$$

gegeben. Daraus folgt: Die geodätische Krümmung einer auf einer Fläche gelegenen Curve ändert sich nicht, wenn die Fläche verbogen wird.

Insbesondere gehen die geodätischen Linien einer Fläche S bei einer Verbiegung von S in die geodätischen Linien der neuen Fläche über. Diese Thatsache folgt übrigens auch direct aus der charakteristischen Eigenschaft einer geodätischen Linie (§ 82, S. 162), die kürzeste Linie zu sein, die sich auf einer Fläche zwischen zwei einander hinlänglich nahen Punkten ziehen lässt. Hieraus ergiebt sich ein neuer Beweis für die Unveränderlichkeit der geodätischen Krümmung bei einer Verbiegung, wenn man sich der in § 80, S. 156, für die geodätische Krümmung gegebenen Definition bedient.

Wir wollen hier noch bemerken, dass sich aus letzteren Ueberlegungen ein anschaulicher Beweis für die Unveränderlichkeit des Gaussischen Krümmungsmasses bei einer Verbiegung ergiebt. Betrachtet man nämlich einen geodätischen Kreis mit unendlich kleinem Radius u, dessen Mittelpunkt ein Flächenpunkt P_0 ist, so ist sein Umfang C bis auf unendlich kleine Grössen von höherer als der dritten Ordnung infolge des Ausdrucks (15), § 82 (S. 162), in der Form:

$$C = 2\pi u - \frac{\pi K_0 u^3}{3}$$

gegeben, wo K_0 das Krümmungsmass der Fläche in P_0 ist. Wie die Fläche auch verbogen werden mag, C ändert sich nicht, also auch nicht K_0.

§ 94. Kriterien dafür, ob zwei gegebene Flächen auf einander abwickelbar sind.

Mit Hilfe der Theorie der Differentialparameter können wir in der einfachsten Weise die Aufgabe lösen: Gegeben sind zwei Flächen S, S'; es ist zu untersuchen, ob dieselben auf einander abwickelbar sind; und wenn dieses der Fall ist, sollen die darauf bezüglichen Gleichungen aufgestellt werden.

Analytisch ist die Aufgabe mit der Frage nach der Transformierbarkeit zweier gegebener Differentialformen:

$$\begin{gathered} E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2, \\ E' du'^2 + 2F' du'\, dv' + G' dv'^2 \end{gathered}$$

in einander gleichbedeutend (§ 92). Nun nehmen wir an, es seien

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(u, v) = \varphi'(u', v'), \\ \psi(u, v) = \psi'(u', v') \end{cases}$$

zwei unabhängige Beziehungen zwischen u, v, u', v', welche das Gesetz darstellen, nach dem unter der Voraussetzung der Abwickelbarkeit der Flächen auf einander die Punkte der einen Fläche denen der anderen entsprechen. Infolge der Eigenschaften der Differentialparameter müssen wir haben:

$$(3) \qquad \Delta_1 \varphi = \Delta_1' \varphi', \quad \nabla(\varphi, \psi) = \nabla'(\varphi', \psi'), \quad \Delta_1 \psi = \Delta_1' \psi',$$

wo die Striche andeuten, dass die Differentialparameter auf den rechten Seiten für die zweite Form gebildet sind. Damit die Flächen auf einander abwickelbar seien, ist es also erforderlich, dass die Gleichungen (2) die Gleichungen (3) zur Folge haben. Diese notwendige Bedingung ist für die Abwickelbarkeit auch hinreichend. Aus dem Ergebnis in § 36 (S. 69, (20)) folgt nämlich, wenn für die erste Form φ, ψ und für die zweite φ', ψ' als neue Veränderliche eingeführt werden:

$$\begin{aligned} E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 &= \frac{\Delta_1 \psi\, d\varphi^2 - 2\nabla(\varphi, \psi) d\varphi\, d\psi + \Delta_1 \varphi\, d\psi^2}{\Delta_1 \varphi\, \Delta_1 \psi - \nabla^2(\varphi, \psi)}, \\ E' du'^2 + 2F' du'\, dv' + G' dv'^2 &= \frac{\Delta_1' \psi'\, d\varphi'^2 - 2\nabla'(\varphi', \psi') d\varphi'\, d\psi' + \Delta_1' \varphi'\, d\psi'^2}{\Delta_1' \varphi'\, \Delta_1' \psi' - \nabla'^2(\varphi', \psi')}, \end{aligned}$$

und wegen der Gleichungen (2), (3) sind die rechten Seiten einander gleich.

Nach dieser Vorbemerkung schliessen wir vorerst den Fall aus, dass eine der beiden Flächen constantes Krümmungsmass besitze. Bezeichnen wir die Krümmungsmasse der beiden Flächen mit $K(u, v)$ bez. $K'(u', v')$, so liefert uns der Gaussische Satz unter der Voraussetzung,

dass die Flächen auf einander abwickelbar sind, sofort eine Beziehung von der Form (2) in der Gleichung:

$$K(u, v) = K'(u', v'). \tag{4}$$

Ferner ist einleuchtend, dass jeder für die Function K gebildete Differentialparameter gleich dem entsprechenden für K' berechneten sein muss. Wir nehmen zunächst die Beziehung:

$$\Delta_1 K = \Delta_1' K', \tag{5}$$

die mit (4) combiniert zu den nachstehenden drei Fällen Anlass geben kann:

1. Die Gleichungen (4) und (5) widersprechen einander; dann sind die Flächen nicht auf einander abwickelbar.

2. Die Gleichungen (4) und (5) sind mit einander verträglich und von einander verschieden. In diesem Falle ist es nach dem, was wir oben gesehen haben, damit die Flächen auf einander abwickelbar seien, notwendig und hinreichend, dass die Gleichungen (4) und (5) die weiteren:

$$\nabla(K, \Delta_1 K) = \nabla'(K', \Delta_1' K'), \quad \Delta_1(\Delta_1 K) = \Delta_1'(\Delta_1' K')$$

nach sich ziehen, was durch algebraische Rechenoperationen entschieden werden kann.

3. Die Gleichungen (4) und (5) lassen sich auf einander zurückführen.

Dieses tritt ein, wenn $\Delta_1 K$ eine Function von K und $\Delta_1' K'$ dieselbe Function von K' ist.

§ 95. Flächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind.

In dem zuletzt betrachteten Falle:

$$\Delta_1 K = f(K), \quad \Delta_1' K' = f(K') \tag{a}$$

wählen wir statt (5) die andere Beziehung:

$$\Delta_2 K = \Delta_2' K' \tag{5*}$$

und führen die Aufgabe wieder auf algebraische Eliminationen zurück, wofern nicht der weitere Fall eintritt, der durch die Gleichungen:

$$\Delta_2 K = \chi(K), \quad \Delta_2' K' = \chi(K') \tag{b}$$

gekennzeichnet ist.

Es erübrigt also nur noch, den einzigen Fall zu betrachten, in dem die Gleichungen (a) und (b) zusammen bestehen.

Da dann

$$\frac{\Delta_2 K}{\Delta_1 K} = \frac{\chi(K)}{f(K)}$$

ist, so bilden die Curven gleichen Krümmungsmasses $K =$ Const. mit den orthogonalen Trajectorien

$$\psi = \text{Const.}$$

ein Isothermensystem (§ 38, S. 73).

Die Function $\psi(u, v)$ ergiebt sich mittels Quadraturen aus den Gleichungen (§ 39, S. 73):

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = e^{-\int \frac{\chi(K)}{f(K)} dK} \cdot \frac{F \frac{\partial K}{\partial u} - E \frac{\partial K}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = e^{-\int \frac{\chi(K)}{f(K)} dK} \cdot \frac{G \frac{\partial K}{\partial u} - F \frac{\partial K}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Daraus folgt nach (14), S. 67:

$$\Delta_1 \psi = e^{-2\int \frac{\chi(K)}{f(K)} dK} \cdot \Delta_1 K$$

und somit nach S. 183:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = \frac{d\varphi^2}{\Delta_1 \varphi} + \frac{d\psi^2}{\Delta_1 \psi} = \frac{dK^2}{\Delta_1 K} + \frac{e^{2\int \frac{\chi(K)}{f(K)} dK} \cdot d\psi^2}{\Delta_1 K}$$

$$= \frac{dK^2}{f(K)} + \frac{e^{2\int \frac{\chi(K)}{f(K)} dK} \cdot d\psi^2}{f(K)}.$$

Da die Functionen f und χ für die zweite Fläche dieselben bleiben, so kommt dieser Fläche dieselbe Form für das Linienelement zu, das andererseits zu einer Rotationsfläche gehört (vgl. S. 79).

Also: Wenn die Beziehungen (a) und (b) bestehen, so sind die beiden Flächen auf dieselbe Rotationsfläche und also auch auf einander auf einfach unendlich viele Weisen abwickelbar.

Um in diesem Falle die wirklichen Gleichungen für die Abwickelbarkeit zu finden, sind, wie wir gesehen haben, zwei Quadraturen erforderlich.

§ 96. Fall der Flächen von constantem Krümmungsmass.

Bei der in den beiden vorstehenden Paragraphen gegebenen Lösung der ersten Aufgabe aus der Lehre von der Abwickelbarkeit zweier Flächen auf einander haben wir den Fall ausgeschlossen, dass die eine Fläche constantes Krümmungsmass besitze. Damit in diesem Falle die

beiden Flächen auf einander abwickelbar seien, ist es erforderlich, dass die zweite Fläche dasselbe constante Krümmungsmass besitzt. Nun ist es sehr bemerkenswert, dass in diesem Falle das Kennzeichen, das der Gaussische Satz liefert, für die Abwickelbarkeit auch hinreichend ist, d. h.:

Zwei Flächen mit demselben constanten Krümmungsmass sind auf einander abwickelbar.

Für den Fall der Flächen mit der Krümmung Null haben wir dieses Ergebnis bereits in § 55, S. 106, nachgewiesen, wo wir gesehen haben, dass eine derartige Fläche auf die Ebene abgewickelt werden kann. Hier wollen wir einen zweiten Beweis dafür geben, den wir sofort auch auf die Flächen mit nicht verschwindendem constantem Krümmungsmass ausdehnen.

Wir ziehen auf einer Fläche vom constanten Krümmungsmass K eine geodätische Linie L und wählen als Parameterlinien die zu L orthogonalen geodätischen Linien und deren orthogonale Trajectorien, als Parameter u den Bogen der geodätischen Curven v, gerechnet von der Curve L ab, die demnach die Curve $u = 0$ ist, und als Parameter v den Bogen der Curve L, gerechnet von einem festen Punkte dieser Curve an. Das Quadrat des Linienelements nimmt dann nach § 81 die Form:

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

an. Da die geodätische Krümmung der Curve $u = 0$ gleich Null ist, so ist nach (1), S. 148:

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 0.$$

Ferner ergiebt sich, da das Bogenelement der Curve $u = 0$ gerade dv ist:

$$(\beta) \qquad (\sqrt{G})_{u=0} = 1.$$

Nun haben wir (vgl. S. 159):

$$(\gamma) \qquad K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2},$$

und da der Annahme nach K constant ist, so erhalten wir, wenn wir die drei Fälle:

$$K = 0, \quad K > 0, \quad K < 0$$

unterscheiden, folgende Ergebnisse:

1) Ist $K = 0$, so kommt:

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cdot u + \psi(v),$$

wo $\varphi(v)$, $\psi(v)$ Functionen von v allein sind. Aber aus (α) und (β) folgt:

$$\varphi(v) = 0, \quad \psi(v) = 1,$$

sodass sich

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

d. h. das Quadrat des Bogenelements der Ebene ergiebt.

2. Ist $K > 0$, so setzen wir

$$K = \frac{1}{R^2} \quad (R \text{ reell})$$

und erhalten aus (γ):

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cos\frac{u}{R} + \psi(v) \sin\frac{u}{R},$$

ferner aus (α) und (β):

$$\psi(v) = 0, \quad \varphi(v) = 1.$$

Demnach ist hier:

(6) $$ds^2 = du^2 + \cos^2\frac{u}{R}\,dv^2.$$

Dieses ds^2 gehört zur Kugel vom Radius R; also: Alle Flächen mit positivem constantem Krümmungsmass $\frac{1}{R^2}$ sind auf die Kugel vom Radius R und also auch auf einander abwickelbar.

3. Ist $K < 0$, so setzen wir

$$K = -\frac{1}{R^2}.$$

Dann giebt Gleichung (γ):

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cosh\frac{u}{R} + \psi(v) \sinh\frac{u}{R},$$

und infolge von (α) und (β) ist:

$$\varphi(v) = 1, \quad \psi(v) = 0.$$

Also: Das Quadrat des Linienelements jeder pseudosphärischen Fläche vom Radius R kann auf die Form:

(7) $$ds^2 = du^2 + \cosh^2\frac{u}{R}\,dv^2$$

gebracht werden.

Daraus folgt, dass alle diese Flächen auf einander abwickelbar sind.

§ 97. Abwickelbarkeit eines Stückes einer Fläche von constantem Krümmungsmass auf ein beliebiges anderes Stück derselben Fläche.

Die soeben gewonnenen Ergebnisse können nicht allein auf zwei verschiedene Flächen mit demselben constanten Krümmungsmass, sondern auch auf zwei Stücke ein und derselben Fläche mit constantem Krümmungsmass angewandt werden. Wir erhalten alsdann den wichtigen Satz:

Jedes Stück einer Fläche von constantem Krümmungsmass ist auf irgend ein anderes Stück derselben Fläche abwickelbar, in der Weise, dass zwei beliebige Punkte A, B des ersten Stücks mit zwei beliebigen Punkten A', B' des

zweiten zur Deckung gebracht werden können, wofern nur die geodätische Entfernung zwischen A' und B' gleich derjenigen zwischen A und B ist.

Für die Flächen von verschwindendem oder positivem constantem Krümmungsmass ist der Satz ohne weiteres klar, da ja die Ebene und die Kugel, worauf dieselben bezüglich abwickelbar sind, die genannte Eigenschaft besitzen. Um ihn auch für die pseudosphärischen Flächen in aller Strenge zu beweisen, wählen wir das eine Mal als die geodätische Linie L des vorigen Paragraphen die Curve AB und erhalten:

$$ds^2 = du^2 + \cosh^2 \frac{u}{R}\, dv^2,$$

wo der Bogen v der Curve AB von A ab gerechnet werden soll, sodass A die Parameter $u = 0$, $v = 0$ hat. Indem wir hinsichtlich der zweiten geodätischen Linie $A'B'$ ebenso verfahren, erhalten wir:

$$ds'^2 = du'^2 + \cosh^2 \frac{u'}{R}\, dv'^2.$$

Wird nun einfach

$$u' = u, \quad v' = v$$

gesetzt, so ergiebt sich:

$$ds'^2 = ds^2,$$

und dem Punkte A oder $(0, 0)$ entspricht der Punkt A' oder $(0, 0)$, dem Punkte B oder $(0, l)$ der Punkt B' oder $(0, l)$, wenn l die übereinstimmende Länge der Bogen AB und $A'B'$ ist. Demnach ist die Fläche so auf sich selbst abwickelbar, dass A mit A' und B mit B' zur Deckung kommt, wie behauptet wurde.

Dieser Satz besagt, dass jede auf einer Fläche von constantem Krümmungsmass gezeichnete Figur vermöge blosser Verbiegung auf ein beliebiges anderes Stück der Fläche verlegt werden kann, ohne dass die Winkel und die Linien- und Flächengrössen eine Aenderung erleiden.

Für die Geometrie der Flächen von constantem Krümmungsmass gilt also im allgemeinen ebenso wie für die Ebene und die Kugel das Prinzip der Deckung der Figuren. Es ist dieses die Grundlage der Analogien, die zwischen der Geometrie der drei Flächengattungen bestehen, wie wir im folgenden sehen werden. Ferner ist es auch nach dem Gaussischen Satze klar, dass für keine andere Fläche dasselbe Prinzip gelten kann.

Aus unseren Ausführungen folgt, dass zwei Flächen S, S' mit demselben constanten Krümmungsmass auf dreifach unendlich viele Weisen auf einander abwickelbar sind. Sind die beiden Flächen gegeben, so müsste man, um eine dieser Arten der Abwickelbarkeit

zu finden, die Differentialgleichung der geodätischen Linien integrieren. Ist das Krümmungsmass gleich Null, so wird die Aufgabe mittels Quadraturen gelöst (§ 87, S. 171); in den anderen Fällen lässt sie sich, wie in einem anderen Kapitel gezeigt werden wird*), auf die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung vom Riccati'schen Typus zurückführen.

§ 98. Das Linienelement der pseudosphärischen Flächen.

Wir kehren nun zu dem Ausdruck (7), S. 187, für das Quadrat des Linienelements zurück, der zu jeder pseudosphärischen Fläche vom Radius R gehört. Zusammen mit diesem Ausdruck, der als ein solcher von hyperbolischem Typus bezeichnet wird, ist es hier zweckmässig, noch zwei andere ebenso wichtige Ausdrücke für das Quadrat des Linienelements zu betrachten, die als solche von elliptischem bezüglich parabolischem Typus bezeichnet werden.

Wir betrachten einen (gewöhnlichen) Punkt P einer pseudosphärischen Fläche und wählen als Parameterlinien die von P ausgehenden geodätischen Linien v und ihre orthogonalen Trajectorien u, als Parameter v den Winkel, den eine veränderliche geodätische Linie des Büschels mit einer festen bildet, und als Parameter u den von P aus gerechneten Bogen der geodätischen Linien. Das Quadrat des Linienelements erhält dann die Gestalt:

$$ds^2 = du^2 + G dv^2,$$

und es ist (§ 82, S. 161):

$$(\sqrt{G})_{u=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = 1.$$

Nun ist, wie wir in § 96 gesehen haben,

$$\sqrt{G} = \varphi(v) \cosh \frac{u}{R} + \psi(v) \sinh \frac{u}{R},$$

und die voraufgehenden Bedingungen geben:

$$\varphi(v) = 0, \quad \psi(v) = R.$$

Demnach ist:

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sinh^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

Dieses ist ebenfalls ein Ausdruck für das Quadrat des Linienelements, der zu jeder pseudosphärischen Fläche vom Radius R gehört, und wird als ein solcher von elliptischem Typus bezeichnet.

---

*) S. Kap. XVI, § 243.

Endlich wählen wir als Curve L in § 96 statt einer geodätischen Linie eine Linie mit der constanten geodätischen Krümmung $\frac{1}{R}$. Eine solche Curve auf einer pseudosphärischen Fläche heisst Grenzkreis*). Wir haben dann ebenfalls:

$$ds^2 = du^2 + G dv^2, \quad \sqrt{G} = \varphi(v) \cosh\frac{u}{R} + \psi(v) \sinh\frac{u}{R}\,.$$

Da im jetzigen Falle

$$(\sqrt{G})_{u=0} = 1, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)_{u=0} = \frac{1}{R}\left[\frac{\varphi(v)\sinh\frac{u}{R} + \psi(v)\cosh\frac{u}{R}}{\varphi(v)\cosh\frac{u}{R} + \psi(v)\sinh\frac{u}{R}}\right]_{u=0} = \frac{1}{R}$$

sein muss, so ergiebt sich:

$$\varphi(v) = \psi(v) = 1.$$

Demnach ist:

$$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$$

Diesen dritten Ausdruck bezeichnen wir als einen solchen von parabolischem Typus.

Fassen wir also unsere Ergebnisse zusammen, so haben wir auf den pseudosphärischen Flächen vom Radius R die folgenden drei typischen Ausdrücke für das Quadrat des Linienelements gefunden:

A) Parabolischer Typus: $ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2.$

B) Elliptischer Typus: $ds^2 = du^2 + R^2 \sinh^2\frac{u}{R}\, dv^2.$

C) Hyperbolischer Typus: $ds^2 = du^2 + \cosh^2\frac{u}{R}\, dv^2.$

§ 99. Rotationsflächen constanter Krümmung.

Wir wollen nun die gestaltlich einfachsten pseudosphärischen Flächen, solche nämlich, die zugleich Rotationsflächen sind, untersuchen.

Ihr ds^2 hat, auf die Meridiane und Parallelkreise bezogen, die Form:

$$ds^2 = du^2 + \left(C e^{\frac{u}{R}} + C' e^{-\frac{u}{R}}\right)^2 dv^2.$$

Wir unterscheiden drei Fälle, je nachdem von den beiden Constanten C, C' eine gleich Null ist oder beide verschiedene oder beide dasselbe Vorzeichen haben. Ersetzen wir den Parameter v durch cv_1 ($c =$ Const.), so erhalten wir die drei Ausdrücke von den bezüglichen Typen A), B), C):

*) Es ist leicht einzusehen, dass es auf jeder pseudosphärischen Fläche doppelt unendlich viele Grenzkreise giebt. Eine ausführlichere Untersuchung dieser Verhältnisse wird jedoch erst in Kapitel XVI angestellt werden.

$$\text{I)}\ ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv_1^2,$$

$$\text{II)}\ ds^2 = du^2 + \lambda^2 \sinh^2 \frac{u}{R}\, dv_1^2,$$

$$\text{III)}\ ds^2 = du^2 + \lambda^2 \cosh^2 \frac{u}{R}\, dv_1^2 \quad (\lambda = \text{Const.}),$$

die wir drei Rotationsflächen zuordnen, auf denen u der Meridianbogen und v_1 die Länge ist. Bezeichnen wir mit r den Radius des Parallelkreises und wählen wir die z-Achse als Drehaxe, so haben wir in den drei Fällen für die Meridiancurve bezüglich:

$$\text{I)}\ r = e^{\frac{u}{R}}, \qquad z = \int \sqrt{1 - \frac{1}{R^2} e^{\frac{2u}{R}}}\, du,$$

$$\text{II)}\ r = \lambda \sinh \frac{u}{R}, \quad z = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \cosh^2 \frac{u}{R}}\, du,$$

$$\text{III)}\ r = \lambda \cosh \frac{u}{R}, \quad z = \int \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{R^2} \sinh^2 \frac{u}{R}}\, du.$$

Wir untersuchen nun die Gestalten der drei Meridiancurven.

Im Falle I) können wir die Integration mittels gewöhnlicher Functionen ausführen. Wird

$$e^{\frac{u}{R}} = R \sin \varphi$$

gesetzt, so ist φ der Winkel zwischen der Tangente der Meridiancurve und der z-Axe, und die Gleichungen:

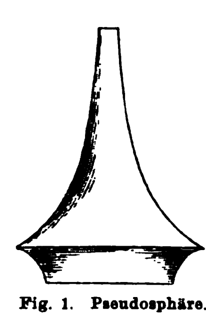
$$r = R \sin \varphi, \quad z = R \int \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}\, d\varphi = R \left(\log \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \cos \varphi\right)$$

geben uns die Coordinaten eines Punktes der Curve als Functionen des Parameters φ.

Die durch diese Gleichungen bestimmte Curve, welche die z-Axe zur Asymptote hat und die Eigenschaft besitzt, dass das zwischen dem Berührungspunkt und der Asymptote gelegene Stück ihrer Tangente constant, gleich R, ist, wird als Tractrix bezeichnet. Die eben genannte Eigenschaft kann direct aus der Gleichung der Curve, sowie auch aus der Thatsache gefolgert werden, dass die geodätische Krümmung der Parallelkreise auf der zugehörigen Rotationsfläche constant, gleich $\frac{1}{R}$, ist (vgl. § 80, S. 158). Diese Fläche heisst Pseudosphäre (siehe Fig. 1) und hat unter allen pseudosphärischen Flächen die einfachste Gestalt*).

*) Die drei folgenden Figuren sind dem Verzeichnis der von L. Brill in Darmstadt hergestellten Modelle entnommen.

Fall II): Elliptischer Typus. Um eine reelle Fläche zu erhalten, muss man


Fig. 1. Pseudosphäre.

$$\frac{\lambda}{R} < 1$$

annehmen. Wird dementsprechend $\lambda = R \sin \alpha$ gesetzt, so darf $\cosh^2 \frac{u}{R}$ höchstens gleich $\frac{1}{\sin^2 \alpha}$ werden. Demnach liegen die Radien r der Parallelkreise zwischen

$$r = 0 \quad \text{und} \quad r = R \cos \alpha.$$

Ist $r = 0$, so ist $\frac{dr}{du} = \sin \alpha$. Daher schneiden alle Meridiane die Rotationsaxe im Punkte $u = 0$ unter dem Winkel α. Dieser Punkt ist ein Knotenpunkt (conischer Punkt) der Fläche.

Die Coordinaten eines Punktes der Meridiancurve lassen sich durch elliptische Functionen eines Parameters τ mit dem Modul $k = \cos \alpha$ ausdrücken. Wir setzen nämlich:

$$\sinh \frac{u}{R} = \frac{k}{k'} \operatorname{cn}(\tau, k)$$

und erhalten:

$$r = Rk \operatorname{cn} \tau, \quad z = Rk^2 \int_0^\tau \operatorname{sn}^2 \tau \, d\tau = R\left[\frac{J}{K}\tau - Z(\tau)\right],$$

wo

$$Z(\tau) = \frac{\Theta'(\tau)}{\Theta(\tau)} \qquad .$$

die Jacobi'sche Function und J, K die bekannten Constanten aus der Theorie der elliptischen Functionen sind. Der Curvenzug von $\tau = 0$ bis $\tau = 2K$ ist in der Figur 2 abgebildet; jedesmal wenn τ um $4K$ wächst, kehrt derselbe Curvenzug periodisch wieder. Die zugehörige Rotationsfläche besteht aus unendlich vielen congruenten, durch Verschiebung längs der Axe aus einander hervorgehenden Teilen. Die grössten Parallelkreise vom Radius $r = R \cos \alpha$ sind Rückkehrcurven der Fläche, da die Punkte $\tau = 2mK$ (m ganz) Rückkehrpunkte der Meridiancurve sind.

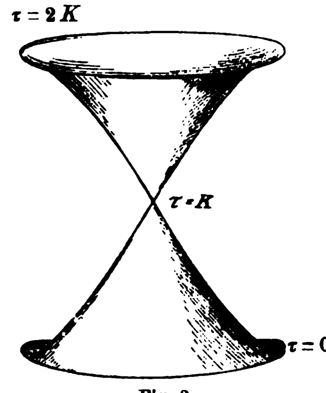


Fig. 2. Pseudosphärische Rotationsfläche vom elliptischen Typus.

Fall III): Hyperbolischer Typus. In diesem Falle haben wir:

$$r = \lambda \cosh \frac{u}{R}, \quad \frac{dr}{du} = \frac{\lambda}{R} \sinh \frac{u}{R}.$$

Der grösste Wert, den u auf dem reellen Zuge der Curve annimmt, bestimmt sich aus der Gleichung:

$$\sinh \frac{u}{R} = \frac{R}{\lambda},$$

und die Radien der Parallelkreise liegen zwischen dem kleinsten Werte λ und dem grössten Werte $\sqrt{R^2 + \lambda^2}$.

Setzen wir hier:

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \lambda^2}} = k, \quad \cosh \frac{u}{R} = \frac{\mathrm{dn}(\tau, k)}{k'},$$

so können wir die Coordinaten eines beweglichen Punktes der Curve durch elliptische Functionen des Parameters τ ausdrücken mittels der Gleichungen:

$$r = \frac{R}{k} \,\mathrm{dn}\,\tau, \quad z = \frac{R}{k}\left(\frac{J}{K}\,\tau - Z(\tau)\right).$$

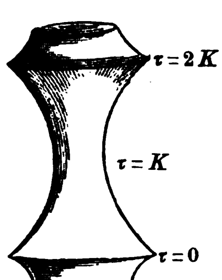


Fig. 3. Pseudosphärische Rotationsfläche vom hyperbolischen Typus.

Die Gestalt der Curve von $\tau = 0$ bis $\tau = 2K$ ist in Fig. 3 abgebildet. Wächst τ um $2K$, so kehrt derselbe Curvenzug periodisch wieder. Die grössten Parallelkreise, die den Werten $\tau = 2mK$ (m ganz) entsprechen, sind Rückkehrcurven der Fläche, und die kleinsten, die den Werten $\tau = (2m + 1)K$ entsprechen, sind geodätische Linien.

§ 100. Abwickelung einer Fläche constanter Krümmung auf eine Rotationsfläche.

Die soeben betrachteten drei Arten pseudosphärischer Rotationsflächen sind von einander verschieden, und es ist nicht möglich, eine von ihnen auf eine solche von anderer Art so abzuwickeln, dass sich die beiderseitigen Parallelkreise decken. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur zu beachten, dass beim parabolischen Typus die Parallelkreise Curven mit der constanten geodätischen Krümmung $\frac{1}{R}$ sind, während diese geodätische Krümmung beim elliptischen Typus $> \frac{1}{R}$, beim hyperbolischen dagegen $< \frac{1}{R}$ ist. Nach dem allgemeinen Satze (§ 96) jedoch ist jede pseudosphärische Fläche vom Radius R auf jede der Flächen I), II), III) abwickelbar. Wir wollen diese Art der Verbiegung jeder pseudosphärischen Fläche in eine pseudosphärische Rotationsfläche näher untersuchen und bemerken dazu folgendes:

a) Auf einer pseudosphärischen Fläche S ziehe man einen Grenzkreis und betrachte die zu demselben orthogonalen geodätischen Linien. Durch Biegung kann der Fläche die Gestalt einer Pseudosphäre erteilt

werden, für welche die soeben gezogenen geodätischen Linien die Meridiane werden (vgl. S. 190).

b) Auf der pseudosphärischen Fläche S nehmen wir einen Punkt P an und betrachten die von P ausgehenden geodätischen Linien, sowie die zu ihnen orthogonalen geodätischen Kreise. Wählen wir die Parameter u, v ebenso wie in § 98, S. 189, so haben wir:

$$ds_1^2 = du^2 + R^2 \sinh^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

Durch Vergleichung mit dem Quadrat des Linienelements der Rotationsfläche vom elliptischen Typus (S. 191):

$$ds_1^2 = du_1^2 + \lambda^2 \sinh^2 \frac{u_1}{R} dv_1^2$$

erhalten wir als Gleichungen für die Abwickelung der beiden Flächen auf einander:

$$u_1 = u, \quad \frac{\lambda}{R} v_1 = v.$$

Daraus ergiebt sich, dass, wenn die Länge v_1 auf der Rotationsfläche II) einen vollen Umgang von 0 bis 2π macht, der Winkel v das Intervall von $v = 0$ bis $v = 2\pi \sin\alpha$ durchläuft, das kleiner als 2π ist. Es genügt also schon ein Stück von S um P, um einen Mantel der Fläche II) vollständig zu bedecken. Ferner giebt es auf der Fläche II) kein Gebiet, das dem Teile von S jenseits des geodätischen Kreises vom Radius

$$u = \text{sect}\cosh\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)$$

entspricht; derjenige Teil von S um P, der in die Gestalt eines Mantels der Fläche II) gebracht werden kann, wird also von einem geodätischen Sector begrenzt.

c) Im Falle der Fläche III) vom hyperbolischen Typus ist der kleinste Parallelkreis eine geodätische Linie, und wir können daher eine beliebige pseudosphärische Fläche S auf die Fläche III) so abwickeln, dass sich eine willkürliche geodätische Linie g auf S mit dem kleinsten Parallelkreis deckt. Derjenige Teil von S, der sich auf einen Mantel der Fläche III) wirklich abwickelt, ist ein Streifen, der von zwei zur Curve g geodätisch parallelen und von ihr überall gleich weit entfernten Curven begrenzt wird, die nach der Verbiegung die grössten Parallelkreise (Rückkehrcurven) des Mantels geworden sind. An den Enden der geodätischen Linie g wird der Streifen von zwei zu g orthogonalen geodätischen Linien begrenzt, die sich nach der Verbiegung zu einem einzigen Meridian des Mantels zusammenschliessen. Die Länge und die Breite des Streifens hängen nur von dem Radius ab, den man für den kleinsten Parallelkreis wählen will.

§ 101. **Flächen, die eine stetige Verbiegung in sich zulassen.**

Die fundamentale Eigenschaft der Flächen von constantem Krümmungsmass, die wir in § 97 nachgewiesen haben, lässt sich folgendermassen aussprechen:

Das Linienelement jeder Fläche von constantem Krümmungsmass lässt ∞^3 Transformationen in sich zu.

Wir fragen nun, ob es noch andere Flächen giebt, die stetige Verbiegungen in sich zulassen. Wenn es solcher Verbiegungen doppelt unendlich viele gäbe, so könnte durch geeignete Verfügung über die beiden Transformationsparameter jeder Punkt der Fläche in jeden beliebigen anderen Punkt (eines passenden Gebiets) verlegt werden; nach dem Gaussischen Satze besässe die Fläche ein constantes Krümmungsmass, und die vorausgesetzten Verbiegungen wären also in dreifach, nicht allein doppelt unendlicher Zahl vorhanden.

Ferner ist klar, dass jede auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche wenigstens eine stetige Verbiegung in sich zulässt, entsprechend der Drehung der Fläche, auf die sie abwickelbar ist, um die Axe.

Es ist nun von Wichtigkeit, dass auch der umgekehrte Satz besteht:

Jede Fläche S, die eine stetige Verbiegung in sich zulässt, ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar.

Besitzt die Fläche S constantes Krümmungsmass, so ist der Satz bereits durch die Untersuchungen in den vorigen Paragraphen bewiesen. Im gegenteiligen Falle müssen sich während der angenommenen stetigen Verbiegung die Curven L, längs deren das Krümmungsmass K ein und denselben Wert hat, nach dem Gaussischen Satze in sich selbst verschieben. Und da nun diese Biegung von einem sich stetig ändernden Parameter abhängt, so kann jeder Punkt einer Curve L in jeden beliebigen anderen Punkt derselben Curve verlegt werden; daraus folgt, dass die Curven L constante geodätische Krümmung besitzen. Ferner verschieben sich die zu einer Curve L geodätisch parallelen Curven während der Verbiegung offenbar ebenfalls in sich selbst. Aus diesen Ueberlegungen ergiebt sich der obige Satz ohne Schwierigkeit, denn in der That lässt sich beweisen:

Wenn eine Fläche S ein System von Curven L besitzt, die geodätisch parallel sind und von denen jede constante geodätische Krümmung hat, so ist sie auf eine Rotationsfläche abwickelbar, deren Parallelkreise die Biegungscurven der Curven L sind.

Man wähle nämlich als Coordinatensystem das von den Curven L ($u =$ Const.) und von den dazu orthogonalen geodätischen Linien ($v =$ Const.) gebildete. Dann nimmt das Quadrat des Linienelements die Form:

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

an. Nun ist nach Voraussetzung (vgl. S. 148):

$$-\frac{1}{\varrho_u} = \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \varphi(u),$$

also:

$$\sqrt{G} = UV,$$

wo U eine Function von u allein und V eine Function von v allein ist. Wird dann

$$\int V dv = v_1$$

gesetzt, so ergiebt sich sofort das Quadrat des Linienelements einer Rotationsfläche (vgl. § 42):

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv_1^2.$$

§ 102. Auf einander abwickelbare Rotationsflächen.

Wir wollen nun einige einfache Beispiele von auf einander abwickelbaren Flächen betrachten und zunächst untersuchen, ob zwei Rotationsflächen S, S_1 auf einander abgewickelt werden können.

Aus dem Gaussischen Satze folgt vorerst, dass sich die Parallelkreise von S mit denjenigen von S_1 und dass sich also auch die beiderseitigen Meridiane decken müssen. Ausgenommen sind natürlich die Flächen von constantem Krümmungsmass, aber die nachfolgenden Untersuchungen gelten auch für diese Flächen, wenn noch die Bedingung hinzugefügt wird, dass sich die Parallelkreise der einen Fläche mit denjenigen der anderen decken sollen.

Wenn das Quadrat des Linienelements von S durch

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2$$

und dasjenige von S_1 durch

$$ds_1^2 = du_1^2 + r_1^2 dv_1^2$$

gegeben ist, so können wir ohne weiteres $u_1 = u$ setzen, indem wir die Meridianbogen von zwei entsprechenden Parallelkreisen ab rechnen. Um die beiden Linienelemente in einander zu transformieren, muss man $v_1 = v_1(v)$ setzen und diese Function durch die Bedingung:

$$r_1(u) \frac{dv_1}{dv} = r(u)$$

bestimmen.

Hieraus ergiebt sich:

$$r_1 = kr, \quad v_1 = \frac{v}{k} \quad (k \text{ willkürlich constant}).$$

Wenn also $r = \varphi(u)$ die Gleichung der Meridiancurve von S ist, so sind die Coordinaten eines Punktes der Meridiancurve von S_1 gegeben durch:

$$r = k\varphi(u), \quad z = \int \sqrt{1 - k^2\varphi'^2(u)}\, du.$$

Daraus folgt: Jede Rotationsfläche kann auf ∞^1 Weisen so verbogen werden, dass sie eine Rotationsfläche bleibt.

Wir untersuchen nun des näheren, in welcher Weise sich die Fläche S_1 auf S abwickelt. Setzen wir $k < 1$ voraus, so zeigt die Gleichung:

$$v = kv_1,$$

dass, wenn die Länge v_1 auf S_1 einen ganzen Umgang vollendet hat, wobei sie gleich 2π wird, die Länge v gleich $2k\pi < 2\pi$ wird. Wenn also die Fläche S_1 auf die Fläche S abgewickelt wird, so wird letztere nicht ganz bedeckt, sondern es bleibt ein Stück (Zweieck) frei, das zwischen zwei Meridianen liegt, deren Ebenen einen Winkel von der Amplitude $2\pi(1 - k)$ bilden. Um S_1 auf S auszubreiten, muss man also S_1 längs eines Meridianes aufschneiden, öffnen und dann so verbiegen, dass die Schnittränder zwei bestimmte Meridiane auf S werden. Beachtet man, dass die geodätische Krümmung der Parallelkreise und die Totalkrümmung der Fläche bei der Verbiegung ungeändert bleiben, so sieht man sofort, dass in zwei einander entsprechenden Punkten die Krümmung der Meridiancurve von S grösser als diejenige der Meridiancurve von S_1 ist.

Der Fall $k > 1$ lässt sich offenbar auf den vorigen zurückführen, wenn wir umgekehrt S in S_1 verbiegen, was ja darauf hinauskommt, dass k durch $\frac{1}{k}$ ersetzt wird. Hierbei ist aus S ein Zweieck herauszunehmen und darauf die Stetigkeit der Fläche in der Weise wiederherzustellen, dass man die beiden Grenzmeridiane des herausgenommenen Zweiecks durch Verbiegung zu einem einzigen vereinigt.

Ferner ist zu bemerken, dass jedem Punkte der Meridiancurve von S ein reeller Punkt der Meridiancurve von S_1 entspricht, so lange $k\frac{dr}{du} < 1$ ist, was wegen der obigen Gleichungen immer der Fall ist, wenn $k < 1$ ist. Ist jedoch $k > 1$, so schliessen die Parallelkreise, denen der Wert $\frac{1}{k}$ für $\frac{dr}{du}$ entspricht, auf S eine Zone ein, welche der thatsächlich auf S_1 abwickelbare Teil von S ist. Nach der Verbiegung

werden die Grenzparallelkreise dieser Zone Rückkehrparallelkreise für S_1, d. h. solche, auf denen die Meridiane Rückkehrpunkte haben.

§ 103. **Beispiel: Rotationsflächen constanter Krümmung.**

Als Beispiel betrachten wir die Verbiegungen der Rotationsflächen von constantem Krümmungsmass.

a) Für die Kugel vom Radius Eins kann

$$r = \cos u$$

gesetzt werden. Es sind dann die Coordinaten längs der verbogenen Meridiane durch die Gleichungen:

$$r = k \cos u, \quad z = \int \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}\, du$$

gegeben.

Wir können dieselben durch elliptische Functionen eines Parameters τ ausdrücken. Zu diesem Zwecke setzen wir, wenn $k < 1$ ist $\cos u = \mathrm{cn}(\tau, k)$ und erhalten:

$$r = k \,\mathrm{cn}\,\tau, \quad z = \left(1 - \frac{J}{K}\right)\tau + Z(\tau).$$

Ist $k > 1$, so führen wir $\frac{1}{k}$ statt k ein und erhalten, indem wir

$$\cos u = \mathrm{dn}(\tau, k)$$

setzen:

$$r = \frac{\mathrm{dn}\,\tau}{k}, \quad z = \left(k - \frac{J}{Kk}\right)\tau + \frac{1}{k} Z(\tau).$$

Im Falle $k < 1$ ergiebt sich eine spindelförmige Fläche, deren Meridiane die Axe in einem (konischen) Punkte unter dem Winkel $\alpha = \arcsin k$ treffen. Im Falle $k > 1$ liegt eine Zone vor, die von zwei kleinsten Rückkehrparallelkreisen begrenzt ist. Die drei nachstehenden Figuren 4, 5, 6 stellen die den drei Fällen entsprechenden Flächen dar. Auf der mittleren, der Kugel, ist die Zone angegeben, die sich auf die ganze Fläche in Fig. 6 abwickelt.

b) Die Pseudosphäre besitzt die merkwürdige Eigenschaft, dass alle ihre Rotationsbiegungsflächen mit ihr identisch sind, was sich daraus ergiebt, dass die geodätische Krümmung der Parallelkreise constant gleich $\frac{1}{R}$ ist. Im Falle des Einschrumpfens der Parallelkreise ($k < 1$) wird der grösste (Rückkehr-)Parallelkreis ein kleinerer Parallelkreis, und es bleibt demnach die zwischen diesem und dem grössten Parallelkreise gelegene Zone unbedeckt. Bei der umgekehrten Verbiegung wird ein kleinerer Parallelkreis zum Rückkehrparallelkreis; um jedoch diese Verbiegung zu bewerkstelligen, muss man zuerst die Zone

zwischen diesem und dem wirklichen Rückkehrparallelkreis aus der Pseudosphäre herausschneiden.

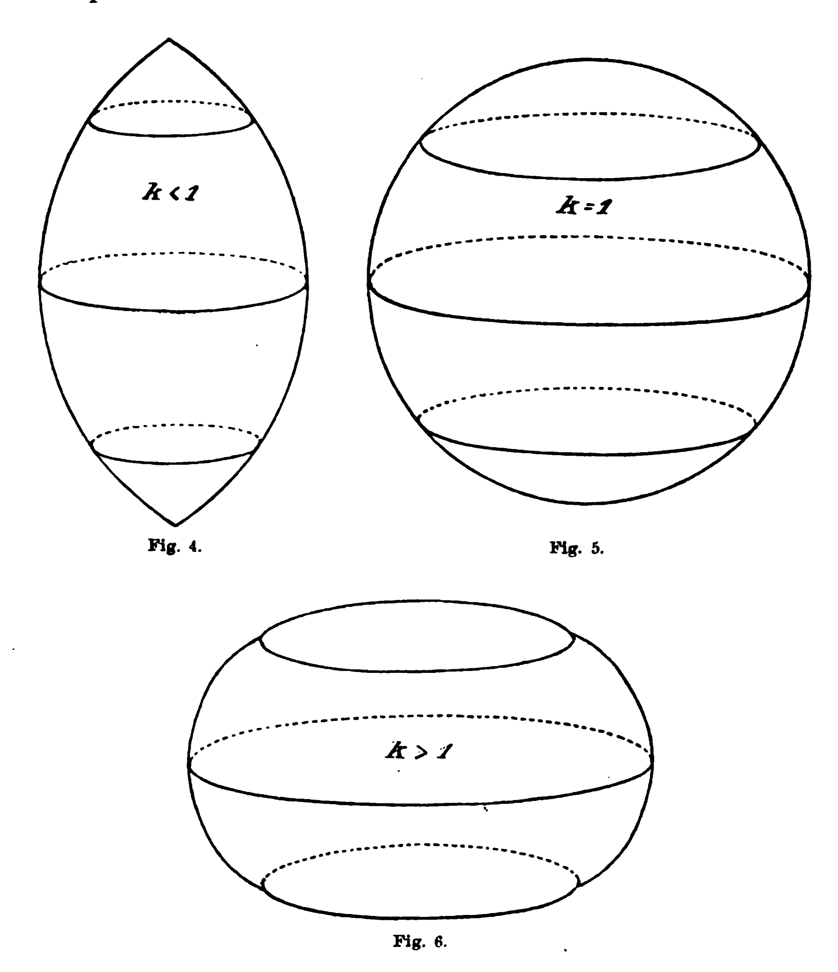


Fig. 4. Fig. 5.

Fig. 6.

Die Verbiegung von pseudosphärischen Rotationsflächen der anderen beiden Arten führt auf Flächen von demselben Typus. Dabei ändert sich im Falle der Flächen vom elliptischen Typus der Öffnungswinkel an der Spitze (am konischen Punkt), bei denjenigen vom hyperbolischen Typus der Radius des kleinsten Parallelkreises.

§ 104. Theorem von Bour über Schraubenflächen.

Das Ergebnis in § 101 gestattet eine unmittelbare Anwendung auf eine wichtige Klasse von Flächen, die als Schraubenflächen bezeichnet werden. Dieselben werden von einer ebenen oder doppelt

gekrümmten Curve erzeugt, der eine doppelte Bewegung erteilt wird, eine drehende um die Axe und eine fortschreitende parallel zur Axe, deren Geschwindigkeiten in einem constanten Verhältnis zu einander stehen. Die verschiedenen Punkte der erzeugenden Curve beschreiben dabei sämtlich Schraubenlinien, deren gemeinsame Axe die Axe der Schraubenfläche ist und die alle gleiche Ganghöhe haben. Wenn wir beachten, dass sich bei der Schraubung, vermöge deren die Fläche erzeugt wird, die ganze Fläche in sich selbst bewegt, so brauchen wir nur den Satz in § 101 anzuwenden und kommen dann zu dem eleganten, von Bour herrührenden Ergebnis:

Jede Schraubenfläche ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar; die Schraubenlinien decken sich dabei mit den Parallelkreisen der Rotationsfläche.

Da sich jede Schraubenlinie unendlich oft auf den entsprechenden Parallelkreis aufwickelt, so ist es klar, dass die Rotationsfläche von der Schraubenfläche unendlich oft überdeckt wird.

Von diesem Satze wollen wir nun einen directen Beweis geben, um auch die wirklichen Abwickelungsgleichungen zu erhalten. Hierzu bemerken wir, dass, wenn durch die Axe eine Ebene gelegt wird, auf der Schraubenfläche eine Schnittcurve (Meridianprofil) entsteht, welche die Schraubenfläche erzeugt, wenn ihr eben die Schraubung um die Axe erteilt wird, durch welche die Fläche erzeugt wurde. Eine Schraubenfläche ist also bestimmt, wenn ihr Meridianprofil und der Parameter der Schraubung gegeben sind.

Als z-Axe werde die Axe der Schraubenfläche gewählt, mit ϱ der Abstand eines Punktes des Meridianprofils von der Axe bezeichnet, und es sei

$$z = \varphi(\varrho)$$

die Gleichung des Meridianprofils. Wir bezeichnen ferner mit v den Winkel, um den sich nach einer beliebigen Zeit die Ebene des Meridianprofils gedreht hat, und mit m das Verhältnis der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung zur Rotationsgeschwindigkeit. Die Coordinaten x, y, z eines beweglichen Punktes der Schraubenfläche sind dann als Functionen von ϱ und v durch die Gleichungen:

$$x = \varrho \cos v, \quad y = \varrho \sin v, \quad z = \varphi(\varrho) + mv$$

gegeben, aus denen

$$ds^2 = [1 + \varphi'^2(\varrho)]\, d\varrho^2 + 2m\varphi'(\varrho) d\varrho\, dv + (\varrho^2 + m^2)\, dv^2$$

folgt.

Wir führen nun statt der Parameterlinien v andere Linien v_1 ein, indem wir

$$v = kv_1 - m\int\frac{\varphi'(\varrho)\,d\varrho}{\varrho^2 + m^2}$$

setzen, wobei k eine willkürliche Constante ist. Dann ergiebt sich:

$$ds^2 = \left[1 + \frac{\varrho^2\varphi'^2(\varrho)}{\varrho^2 + m^2}\right]d\varrho^2 + k^2(\varrho^2 + m^2)dv_1^2.$$

Vergleichen wir dieses Quadrat des Linienelements mit

$$ds_1^2 = [1 + \psi'^2(r)]\,dr^2 + r^2dv_1^2,$$

d. h. mit demjenigen einer Rotationsfläche, deren Meridiancurve durch die Gleichung:

$$z = \psi(r)$$

gegeben ist, so können wir beide einander gleich machen, wenn wir zwischen r, $\psi(r)$, ϱ, $\varphi(\varrho)$ folgende Beziehungen aufstellen:

$$(8)\qquad \begin{cases} r^2 = k^2(\varrho^2 + m^2), \\ [1 + \psi'^2(r)]\left(\dfrac{dr}{d\varrho}\right)^2 = 1 + \dfrac{\varrho^2\varphi'^2(\varrho)}{\varrho^2 + m^2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen beweisen wieder den Bour'schen Satz. Ferner sieht man, dass, wenn eine Schraubenfläche oder eine Rotationsfläche willkürlich gewählt wird, die Rotationsflächen bez. die Schraubenflächen, auf die sie abwickelbar ist, durch Quadraturen gefunden werden können. Im ersten Falle ergiebt sich nämlich $\psi'(r)$ durch Elimination von ϱ, im zweiten $\varphi'(\varrho)$ durch Elimination von r.

§ 105. **Beispiele zur Abwickelung von Schraubenflächen auf Rotationsflächen.**

Wir wenden nun die Gleichungen (8) auf zwei einfache Beispiele an.

1) Das Meridianprofil sei eine zur Axe senkrechte Gerade; die erzeugte Schraubenfläche ist die bereits in § 19, S. 32, betrachtete Minimal-Schraubenregelfläche. Wir haben in den Gleichungen (8) in diesem Falle $\varphi'(\varrho) = 0$, also:

$$1 + \psi'^2(r) = \left(\frac{d\varrho}{dr}\right)^2 = \frac{r^2}{k^2(r^2 - m^2k^2)}.$$

Wenn die willkürliche Constante k gleich Eins gesetzt wird, so folgt:

$$z = \psi(r) = m\int\frac{dr}{\sqrt{r^2 - m^2}}$$

und durch Ausführung der Integration:

$$r = m\cosh\frac{z}{m}\cdot$$

Die Meridiancurve der Rotationsfläche ist demnach eine gewöhnliche Kettenlinie, deren Leitlinie die Drehaxe ist.

Die zugehörige Rotationsfläche wird Catenoid genannt Die Erzeugenden der Schraubenfläche decken sich bei der Abwickelung mit den Meridianen, und die Axe $\varrho = 0$ wird der Kehlkreis $r = m$ des Catenoids.

2) Das Meridianprofil sei eine um den Winkel α zur Axe geneigte Gerade; ihre Gleichung ist dann:

$$z = \varrho \operatorname{cotg} \alpha.$$

Wenn also in (8)

$$\varphi'(\varrho) = \operatorname{cotg} \alpha$$

gesetzt wird, so ergiebt sich:

$$1 + \psi'^2(r) = \left[1 + \frac{(r^2 - k^2 m^2) \operatorname{cotg}^2 \alpha}{r^2}\right] \frac{r^2}{k^2 (r^2 - k^2 m^2)}.$$

Setzen wir die willkürliche Constante k gleich $\operatorname{cotg} \alpha$, so erhalten wir:

$$\psi'(r) = \frac{r \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{r^2 - m^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha}}.$$

Die Gleichung der Meridiancurve der Rotationsfläche ist also:

$$z = \operatorname{tg} \alpha \sqrt{r^2 - m^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha}$$

oder:

$$\frac{r^2}{m^2 \operatorname{cotg}^2 \alpha} - \frac{z^2}{m^2} = 1.$$

Die Rotationsfläche ist daher ein einschaliges Rotationshyperboloid. Man sieht leicht, dass sich bei der Abwickelung die Axe $\varrho = 0$ der Schraubenfläche mit dem Kehlkreis des Hyperboloids und die Erzeugenden der Schraubenfläche mit der einen Schar der Erzeugenden des Hyperboloids decken.

§ 106. Das allgemeine Problem der Verbiegung von Flächen.

Wir gehen nun zu der Behandlung einer zweiten und wichtigeren Aufgabe aus der Lehre von der Abwickelbarkeit der Flächen auf einander über, die folgendermassen lautet: Alle Flächen zu finden, die auf eine gegebene Fläche abwickelbar sind, oder: Alle Flächen mit gegebenem Linienelement zu finden.

Diese schwierige Aufgabe kann vollständig nur in wenigen besonderen Fällen gelöst werden, die in späteren Abschnitten dieses Buches behandelt werden sollen. Doch gestatten es die allgemeinen Sätze über partielle Differentialgleichungen, sehr wichtige allgemeine Sätze bezüglich der gestellten Aufgabe abzuleiten. Und mit diesen eben

wollen wir uns beschäftigen, soweit dieses die Grenzen der Kürze, die wir uns gesteckt haben, zulassen*).

Der erste Weg, die vorliegende Aufgabe in Angriff zu nehmen, ergiebt sich naturgemäss aus den Grundgleichungen der Flächentheorie (Kap. IV). Wenn die erste Grundform:

$$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

gegeben ist, so gehört zu jeder Fläche mit diesem Quadrat des Linienelements eine zweite Grundform:

$$D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2,$$

und die Functionen D, D', D'' müssen den Gleichungen (III), (IV), § 48, S. 91, d. h. der Gaussischen und den beiden Codazzi'schen Gleichungen, genügen. Umgekehrt, wenn D, D', D'' drei Functionen von u und v sind, die den drei genannten Gleichungen genügen, so giebt es eine zugehörige Fläche mit dem gegebenen Linienelement, und die wirkliche Bestimmung der Fläche hängt in letzter Linie von der Integration einer Riccati'schen Gleichung ab (§ 50, Kap. IV).

Würden wir also z. B. das Linienelement einer Rotationsfläche nehmen, also

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2$$

setzen, wo r nur von u abhängt, so könnten wir den genannten Grundgleichungen genügen, wenn wir für D, D', D'' Functionen von u allein wählen würden. Die auf die Rotationsflächen abwickelbaren Flächen, die wir auf diese Weise finden würden, sind gerade die Schraubenflächen (§ 104)**).

§ 107. Partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, von der die Verbiegung einer gegebenen Fläche abhängt.

Weit wichtiger als die obige Methode ist diejenige, zu deren Entwicklung wir nun übergehen, indem wir uns dabei auf die Ergebnisse in § 60, Kap. IV, vor allem auf die Gleichung (B), S. 116, stützen.

Für jede Fläche:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

mit gegebenem Quadrat des Linienelements:

---

*) Vollständig durchgeführt findet der Leser die Aufgabe im 3. Bande der Leçons von **Darboux**, S. 263 ff.

**) Zum Beweise braucht man nur zu beachten, dass in diesem Falle sowohl die erste als auch die zweite Grundform die stetige Transformation in sich:

$$u' = u, \quad v' = v + \text{Const.}$$

zulassen. Da also die Fläche eine stetige Bewegung in sich gestattet, ist sie eine Schraubenfläche.

$$(9) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$$

besagt die so eben erwähnte Gleichung, dass jede der drei unbekannten Functionen x, y, z der partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(10) \qquad \Delta_{22}x = (1 - \Delta_1 x)K$$

genügt, deren Coefficienten allein aus E, F, G und deren ersten und zweiten Differentialquotienten gebildet sind*).

Nun ist es wichtig, mit Darboux zu bemerken, dass die Gleichung (10) folgende Bedeutung hat:

Ist $x(u, v)$ eine Lösung der Gleichung (10), so hat die quadratische Form:

$$- dx^2 + Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 =$$
$$= \left[E - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right]du^2 + 2\left[F - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]du\,dv + \left[G - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]dv^2$$

die Krümmung Null.

Um dieses auf die einfachste Art zu beweisen, werde

$$x = u, \quad F = 0$$

gesetzt, was offenbar wegen der Invarianteneigenschaft unserer Gleichung erlaubt ist. Die Gleichung (10) lautet dann:

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}^2 = G(E-1)K.$$

Wenn hierin für die Christoffel'schen Symbole die wirklichen Werte aus § 35:

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}, \quad \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} = -\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}$$

eingesetzt werden, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2 + 4E^2G(E-1)K = 0.$$

Nun ist in orthogonalen Parametern u, v (§ 35, S. 68, Formel (18)):

$$(11) \qquad 4E^2G^2K = E\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] + G\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] -$$
$$- 2EG\left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right].$$

*) Unter Anwendung der Monge'schen Bezeichnungen $p, q;\ r, s, t$ für die ersten und zweiten Differentialquotienten der unbekannten Function (vgl. S. 114) lautet die Gleichung:

$$\left(r - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}p - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}q\right)\left(t - \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}p - \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}q\right) - \left(s - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}p - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}q\right)^2 =$$
$$= K\left[EG - F^2 - (Eq^2 - 2Fpq + Gp^2)\right]$$

und hat die Ampère'sche lineare Form bezüglich $rt - s^2$, r, s, t.

Die vorige Gleichung, mit G multipliciert, lautet dann:

$$G\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] + E(E-1)\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] +$$

$$+ G(E-1)\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] - 2EG(E-1)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right] = 0.$$

Werden die Glieder, die sich aufheben, weggelassen und wird noch durch E dividiert, so ergiebt sich die äquivalente Gleichung:

$$(E-1)\left[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] + G\left[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] -$$

$$- 2(E-1)G\left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right] = 0,$$

die wiederum infolge von (11) besagt, dass die Form:

$$(E-1)du^2 + Gdv^2$$

die Krümmung Null hat.

Nach dieser Vorbemerkung nehmen wir an, es wäre uns eine Lösung $x(u, v)$ der Gleichung (10) bekannt. Wir wollen dann sehen, ob es eine zugehörige reelle Fläche mit dem gegebenen Linienelement giebt. Da dann die Differentialform:

(12) $$Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2 - dx^2$$

die Krümmung Null besitzt, so ist es, damit es zwei andere reelle Functionen $y(u, v)$, $z(u, v)$ giebt, die der Gleichung (9) genügen, notwendig und hinreichend, dass die Form (12) eine definite, d. h.

$$\left[E - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right]\left[G - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right] - \left[F - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right]^2 > 0$$

oder

$$\Delta_1 x < 1$$

ist. Wird diese Bedingung als erfüllt vorausgesetzt, so ergeben sich nämlich y und z mittels Quadraturen nach § 87, S. 170. Also: Jeder reellen Lösung $x(u,v)$ der Gleichung (10), die ausserdem der Ungleichheit $\Delta_1 x<1$ genügen muss, entspricht eine reelle Fläche mit dem gegebenen Linienelement. Ist diese Lösung bekannt, so ergiebt sich die zugehörige Fläche mittels Quadraturen.

§ 108. Verbiegung einer Fläche mit einer starren Curve.

Wir beschäftigen uns nun mit der folgenden Frage: Wenn eine Fläche S gegeben und auf ihr eine Curve Γ gezogen ist, kann dann die Fläche verbogen werden, ohne dass die Curve Γ verzerrt wird?

Unter der Voraussetzung, dass dieses möglich ist, sei S_1 eine der

Gestalten, die S bei der Verbiegung annimmt, wobei Γ starr bleibt. Wir können dann die geänderte Gestalt S_1 als von der ursprünglichen S so wenig abweichend annehmen, dass die Normalen von S_1 und S einander beliebig nahe sind. Beachtet man nun aber, dass Γ auf S_1 und S dieselbe geodätische Krümmung hat, und erinnert man sich an die Beziehung, die zwischen der geodätischen und der absoluten Krümmung besteht (§ 75, S. 147), so kann man daraus sofort schliessen, dass längs Γ die Normalen von S_1 und S zusammenfallen.

Nun nehmen wir der Einfachheit halber auf S und S_1 ein orthogonales Coordinatensystem (u, v) an, und es sei

$$v = 0$$

die Gleichung der Curve Γ. Durch Beifügung des Index 1 unterscheiden wir die auf S_1 bezüglichen Grössen. Dann haben wir offenbar:

$$\left.\begin{array}{lll} x_1 = x, & y_1 = y, & z_1 = z, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \dfrac{\partial x}{\partial u}, & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = \dfrac{\partial y}{\partial u}, & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \dfrac{\partial x}{\partial v}, & \dfrac{\partial y_1}{\partial v} = \dfrac{\partial y}{\partial v}, & \dfrac{\partial z_1}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial v}, \\ X_1 = X, & Y_1 = Y, & Z_1 = Z \end{array}\right\} \text{für } v = 0.$$

Betrachten wir nun z. B. x_1 und x, so sind dieses solche Lösungen derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung (10), die für $v = 0$ in ihren Werten und in denjenigen ihrer ersten Differentialquotienten übereinstimmen. Wenn wir nun beweisen, dass auch die drei zweiten Differentialquotienten von x_1 für $v = 0$ mit den entsprechenden von x übereinstimmen, so ist infolge der allgemeinen Sätze über die Lösungen partieller Differentialgleichungen*) nachgewiesen, dass x_1 und x für alle Werte von u und v übereinstimmen. Da derselbe Schluss für y_1, y; z_1, z wiederholt werden kann, so folgt, dass S_1 und S zusammenfallen.

In der That folgt aus den Anfangsbedingungen:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \quad (\text{für } v = 0)$$

unmittelbar durch Differentiation nach u:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \ (\text{für } v = 0).$$

Die Grundgleichungen (I) der Flächentheorie, § 47, S. 89, ergeben mithin, dass für $v = 0$

$$D_1 = D, \quad D_1' = D'$$

*) Vgl. z. B. Goursat, Vorlesungen über die Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, deutsch von Maser, Leipzig 1893, S. 21.

ist. Die aus (III), S. 91, folgende Gleichung:

$$DD'' - D'^2 = D_1 D_1'' - D_1'^2$$

giebt also, wenn darin $v = 0$ gesetzt wird:

$$DD'' = DD_1'' \quad (\text{für } v = 0).$$

Daraus folgt:

$$(D_1'')_{v=0} = (D'')_{v=0},$$

wofern nicht $(D)_{v=0} = 0$ ist. Wird dieser Fall ausgeschlossen, so ergiebt sich aus der dritten der Gleichungen (I), S. 89:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \quad (\text{für } v = 0),$$

wie wir beweisen wollten. Daher fallen S_1 und S zusammen.

In dem ausgeschlossenen Falle $(D)_{v=0} = 0$ ist nach S. 109 die Curve $v = 0$ eine Haupttangentencurve von S; wir können also den Satz aussprechen: Wenn auf einer biegsamen Fläche S eine Curve Γ starr bleibt, so kann die Fläche nicht verbogen werden, vorausgesetzt, dass die Curve Γ keine Haupttangentencurve von S ist.

Falls Γ eine Haupttangentencurve ist, so folgt aus weiteren Eigenschaften der partiellen Differentialgleichungen, wie hier nur kurz erwähnt werden kann, dass es in der That möglich ist, die Fläche ohne Verzerrung der Curve zu verbiegen. Es ist dieses eine eigentümliche Eigenschaft der Haupttangentencurven, weshalb sie auch als Faltungslinien bezeichnet werden. Diese Eigenschaft, die sie vor jeder anderen Curve der Fläche auszeichnet, ist im Grunde genommen eine Folge davon, dass auf jeder Fläche S die Haupttangentencurven die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (10) sind, von deren Lösung die Verbiegung von S abhängt*) (Darboux, 3. Bd., a. a. O.).

---

*) Wird die Gleichung (10) in der in der Anmerkung zum vorigen Paragraphen gegebenen Form (S. 204):

$$\Phi(r, s, t) = 0$$

geschrieben, so geht die Differentialgleichung der Charakteristiken:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} du^2 - \frac{\partial \Phi}{\partial s} du\,dv + \frac{\partial \Phi}{\partial r} dv^2 = 0$$

infolge der Gleichungen (I), S. 89, eben in diejenige der Haupttangentencurven:

$$D du^2 + 2D' du\,dv + D'' dv^2 = 0$$

über. (Vgl. Darboux, 3. Bd., S. 252.)

§ 109. Verbiegung, bei der eine gegebene Curve in eine andere gegebene Curve übergeht.

Der soeben bewiesene Satz führt naturgemäss zu der Frage: Ist es möglich, eine Fläche S' so zu verbiegen, dass eine gegebene Curve C auf ihr eine vorgeschriebene Gestalt Γ annimmt?

Zunächst bemerken wir, dass, wenn die gesuchte Vorbiegung möglich sein soll, die absolute Krümmung von Γ in jedem Punkte nach S. 147 grösser als die geodätische Krümmung von C in dem entsprechenden Punkte (oder mindestens ihr gleich) sein muss. Diese Bedingung setzen wir als erfüllt voraus und betrachten auch einstweilen den Fall der Gleichheit der absoluten und geodätischen Krümmung von Γ als ausgeschlossen, in welchem Falle Γ auf der Biegungsfläche eine Haupttangentencurve wäre.

Unter der Voraussetzung, dass die gesuchte Verbiegung möglich ist, sei S die Biegungsfläche, auf der wir ein orthogonales Coordinatensystem (u, v) wie im vorigen Paragraphen annehmen, so dass Γ die Curve $v = 0$ ist. Ferner setzen wir der grösseren Klarheit halber fest, dass der Parameter u der von einem bestimmten festen Punkte der Curve Γ gerechnete Bogen dieser Curve sein soll, so dass wir

$$E = 1 \quad (\text{für } v = 0)$$

haben. Mit σ bezeichnen wir den Winkel, um den sich die positive Richtung der Normale von S in der Normalenebene von Γ in positivem Sinne drehen muss, um mit derjenigen der Hauptnormale von Γ zusammenzufallen. Indem wir für die Curve Γ die üblichen Bezeichnungen der Curventheorie (Kap. I) beibehalten, haben wir dann für $v = 0$:

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{ll} \cos\alpha = \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \cos\beta = \frac{\partial y}{\partial u}, & \cos\gamma = \frac{\partial z}{\partial u}, \\ \cos\xi = X\cos\sigma - \frac{\sin\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, & \cos\eta = Y\cos\sigma - \frac{\sin\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \\ & \cos\zeta = Z\cos\sigma - \frac{\sin\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ \cos\lambda = -\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v} - X\sin\sigma, & \cos\mu = -\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v} - Y\sin\sigma, \\ & \cos\nu = -\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} - Z\sin\sigma. \end{array}\right.$$

Nun ist nach (I), S. 89, und nach (A), S. 10:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} + DX = \frac{\cos\xi}{\varrho}$$

nebst den analogen Gleichungen für y und z. Da nun nach § 35:

$$(14)\quad \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}_{v=0} = \left(\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}\right)_{v=0} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}_{v=0} = -\left(\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}\right)_{v=0} = \left(\frac{1}{\varrho_v \sqrt{G}}\right)_{v=0}$$

ist, so schliessen wir aus dem Vergleich mit den Gleichungen (13):

$$(15)\qquad D = \frac{\cos\sigma}{\varrho}, \quad \frac{1}{\varrho_v} = -\frac{\sin\sigma}{\varrho} \quad \text{für } v = 0.$$

Da die absolute Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ und die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_v}$ von Γ bekannt sind, so liefert die zweite dieser Gleichungen für den unbekannten Winkel σ zwei Werte, die sich zu π ergänzen.

Wir denken uns einen von diesen Werten, von denen jeder thatsächlich zu einer entsprechenden Fläche S führt*), für σ ausgewählt und erhalten ausserdem aus den Gleichungen (13) die Anfangswerte von $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$:

$$(16)\qquad \left.\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial v} = -\sqrt{G}\,(\sin\sigma\cos\xi + \cos\sigma\cos\lambda), \\ \frac{\partial y}{\partial v} = -\sqrt{G}\,(\sin\sigma\cos\eta + \cos\sigma\cos\mu), \\ \frac{\partial z}{\partial v} = -\sqrt{G}\,(\sin\sigma\cos\zeta + \cos\sigma\cos\nu) \end{cases}\right\} \text{für } v = 0.$$

Auch ist es zweckmässig, die Werte von X, Y, Z längs Γ anzugeben. Es sind dies die folgenden:

$$(16^*)\qquad \left.\begin{cases} X = \cos\sigma\cos\xi - \sin\sigma\cos\lambda, \\ Y = \cos\sigma\cos\eta - \sin\sigma\cos\mu, \\ Z = \cos\sigma\cos\zeta - \sin\sigma\cos\nu \end{cases}\right\} \text{für } v = 0.$$

Aus (16) folgt, dass wir für die Lösungen x, y, z der Gleichung (10):

$$\Delta_{22}\vartheta = (1 - \Delta_1\vartheta)K$$

ausser den Anfangswerten der Functionen selbst und ihrer ersten Ableitungen nach v auch diejenigen der zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}$$

kennen. Die partielle Differentialgleichung (10), der sie genügen,

*) Dass die gestellte Aufgabe auf diese Weise zwei verschiedene Lösungen hat, widerspricht nicht dem Satze in § 108, da ja die beiden Flächen S, die sich so ergeben, auf einander abwickelbar sind und die Curve Γ bei der stetigen Verbiegung der einen Fläche in die andere schliesslich ihre anfängliche Gestalt wieder annimmt, sich jedoch in den Zwischenstadien ändert.

liefert **mindestens** für **zwei** von ihnen die Anfangswerte der zweiten Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Entgegengesetzten Falls würden nämlich wegen der Form der Gleichungen (10) von den Gleichungen:

$$\frac{\cos\xi}{\varrho} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v},$$

$$\frac{\cos\eta}{\varrho} = \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\cos\zeta}{\varrho} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial v}$$

für $v = 0$ zwei gelten, und nach den vorhin entwickelten Gleichungen (13), (14) würde z. B., wenn die letzten beiden als richtig angenommen werden, für $v = 0$ folgen: $Y = 0$, $Z = 0$. Die Curve Γ wäre demnach der Querschnitt eines der x-Axe parallelen Cylinders und der Winkel σ ein Rechter, also die Curve Γ entgegen der Voraussetzung eine Haupttangentencurve.

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir also insbesondere voraussetzen, dass für die Function $x(u, v)$ der Anfangswert von $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ bestimmt sei.

§ 110. **Erledigung dieses Problems der Verbiegung.**

Nach dieser Vorbemerkung suchen wir eine Lösung $x_1(u, v)$ der Gleichung (10) von der Beschaffenheit, dass sich für $v = 0$

$$(\alpha) \qquad x_1 = x, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\sqrt{G}\,(\sin\sigma\cos\xi + \cos\sigma\cos\lambda)$$

ergiebt, wo σ einen der beiden oben festgesetzten, aus der zweiten der Gleichungen (15) entnommenen Werte hat. Da durch diese Anfangswerte und durch die partielle Differentialgleichung (10) die Werte der drei zweiten Differentialquotienten von x_1 für $v = 0$ bestimmt werden, so liefern uns die in § 108 erwähnten allgemeinen Sätze über partielle Differentialgleichungen das Ergebnis, dass es eine und nur eine Lösung x_1 der Gleichung (10) giebt, die den Anfangsbedingungen genügt. Für diese Lösung ist für $v = 0$:

$$\Delta_1 x_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 = \cos^2\alpha + (\sin\sigma\cos\xi + \cos\sigma\cos\lambda)^2 =$$
$$= 1 - (\cos\sigma\cos\xi - \sin\sigma\cos\lambda)^2 < 1,$$

und die Bedingung $\Delta_1 x_1 < 1$ ist demnach in einem gewissen zweidimensionalen Gebiet (u, v) erfüllt. Nach dem Satze am Schlusse von

§ 107 entspricht also dieser Lösung x_1 der Gleichung (10) eine Fläche S_1 mit dem gegebenen Linienelement, und wir wollen nun nachweisen, dass auf S_1 die Curve $v = 0$, die wir mit C_1 bezeichnen, ihrer Gestalt nach genau mit der gegebenen Curve Γ übereinstimmt, wozu wir nur nachzuweisen brauchen, dass C_1 und Γ bei gleichem Bogen u gleiche Flexion und Torsion haben (§ 8, S. 12). Indem wir wie gewöhnlich durch den Index 1 die auf S_1 bezüglichen Ausdrücke unterscheiden, haben wir analog der letzten Formel auf S. 208:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} + D_1 X_1.$$

Wenn v gleich Null gesetzt wird, so ergiebt sich nach (13) und (14):

$$\frac{1}{\varrho_v} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v} + D_1 X = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\cos \xi}{\varrho} = \frac{\cos \sigma}{\varrho} X - \frac{\sin \sigma}{\varrho \sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Nun ist σ durch die zweite der Gleichungen (15) bestimmt und X (der getroffenen Annahme zufolge) nicht gleich Null. Daraus folgt:

$$(D_1)_{v=0} = \frac{\cos \sigma}{\varrho}.$$

$(D_1)_{v=0}$ ist aber nach S. 102, abgesehen vom Vorzeichen, die Krümmung des die Curve C_1 berührenden Normalschnitts. Da ferner die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_v}$ von C_1 gleich $-\frac{\sin \sigma}{\varrho}$ ist, so ist die absolute Krümmung $\frac{1}{\varrho_1}$ von C_1 gleich der aboluten Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ von Γ.

Um zu beweisen, dass das Nämliche mit den beiden Torsionen $\frac{1}{T_1}, \frac{1}{T}$ der Fall ist, erinnern wir daran (§ 85, S. 168), dass

$$\frac{1}{T_1} = -\frac{D_1'}{\sqrt{G}} - \frac{d\sigma}{du}$$

ist. Wird nun die zweite der Gleichungen (α) nach u differenziert, so ergiebt sich nach den Frenet'schen Formeln:

$$(\beta) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} (\sin \sigma \cos \xi + \cos \sigma \cos \lambda) - \\ - \sqrt{G} (\cos \sigma \cos \xi - \sin \sigma \cos \lambda) \frac{d\sigma}{du} + \\ + \sqrt{G} \sin \sigma \left(\frac{\cos \alpha}{\varrho} + \frac{\cos \lambda}{T} \right) - \sqrt{G} \cos \sigma \frac{\cos \xi}{T}. \end{aligned}$$

Andrerseits ist nach (I), S. 89:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v} + D_1' X_1.$$

Wird hierin v gleich Null gesetzt und berücksichtigt, dass nach S. 67 und 148

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}_{v=0} = \left(\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\right)_{v=0} = -\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_v}\right)_{v=0} = \left(\frac{\sqrt{G}\sin\sigma}{\varrho}\right)_{v=0},$$

$$\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}_{v=0} = \left(\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)_{v=0} = \left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right)_{v=0}$$

ist, so folgt nach (16) und (16*) für $v = 0$:

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \frac{\sqrt{G}\sin\sigma}{\varrho}\cos\alpha - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}(\sin\sigma\cos\xi + \cos\sigma\cos\lambda) + \\ + D_1'(\cos\sigma\cos\xi - \sin\sigma\cos\lambda).$$

Durch Vergleichen der Werte (β) und (γ) von $\frac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v}$ erhalten wir für $v = 0$:

$$\frac{1}{T} = -\frac{D_1'}{\sqrt{G}} - \frac{d\sigma}{du},$$

demnach genau:

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{T}.$$

Wir haben somit den Satz bewiesen: Es ist (auf zwei verschiedene Arten) möglich, eine Fläche S so zu verbiegen, dass eine Curve C auf ihr eine willkürlich gegebene Gestalt Γ annimmt, wofern die erste Krümmung von Γ in jedem Punkte grösser als die geodätische Krümmung von C in dem entsprechenden Punkte ist.

§ 111. Verbiegung, bei der eine gegebene Curve Haupttangentencurve oder Krümmungslinie wird.

Es bliebe nun noch der Ausnahmefall zu betrachten, dass die absolute Krümmung von Γ gleich der geodätischen von C ist. Wenn die Verbiegung möglich ist, so ist Γ Haupttangentencurve der Biegungsfläche und also (nach dem Enneper'schen Satze, S. 121) ihre Torsion in jedem Punkte gleich der Quadratwurzel aus dem mit entgegengesetztem Zeichen genommenen Krümmungsmass K in dem entsprechenden Punkte von C.

In diesem Falle geht demnach die gestellte Aufgabe in die folgende über: Eine Fläche so zu verbiegen, dass eine auf ihr gegebene Curve C nach der Verbiegung eine Haupttangentencurve Γ wird. Aus dem soeben Gesagten ergiebt sich, dass die Gestalt der Curve Γ vollkommen bestimmt ist, und wir beschränken uns hier auf die blosse Angabe, dass die gesuchte Verbiegung in der That möglich ist und daher auf unendlich viele Arten bewerkstelligt werden kann (nach § 108, S. 207).

Indem wir zu dem im vorigen Paragraphen aufgestellten allgemeinen Satze zurückkehren, können wir daraus den folgenden ableiten:

Eine Fläche S kann auf unendlich viele Arten so verbogen

werden, dass eine auf ihr gegebene Curve C Krümmungslinie der neuen Fläche wird.

Um dieses nachzuweisen, brauchen wir hierzu nach S. 98 nur die Bedingung aufzustellen, dass längs der neuen Curve Γ die Proportion:

$$dx : dy : dz = dX : dY : dZ$$

besteht, die mit Rücksicht auf die Gleichungen (16*) einfach

$$\frac{d\sigma}{du} = -\frac{1}{T}$$

giebt. Es kann demnach die Function σ von u willkürlich angenommen und die Curve Γ nach der Verbiegung durch die charakteristischen Gleichungen:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{\varrho_v \sin\sigma}, \quad \frac{1}{T} = -\frac{d\sigma}{du}$$

bestimmt werden. Wird die Fläche so verbogen, dass die Curve C in die Gestalt Γ übergeht, so ist letztere eine Krümmungslinie der Biegungsfläche. Durch Elimination von σ erkennt man, dass die unendlich vielen Gestalten Γ, welche die Curve C annehmen kann, wenn sie bei der Verbiegung Krümmungslinie wird, der Differentialgleichung erster Ordnung zwischen ϱ und T:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\varrho}{\varrho_v}\right) = \frac{1}{T}\sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{\varrho_v}\right)^2}$$

genügen. Insbesondere giebt es unter diesen unendlich vielen Gestalten Γ noch immer unendlich viele, die ebene Krümmungslinien sind. In diesem Falle nämlich braucht der Grösse σ nur ein beliebiger, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ (die Endwerte ausgenommen) gelegener constanter Wert erteilt zu werden. Hat, noch specieller, die Curve Γ constante geodätische Krümmung, so nimmt sie, wenn sie eine ebene Krümmungslinie wird, Kreisform an.

§ 112. Theorem von Bonnet über die Möglichkeit, eine Fläche so zu verbiegen, dass die Haupttangentencurven der einen Schar ebensolche Curven bleiben.

Wir prüfen schliesslich noch die folgende Frage: Kann eine Fläche S so verbogen werden, dass die Haupttangentencurven der einen Schar nach der Verbiegung Haupttangentencurven bleiben?

Unter der Voraussetzung, dass dieses möglich sei, beziehen wir die Fläche auf ihre augenblicklichen Haupttangentencurven u, v und nehmen an, dass die Curven u nach der Verbiegung Haupttangenten-

curven bleiben. Die Antwort auf unsere Frage ergiebt sich ohne Schwierigkeit, wenn wir uns der Ergebnisse in § 64, S. 125, in betreff der Haupttangentencurven einer Fläche erinnern. Es seien

$$D_1,\ D_1',\ D_1''$$

die Werte von D, D', D'' nach der Verbiegung. Dann haben wir nach der Annahme

$$D_1''=0,$$

folglich nach (III), S. 91, und (11), S. 125:

$$\frac{D_1'^2}{EG-F^2}=-K,\quad \frac{D_1'}{\sqrt{EG-F^2}}=\pm\frac{1}{\varrho}.$$

Die zweite Codazzi'sche Formel giebt, in der zweiten Form (IV*), § 48, S. 92, geschrieben:

$$-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_1'}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{D_1}{\sqrt{EG-F^2}}-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{D_1'}{\sqrt{EG-F^2}}=0.$$

Nun ist nach den in § 64 angegebenen Gleichungen (10) und (a)

$$\frac{\partial\log\varrho}{\partial v}=-2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'=2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix},$$

und daher geht die vorhergehende Gleichung über in:

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}D_1=0.$$

Nehmen wir $D_1=0$ an, was besagt, dass auch die Curven v Haupttangentencurven bleiben und demnach E, F, G, e, f, g ihre Werte behalten, so ist die neue Fläche mit der alten identisch (§ 64).

Ist dagegen

$$\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0,$$

so sind die Curven u nach (10), S. 154, geodätische Linien, und da sie auch Haupttangentencurven sind, so sind sie notwendig Gerade*). Die Fläche ist daher eine Linienfläche, und die gesuchten Verbiegungen sind diejenigen, bei denen die Erzeugenden starr bleiben. Im Falle einer Linienfläche jedoch ist diese Verbiegung in Wirklichkeit auf unendlich viele Arten möglich. Es ist dann nämlich nur noch die erste der genannten Gleichungen (IV*), § 48, zu erfüllen, die nach (10) und (a) in § 64 lautet:

*) Dass eine Curve C, welche Haupttangentencurve und geodätische Linie ist, eine Gerade sein muss, folgt daraus, dass im entgegengesetzten Falle die Schmiegungsebene von C gleichzeitig Tangential- und Normalebene der Fläche sein würde. Umgekehrt ist jede auf einer Fläche liegende Gerade gleichzeitig Haupttangentencurve und geodätische Linie.

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D_1}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{D_1}{\sqrt{EG-F^2}}=0.$$

Es ist klar, dass, wenn D_1 eine Lösung dieser Gleichung ist, die allgemeinste die Form

$$D_1\varphi(u)$$

hat, wo $\varphi(u)$ eine willkürliche Function von u ist.

Wir haben also den folgenden von Bonnet herrührenden Satz: **Es ist unmöglich, eine Fläche S so zu verbiegen, dass die Haupttangentencurven der einen Schar Haupttangentencurven bleiben, falls nicht S eine Linienfläche ist, deren erzeugende Geraden jene Haupttangentencurven sind.**

Im Falle einer Linienfläche dagegen sind solche Verbiegungen, bei denen die Erzeugenden starr bleiben, möglich, und zwar hängen sie von einer willkürlichen Function u ab.

Kapitel VIII.

Verbiegung der Linienflächen.

Auf einander abwickelbare Linienflächen. — Linienelement einer Linienfläche. — Strictionslinie und darauf bezügliche Sätze von Bonnet. — Haupttangentencurven der zweiten Schar. — Formel von Chasles. — Biegung der Linienflächen nach der Methode von Minding. — Methode von Beltrami und die darauf bezüglichen Fundamentalgleichungen. — Problem, eine Linienfläche derart zu verbiegen, dass eine auf ihr gegebene Curve eine Haupttangentencurve oder eine ebene Curve oder eine Krümmungslinie wird. — Linienflächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind.

---

§ 113. Auf einander abwickelbare Linienflächen.

Die besonderen Verbiegungen der Linienflächen, deren Möglichkeit wir am Schlusse des letzten Kapitels erkannt haben, bieten ein besonderes Interesse, und ihrem Studium, das mit sehr einfachen Mitteln möglich ist, wollen wir dieses Kapitel widmen. Vor allem aber wollen wir mit Bonnet beweisen, dass mit der Untersuchung dieser Verbiegungen die allgemeine Aufgabe gelöst wird, alle Linienflächen zu finden, die auf eine gegebene Linienfläche abwickelbar sind.

Es gilt nämlich der folgende Satz von Bonnet: Wenn zwei Linienflächen, die nicht durch Verbiegung aus ein und derselben Fläche zweiten Grades hervorgegangen sind, auf einander abwickelbar sind, so müssen sich die Erzeugenden der einen mit denjenigen der anderen decken.

Dass die Biegungsflächen der Flächen zweiten Grades mit reellen Erzeugenden eine Ausnahme von diesem Satze bilden, erhellt daraus, dass eine Fläche zweiten Grades infolge ihrer Eigenschaft, eine doppelte Schar geradliniger Erzeugenden zu besitzen, so verbogen werden kann, dass man entweder die Erzeugenden des ersten Systems gerade lässt und die anderen krümmt, oder umgekehrt.

Den genannten Satz beweisen wir folgendermassen auf einfache Weise: Es seien S, S_1 zwei auf einander abwickelbare Linienflächen,

und wir nehmen an, dass beim Abwickeln den Erzeugenden u von S die Erzeugenden v von S_1 nicht entsprechen. Nehmen wir dann auf S, S_1 die Curven u, v als Parameterlinien an, so haben die beiden Flächen S, S_1 die erste Fundamentalform gemein. Wenn wir mit

$$(1) \qquad \begin{cases} D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2, \\ D_1 du^2 + 2D_1' du\, dv + D_1'' dv^2 \end{cases}$$

die bezüglichen zweiten Fundamentalformen bezeichnen, so haben wir $D'' = 0$, $D_1 = 0$, da die u auf S und die v auf S_1 Haupttangentencurven sind. Da ferner nach dem Gaussischen Satz die beiden Discriminanten der Formen (1) gleich sind, so ist:

$$D_1' = \pm D'.$$

Nun bringen wir zum Ausdruck, dass die beiden Formen (1) den Codazzischen Gleichungen (IV*), § 48 (S. 92), genügen, wobei wir beachten, dass die u, v geodätische Linien sind und also nach Formel (10), S. 154:

$$\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$$

ist. Daraus folgen die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}}\right) + 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}} = 0.$$

Sie zeigen uns, dass die Codazzi'schen Gleichungen auch erfüllt sind, wenn wir D und D gleich Null setzen und D' den alten Wert lassen. Es existiert demnach eine dritte auf S und S_1 abwickelbare Fläche S_2, welche die u, v zu Haupttangentencurven hat. S_2 ist also in doppelter Weise eine Linienfläche und folglich eine Fläche zweiten Grades, wie zu beweisen war.

Was nun die auf Flächen des zweiten Grades abwickelbaren Linienflächen anbelangt, so ist nach dem Vorstehenden (vgl. auch § 112) klar, dass ihre Erzeugenden sich mit der einen oder der anderen Schar der Erzeugenden der Fläche zweiten Grades decken.

§ 114. Linienelement einer Linienfläche.

Der Untersuchung der Abwickelbarkeit von Linienflächen auf einander schicken wir einige allgemeine Betrachtungen über diese Flächen voraus.

Auf einer Linienfläche S denken wir uns eine beliebige Curve C gezogen, die wir als Directrix betrachten und nur der Bedingung unterwerfen, dass sie alle Erzeugenden schneiden soll. Zur Bestimmung der Linienfläche S wird es dann genügen, wenn die Curve C und in

jedem ihrer Punkte die Richtung der hindurchgehenden Erzeugenden gegeben ist.

Seien v der von einem festen Punkte der Directrix C gerechnete Bogen dieser Curve, p, q, r die laufenden Coordinaten eines Punktes von C, ausgedrückt als Functionen von v, während l, m, n die Richtungscosinus der durch den Punkt (p, q, r) von C hindurchgehenden Erzeugenden bezeichnen und ebenfalls bestimmte Functionen von v sein mögen. Wir bezeichnen ferner mit u den algebraischen Betrag desjenigen Stückes der Erzeugenden, das zwischen dem Punkt (p, q, r) der Directrix und einem beliebigen Punkt (x, y, z) der Erzeugenden liegt. Die Gleichungen:

$$(1) \qquad x = p + lu, \quad y = q + mu, \quad z = r + nu$$

definieren uns die Fläche S, da sie x, y, z als Functionen von u, v ausdrücken. Wir berechnen das Linienelement von S, deuten zu diesem Zwecke die Differentialquotienten nach v durch Striche an und setzen:

$$(2) \qquad \begin{cases} l'^2 + m'^2 + n'^2 = M^2, \\ l'p' + m'q' + n'r' = N, \\ lp' + mq' + nr' = \cos\vartheta, \end{cases}$$

wo M, N, ϑ Functionen von v sind und ϑ offenbar den Neigungswinkel der Erzeugenden gegen die Directrix bedeutet. Zu diesen Gleichungen sind noch die folgenden hinzuzufügen:

$$(2^*) \qquad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1. \end{cases}$$

Für das Quadrat des Linienelements der Fläche erhalten wir den Ausdruck:

$$(3) \qquad ds^2 = du^2 + 2\cos\vartheta\, du\, dv + (M^2u^2 + 2Nu + 1)dv^2.$$

Wir bemerken nun zunächst folgendes: Die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien der Erzeugenden ist nach S. 66:

$$du + \cos\vartheta\, dv = 0;$$

durch Quadratur folgt hieraus sofort die Integralgleichung dieser ortho gonalen Trajectorien:

$$u + \int\cos\vartheta\, dv = \text{Const.*}).$$

Betrachten wir eine Erzeugende v und die unendlich benachbarte $v + dv$, und bezeichnen wir mit $d\varphi$ den unendlich kleinen Winkel, den sie mit einander bilden, so haben wir offenbar:

---

*) Dieses Ergebnis ist offenbar nur ein besonderer Fall des Satzes A) in § 86, S. 168.

$$d\varphi^2 = dl^2 + dm^2 + dn^2,$$

d. h.:

(4) $$d\varphi = M dv.$$

Bezeichnen wir ferner mit $d\sigma$ ihren unendlich kleinen Minimalabstand und mit U den Wert von u im Fusspunkt dieses Minimalabstandes auf der Erzeugenden v, so haben wir nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie:

$$d\sigma = \frac{\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}}{M} dv.$$

Andrerseits ist:

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ l & m & n \\ l' & m' & n \end{vmatrix}^2 = M^2 \sin^2 \vartheta - N^2,$$

folglich:

(5) $$d\sigma = \frac{\sqrt{M^2 \sin^2 \vartheta - N^2}}{M} dv.$$

Setzen wir sodann:

$$A = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix},$$

so erhalten wir:

$$U = \frac{\begin{vmatrix} p' & l + l'dv & A \\ q' & m + m'dv & B \\ r' & n + n'dv & C \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2}$$

und mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Glieder in der zweiten Reihe:

(6) $$U = -\frac{N}{M^2}.$$

§ 115. Strictionslinie und darauf bezügliche Sätze von Bonnet.

Die durch ein und denselben Punkt des Raumes parallel zu den Erzeugenden einer Linienfläche gezogenen Geraden bilden den sogenannten Leitkegel. Wählen wir als Kegelspitze den Coordinatenanfang und durchschneiden wir den Kegel mit einer Kugel vom Radius Eins um den Anfangspunkt, so soll die Schnittcurve die sphärische Indicatrix der Erzeugenden genannt werden. Ihr Bogenelement ist offenbar $d\varphi = M dv$.

Der Fusspunkt des kleinsten Abstandes der Erzeugenden v von

der benachbarten heisst der Mittelpunkt der ersteren. Der Ort dieser Mittelpunkte bildet eine für die Untersuchung der Linienflächen sehr wichtige Curve, die den Namen Strictionslinie führt. Nach (6) ist ihre Gleichung:

$$M^2 u + N = 0. \tag{7}$$

Für den Fall $N = 0$ fällt sie mit der Directrix zusammen.

Die Strictionslinie ist stets eindeutig bestimmt, ausser für den Fall, dass gleichzeitig M und N gleich Null sind; dann ist die Fläche nach der ersten der Gleichungen (2) cylindrisch. Bei den abwickelbaren Flächen, die nach (5) durch die Gleichung:

$$M^2 \sin^2 \vartheta - N^2 = 0$$

charakterisiert sind, fällt nach (6) die Strictionslinie mit der Rückkehrkante zusammen.

Für die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_0}$ der Directrix $u = 0$ haben wir nach der Formel (5) in § 77, S. 150, den Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{F}{\sqrt{G}} \right) - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right).$$

Indem wir darin wegen (3)

$$E = 1, \quad F = \cos \vartheta, \quad G = M^2 u^2 + 2Nu + 1$$

setzen, erhalten wir den Wert:

$$-\frac{1}{\varrho_0} = \frac{N}{\sin \vartheta} + \frac{d\vartheta}{dv}.$$

Hieraus folgt, dass, wenn von den drei Grössen

$$\frac{1}{\varrho_0}, \quad N, \quad \frac{d\vartheta}{dv}$$

zwei identisch gleich Null sind, die dritte es ebenfalls ist. Geometrisch ausgedrückt, liefert dieses Ergebnis den Satz von Bonnet:

Besitzt eine auf einer Linienfläche gezogene Curve zwei der folgenden drei Eigenschaften: 1) geodätische Linie, 2) Strictionslinie zu sein, 3) die Erzeugenden unter constantem Winkel zu schneiden, so besitzt sie auch die dritte.

Es ist klar, dass eine Linienfläche, auf der eine solche Curve vorhanden ist, der Ort einer Geraden ist, die eine Curve (Strictionslinie) senkrecht zur Hauptnormale schneidet und mit dieser Curve einen constanten Winkel bildet. Insbesondere wird es nur für eine Linienfläche, die der Ort der Binormalen einer Curve ist, zutreffen, dass die Strictionslinie eine Orthogonaltrajectorie der Erzeugenden ist.

Nehmen wir endlich als Directrix eine Orthogonaltrajectorie der

Erzeugenden, so ist $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, und wir erhalten für die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_u}$ der Curven $u = \text{Const.}$ den Wert:

$$\frac{1}{\varrho_u} = -\frac{M^2 u + N}{M^2 u^2 + 2Nu + 1}.$$

Daraus folgt nach (6), dass die Strictionslinie auch als der Ort derjenigen Punkte der Linienfläche definiert werden kann, in denen die geodätische Krümmung der Orthogonaltrajectorien der Erzeugenden gleich Null ist.

§ 116. Haupttangentencurven der zweiten Schar. Formel von Chasles.

Auf jeder Linienfläche sind die Erzeugenden die Haupttangentencurven des einen Systems, wie geometrisch einleuchtet (§ 112). Analytisch wird dieses durch die Berechnung der Coefficienten D, D', D'' der zweiten Fundamentalformel sofort bestätigt. Wir finden nämlich nach S. 87:

$$D = 0,\quad D' = \frac{1}{\sqrt{M^2u^2 + 2Nu + \sin^2\vartheta}} \begin{vmatrix} l' & m' & n' \\ l & m & n \\ p' + l'u & q' + m'u & r' + n'u \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M^2u^2 + 2Nu + \sin^2\vartheta}} \begin{vmatrix} l' & m' & n' \\ l & m & n \\ p' & q' & r' \end{vmatrix},$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{M^2u^2 + 2Nu + \sin^2\vartheta}} \begin{vmatrix} p'' + l''u & q'' + m''u & r'' + n''u \\ l & m & n \\ p' + l'u & q' + m'u & r' + n'u \end{vmatrix}.$$

Die Differentialgleichung der Haupttangentencurven des zweiten Systems ist also nach S. 109:

$$2D'du + D''dv = 0$$

und hat demnach die Riccati'sche Form:

$$\frac{du}{dv} + au^2 + bu + c = 0,$$

wo a, b, c Functionen von v allein sind. Die bekannte Eigenschaft einer Gleichung von diesem Typus, dass das Doppelverhältnis $(u_1\, u_2\, u_3\, u_4)$ von vier particulären Lösungen eine Constante ist, liefert unter Berücksichtigung der Bedeutung von u unmittelbar den Satz von Paul Serret: Das Doppelverhältnis der vier Punkte, in denen eine beliebige Erzeugende vier feste Haupttangentencurven des zweiten Systems schneidet, ist constant.

Ferner sieht man, dass man nur eine der Haupttangenten-

curven des zweiten Systems zu kennen braucht, um die übrigen mittels Quadraturen zu bestimmen.

Die Werte der Richtungscosinus X, Y, Z der Normale sind durch die Gleichungen gegeben:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} m & n \\ q'+m'u & r'+n'u \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2u^2+2Nu+\sin^2\vartheta}}, \quad Y = \frac{\begin{vmatrix} n & l \\ r'+n'u & p'+l'u \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2u^2+2Nu+\sin^2\vartheta}},$$

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} l & m \\ p'+l'u & q'+m'u \end{vmatrix}}{\sqrt{M^2u^2+2Nu+\sin^2\vartheta}}.$$

Bezeichnen wir mit X_0, Y_0, Z_0 die Werte von X, Y, Z im Mittelpunkt $u = -\frac{N}{M^2}$, mit Ω den (zwischen 0 und π gelegenen) Winkel, den die beiden positiven Richtungen (X, Y, Z), (X_0, Y_0, Z_0) mit einander bilden, so erhalten wir, da $\cos\Omega = XX_0 + YY_0 + ZZ_0$ ist, den Wert:

$$\cos\Omega = \frac{\sqrt{M^2\sin^2\vartheta - N^2}}{M\sqrt{M^2u^2+2Nu+\sin^2\vartheta}}.$$

Da die Werte der Wurzeln und M selbst positiv zu nehmen sind, so ist ersichtlich, dass Ω stets spitz ist, wie geometrisch leicht vorauszusehen war.

Nehmen wir nun der Einfachheit halber an, dass die Directrix eine Orthogonaltrajectorie der Erzeugenden sei. Wir haben dann:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}, \qquad ds^2 = du^2 + \left(u^2 + \frac{2N}{M^2}u + \frac{1}{M^2}\right)M^2dv^2.$$

Wenn wir an Stelle von v den Parameter

$$v_1 = \int M\,dv$$

einführen (sodass also v_1 nach S. 219 den Bogen der sphärischen Indicatrix der Erzeugenden bedeutet) und gleichzeitig

$$-\frac{N}{M^2} = \alpha, \quad \frac{\sqrt{M^2-N^2}}{M^2} = \beta$$

setzen, so sind α und β Functionen von v_1, und das Quadrat des Linienelements nimmt die Form:

$$(8) \qquad ds^2 = du^2 + [(u-\alpha)^2 + \beta^2]dv_1^2$$

an. Die frühere Gleichung für $\cos\Omega$ wird:

$$\cos\Omega = \frac{\beta}{\sqrt{(u-\alpha)^2+\beta^2}};$$

daraus folgt die Formel von Chasles:

(9) $$\operatorname{tg} \Omega = \frac{u - \alpha}{\beta},$$

in der Ω stets zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen ist und sein Vorzeichen von der Richtung abhängt, in der sich die Tangentialebene dreht, wenn sich der Berührungspunkt vom Mittelpunkt nach dem betrachteten Punkte hin bewegt.

Aus (9) ziehen wir sofort einige bemerkenswerte Folgerungen. Lassen wir die Tangentialebene des Mittelpunktes $u = \alpha$ der Erzeugenden v um diese Erzeugende um den Winkel Ω rotieren, so wird sie die Fläche in einem Punkte (u_1, v), der durch die Gleichung:

$$u_1 - \alpha = \beta \operatorname{tg} \Omega$$

bestimmt wird, berühren und im Punkte (u_2, v), der durch

$$u_2 - \alpha = -\beta \operatorname{cotg} \Omega$$

gegeben ist, auf ihr senkrecht stehen; daraus folgt:

$$(u_1 - \alpha)(u_2 - \alpha) = -\beta^2.$$

Es bestimmt also jede Ebene durch irgend eine Erzeugende auf dieser Erzeugenden zwei Punkte P_1, P_2, in denen sie bezüglich die Fläche berührt und auf ihr senkrecht steht. Dreht sich die Ebene um die Erzeugende, so liefert das Punktepaar P_1, P_2 eine Involution, deren Centrum der Mittelpunkt ist.

Schliesslich bemerken wir, dass sich aus (8) für das Krümmungsmass K nach S. 68 der Ausdruck:

$$K = -\frac{\beta^2}{[(u - \alpha)^2 + \beta^2]^2}$$

ergiebt. Er ist stets negativ, wie es auch natürlich ist, da die Haupttangentencurven reell sind. Längs jeder Erzeugenden, für die β nicht gleich Null ist, nimmt der absolute Wert von K im Mittelpunkte sein Maximum an und nähert sich der Null, je weiter man sich vom Mittelpunkt entfernt.

§ 117. Verbiegung einer Linienfläche nach der Methode von Minding.

Wir kommen nun zu der eigentlichen Aufgabe dieses Kapitels, nämlich zur Bestimmung aller Linienflächen mit gegebenem Linienelement, das wir in der allgemeinen Form (3) annehmen. Dann sind auch ϑ, M, N als Functionen von v gegeben, und die Aufgabe wird darin bestehen, die sechs unbekannten Functionen p, q, r, l, m, n der Veränderlichen v allein so zu bestimmen, dass die fünf Fundamentalgleichungen:

(10) $$\begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \\ l'^2 + m'^2 + n'^2 = M^2; \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1, \\ lp' + mq' + nr' = \cos\vartheta, \\ l'p' + m'q' + n'r' = N \end{cases}$$

erfüllt werden.

Für die Behandlung unserer Aufgabe ergeben sich zwei verschiedene Methoden, je nachdem wir zunächst l, m, n als bekannt annehmen und p, q, r suchen oder umgekehrt p, q, r als bekannt annehmen und l, m, n suchen. Im ersten Falle steht uns die Methode von Minding zu Gebote, die zu folgenden Ergebnissen führt:

Es seien l, m, n drei Functionen von v, die den beiden Gleichungen (10) genügen. Die Gleichungen (11) geben dann die Werte für p', q', r', und aus diesen erhält man durch Quadraturen p, q, r.

Genügt man der ersten Gleichung (10) dadurch, dass man setzt:

$$l = \sin\omega\cos\psi, \quad m = \sin\omega\sin\psi, \quad n = \cos\omega,$$

wo ω und ψ Functionen von v sind, so ist nur noch die zweite der Gleichungen (10) zu befriedigen. Sie ergiebt:

$$\omega'^2 + \psi'^2\sin^2\omega = M^2,$$

woraus mittelst einer Quadratur für ψ die Gleichung:

$$\psi = \int^{v}\frac{\sqrt{M^2-\omega'^2}}{\sin\omega}\,dv$$

folgt, in der ω willkürlich bleibt. Die Willkürlichkeit, die der Lösung infolge des Vorhandenseins der willkürlichen Function $\omega(v)$ anhaftet, kann geometrisch dahin gedeutet werden, dass der Fläche S durch Verbiegung ein willkürlich angenommener Leitkegel zugewiesen werden kann.

In der That genügen die Coordinaten l, m, n eines Punktes der gegebenen sphärischen Indicatrix den Gleichungen (10), falls zwischen dem Bogen φ dieser Indicatrix und dem Bogen v der Directrix die Relation:

$$\varphi = \int M\,dv$$

aufgestellt wird. Der Leitkegel der entsprechenden Fläche hat dann die durch die Wahl von ω bestimmte Gestalt.

Wir bemerken ferner, dass sich durch Auflösung des Systems (11) nach p', q', r' ergiebt:

$$(12)\quad \begin{cases} p' = l\cos\vartheta + \dfrac{l'N \pm A\sqrt{M^2\sin^2\vartheta - N^2}}{M^2}, \\[2ex] q' = m\cos\vartheta + \dfrac{m'N \pm B\sqrt{M^2\sin^2\vartheta - N^2}}{M^2}, \\[2ex] r' = n\cos\vartheta + \dfrac{n'N \pm C\sqrt{M^2\sin^2\vartheta - N^2}}{M^2}. \end{cases}$$

Darin ist wie auf S. 219

$$A = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} n & l \\ n' & l' \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}$$

gesetzt.

Da nun nach S. 219

$$M^2 \sin^2 \vartheta - N^2 > 0$$

ist, wenn die Fläche nicht in die Ebene abwickelbar ist, so führen die beiden Wertsysteme für p', q', r', die dem doppelten Vorzeichen der Wurzel entsprechen, zu zwei wesentlich verschiedenen Flächen.

Wir haben demnach das Ergebnis:

Jede Linienfläche kann so verbogen werden, dass ihr Leitkegel eine willkürlich gewählte Gestalt annimmt, und zwar auf zwei verschiedene Arten.

Die zu der Bestimmung der beiden Biegungsflächen erforderlichen Rechnungen bestehen lediglich in Quadraturen.

§ 118. **Methode von Beltrami und die darauf bezüglichen Fundamentalgleichungen.**

Nach der vorstehenden Methode lassen sich alle auf eine gegebene Linienfläche abwickelbaren Linienflächen wirklich bestimmen. Wollte man jedoch die willkürliche Function $\omega(v)$ so bestimmen, dass sie einer gegebenen Bedingung genügt, so würde man in den meisten Fällen auf unüberwindliche Schwierigkeiten stossen.

Es ist dann die zweite Methode, zu deren Entwickelung wir nun übergehen und die von Beltrami*) herrührt, vorzuziehen.

Diese Methode besteht darin, dass man zunächst feststellt, was für Gestalten die Directrix bei einer Verbiegung der Fläche annehmen kann. Für jede dieser Gestalten bestimmt sich die Gestalt der entsprechenden Fläche auf Grund der Ueberlegung, dass sich die geodätische Krümmung und der Winkel ϑ bei einer Verbiegung nicht ändern. Da die allgemeine Lösung der Aufgabe eine willkürliche Function enthält, so ist von vorn herein klar, dass die möglichen Gestalten der Directrix notwendigerweise an eine Bedingung geknüpft sind, die eben gestellt werden muss.

Wir betrachten eine dieser Gestalten der Directrix, für die wir die in der Curventheorie gebrauchten Bezeichnungen beibehalten. Nennen wir σ den Neigungswinkel der Schmiegungsebene der Directrix gegen die Tangentialebene der Fläche, so haben wir:

*) Sulla flessione delle superficie rigate. Annali di Mat. 1865, 7. Bd., S. 105.

$$(13)\quad \begin{cases} l = \cos\vartheta\cos\alpha + \sin\vartheta(\cos\sigma\cos\xi + \sin\sigma\cos\lambda), \\ m = \cos\vartheta\cos\beta + \sin\vartheta(\cos\sigma\cos\eta + \sin\sigma\cos\mu), \\ n = \cos\vartheta\cos\gamma + \sin\vartheta(\cos\sigma\cos\zeta + \sin\sigma\cos\nu). \end{cases}$$

Berechnen wir l', m', n' mit Hülfe der Frenet'schen Formeln, so reducieren sich die Fundamentalgleichungen (10) und (11), denen l, m, n genügen müssen, auf die beiden folgenden:

$$\vartheta' + \frac{\cos\sigma}{\varrho} = -\frac{N}{\sin\vartheta},$$

$$\sin^2\vartheta\left(\vartheta' + \frac{\cos\sigma}{\varrho}\right)^2 + \left[\frac{\cos\vartheta}{\varrho} + (\cos\sigma\sin\vartheta)' + \frac{\sin\sigma\sin\vartheta}{T}\right]^2 + $$
$$+ \left[(\sin\sigma\sin\vartheta)' - \frac{\cos\sigma\sin\vartheta}{T}\right]^2 = M^2 \; *)$$

oder:

$$(14)\quad \frac{\cos\sigma}{\varrho} = -\frac{N}{\sin\vartheta} - \vartheta', \; **)$$

$$(15)\quad \left[\frac{\cos\vartheta}{\varrho} + (\cos\sigma\sin\vartheta)' + \frac{\sin\sigma\sin\vartheta}{T}\right]^2 +$$
$$+ \left[(\sin\sigma\sin\vartheta)' - \frac{\cos\sigma\sin\vartheta}{T}\right]^2 = M^2 - N^2.$$

Die Unbekannten in unserer Aufgabe sind σ, ϱ, T. Es ist klar, dass, wenn man den Wert für σ aus (14) in (15) einsetzt, letztere Gleichung in eine Relation:

$$(16)\quad f\left(v, \varrho, T, \frac{d\varrho}{dv}\right) = 0$$

übergeht, die eine Beziehung zwischen den Radien der ersten und zweiten Krümmung der verbogenen Directrix herstellt.

Jeder Curve, deren Flexions- und Torsionsradius der Gleichung (16) genügen, entspricht eine specielle Verbiegung der Linienfläche, deren Elemente aus den Gleichungen (14) und (13) zu berechnen sind. Die vorliegende Aufgabe hängt demnach mit einer anderen aus der Curvenlehre zusammen, nämlich mit der Aufgabe, eine Curve aus ihren natürlichen Gleichungen zu bestimmen (vgl. 1. Kap., S. 13 u. f.).

---

*) Mit $(\cos\sigma\sin\vartheta)'$, $(\sin\sigma\sin\vartheta)'$ werden der Kürze halber die Differentialquotienten von $\cos\sigma\sin\vartheta$, $\sin\sigma\sin\vartheta$ nach v bezeichnet.

**) Dieses besagt nach S. 147, dass die geodätische Krümmung der Directrix bei der Verbiegung ungeändert bleibt.

§ 119. Problem, eine Linienfläche derart zu verbiegen, dass eine auf ihr gegebene Curve eine Haupttangentencurve wird.

Von den voraufgehenden allgemeinen Ergebnissen machen wir nun die hauptsächlichsten Anwendungen.

Wir stellen uns zunächst die Aufgabe, die Linienfläche so zu verbiegen, dass die Directrix eine Haupttangentencurve wird. Wir müssen dann σ gleich Null (oder gleich π) setzen, und es ergiebt sich also aus (14):

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{\varrho} = \mp\left(\frac{N}{\sin\vartheta} + \vartheta'\right),$$

wo natürlich das Vorzeichen der rechten Seite durch die Bedingung bestimmt ist, dass der Wert für ϱ positiv sein muss. Die Gleichung (15) giebt dann:

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{M^2\sin^2\vartheta - N^2}}{\sin^2\vartheta}.$$

Also: Jede Linienfläche kann so verbogen werden, dass eine beliebig auf ihr gezogene Curve Haupttangentencurve wird. Die verbogene Directrix bestimmt sich aus den natürlichen Gleichungen (a), (b).

Betrachten wir den besonderen Fall, in dem die Directrix eine geodätische Linie ist. Dann ergiebt sich:

$$\frac{1}{\varrho} = 0,$$

d. h. die verbogene Directrix ist eine Gerade. Es folgt somit:

Jede geodätische Linie einer Linienfläche kann durch Verbiegung der Fläche zu einer Geraden werden.

Um für diesen Fall einfache Gleichungen zu erhalten, wählen wir die verbogene Directrix als z-Axe und haben dann:

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = v, \quad n = \cos\vartheta.$$

Setzen wir noch:

$$l = \sin\vartheta\cos\psi, \quad m = \sin\vartheta\sin\psi,$$

so folgt aus

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = M^2$$

wie auf S. 224:

$$\psi = \int\frac{\sqrt{M^2 - \vartheta'^2}}{\sin\vartheta}\,dv.$$

Für die Biegungsfläche haben wir also nach (1), S. 218, die Gleichungen:

$$x = u\sin\vartheta\cos\psi, \quad y = u\sin\vartheta\sin\psi, \quad z = v + u\cos\vartheta.$$

Ist insbesondere ϑ gleich $\frac{\pi}{2}$, d. h. ist die Fläche der Ort der Binormalen der Directrix, so ist die Biegungsfläche ein gerades Conoid (vgl. S. 134), und da in diesem Falle l, m, n die Richtungscosinus der Bi-

normale sind, also nach Definition von M und nach S. 8 die Grösse M gleich $\frac{1}{T}$ ist, wo $\frac{1}{T}$ die Torsion der ursprünglichen Directrix bedeutet, so ergiebt sich:

$$\psi = \int \frac{dv}{T}.$$

Besitzt nun noch specieller die ursprüngliche Directrix constante Torsion, so ist das Biegungsconoid die Minimal-Schraubenregelfläche.

Werden umgekehrt alle Linienflächen gesucht, die sich auf die Schraubenfläche:

$$x = u \cos \frac{v}{k}, \quad y = u \sin \frac{v}{k}, \quad z = v$$

abwickeln lassen, für die das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{u^2}{k^2} + 1\right) dv^2$$

ist, so ist $p = 0$, $q = 0$, $r = v$, $l = \cos \frac{v}{k}$, $m = \sin \frac{v}{k}$, $n = 0$, also nach (2), S. 218, und (14), S. 226:

$$M = \frac{1}{k}, \quad N = 0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma = \frac{\pi}{2}.$$

Hiernach ergiebt Gleichung (15):

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{k}.$$

Also: *Die auf die Minimal-Schraubenregelfläche vom Parameter k abwickelbaren Linienflächen sind alle von den Binormalen der Curven constanter Torsion $\frac{1}{k}$ erzeugten Flächen und auch nur diese.*

Wir setzen endlich voraus, dass die Directrix der beliebig gegebenen Linienfläche eine Orthogonaltrajectorie der Erzeugenden sei. Machen wir sie durch Verbiegung der Fläche zu einer Haupttangentencurve, so sind ihre Hauptnormalen die Erzeugenden der Biegungsfläche. Also:

Durch Verbiegung einer Linienfläche können die Erzeugenden die Hauptnormalen einer beliebigen ihrer Orthogonaltrajectorien werden.

§ 120. **Problem, eine Linienfläche derart zu verbiegen, dass eine auf ihr gegebene Curve eben oder eine Krümmungslinie wird.**

Wir wollen nun die Fläche so verbiegen, dass die Directrix $u = 0$ eben wird. Hierzu braucht nur in der Gleichung (15) $\frac{1}{T}$ gleich Null gesetzt zu werden, was eine Differentialgleichung erster Ordnung: $\psi\left(v, \varrho, \frac{d\varrho}{dv}\right) = 0$ zur Bestimmung von ϱ liefert. Daraus schliessen wir:

Es ist auf ∞^1 Arten möglich, eine Linienfläche so zu verbiegen, dass eine beliebige Curve auf ihr eben wird.

Ist insbesondere die gegebene Curve eine Orthogonaltrajectorie der Erzeugenden, also ϑ gleich $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{T}$ gleich Null, so wird Gleichung (15):

$$\sigma'^2 = M^2 - N^2,$$

woraus durch Integration

$$\sigma = \int \sqrt{M^2 - N^2}\, dv$$

folgt. Die ebene Biegungscurve bestimmt sich aus Gleichung (14), die

$$\varrho = -\frac{\cos\sigma}{N}$$

ergiebt.

Endlich untersuchen wir, ob es möglich ist, eine vorgegebene Curve durch Verbiegung zu einer Krümmungslinie zu machen. Es sind

$$X = \cos\sigma\cos\lambda - \sin\sigma\cos\xi, \quad Y = \cos\sigma\cos\mu - \sin\sigma\cos\eta,$$
$$Z = \cos\sigma\cos\nu - \sin\sigma\cos\zeta$$

die Richtungscosinus der Flächennormale längs der verbogenen Directrix, und wir haben, da die Krümmungslinie nach S. 97 Evolvente der von den Flächennormalen eingehüllten Curve ist und daher hier in der letzten Gleichung auf S. 28 für u, v, s die Werte $-\sin\sigma$, $\cos\sigma$, v zu setzen sind:

$$\frac{1}{T} = \frac{d\sigma}{dv}.$$

Eliminieren wir $\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{1}{T}$ mit Hilfe dieser und der Gleichung (14) aus (15), so erhalten wir zur Bestimmung von σ eine Differentialgleichung erster Ordnung. Hierbei ist natürlich vorausgesetzt, dass ϑ nicht gleich $\frac{\pi}{2}$ sei, denn sonst würde die Fläche developpabel sein*).

Daraus folgern wir: **Es ist stets möglich, eine Linienfläche so zu verbiegen, dass eine beliebige Curve auf ihr eine Krümmungslinie wird, wofern die Curve nicht eine Orthogonaltrajectorie der Erzeugenden ist.**

Wir bemerken ferner, dass, wenn die gegebene Curve eine geodätische ist, sie beim Uebergange in eine Krümmungslinie eben wird, wie geometrisch nach S. 166 einleuchtet. Dieses ergiebt sich auch aus unseren Formeln. In der That ist dann nach S. 152 σ gleich $\frac{\pi}{2}$, also nach obigem Wert von $\frac{1}{T}$ auch $\frac{1}{T}$ gleich Null, und (15) wird:

---

*) Dieses wird auch durch die eben angestellte Rechnung bestätigt, da die linke Seite von (15) gleich Null werden würde.

$$\frac{\cos^2\vartheta}{\varrho^2} + \cos^2\vartheta \,.\, \vartheta'^2 = M^2 - N^2,$$

wodurch ϱ und also auch die Biegungscurve bestimmt wird.

§ 121. Linienflächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind.

Zum Schluss beschäftigen wir uns mit der Frage: Welche Linienflächen sind auf Rotationsflächen abwickelbar?

Eine solche Fläche muss eine stetige Verbiegung in sich zulassen, während deren sich das ganze System der Erzeugenden in sich verschieben muss (S. 216). Dabei braucht wegen der Stetigkeit der Verbiegung auch der Fall der auf Flächen zweiter Ordnung abwickelbaren Flächen nicht ausgenommen zu werden.

Die Linienfläche sei auf ihre Erzeugenden und deren orthogonale Trajectorien bezogen, sodass ϑ gleich $\frac{\pi}{2}$ ist. Führen wir $\int M dv$ als neues v ein, so hat das Quadrat des Linienelements nach S. 222 die Form:

$$ds^2 = du^2 + [(u - \alpha(v))^2 + \beta^2(v)]\, dv^2.$$

Während der als stetig vorausgesetzten Verbiegung verschiebt sich die Strictionslinie in sich, schneidet daher die Erzeugenden unter constantem Winkel und ist also eine geodätische Linie (S. 220); ferner ist längs derselben die Krümmung der Fläche constant, gleich K_0. Nun ist längs der Strictionslinie $u = \alpha$ nach (18) auf S. 68:

$$K_0 = -\frac{1}{\beta^2},$$

woraus sofort

$$\beta(v) = \text{Const.} = k$$

folgt. Bezeichnen wir sodann den (constanten) Neigungswinkel der Erzeugenden gegen die Strictionslinie mit ω, so haben wir:

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{1}{\beta}\frac{du}{dv} = \frac{1}{k}\,\alpha'(v),$$

demnach:

$$\alpha(v) = kv \operatorname{cotg}\omega,$$

da wir die additive Constante in u mit hineinziehen können.

Das Quadrat des Linienelements der gesuchten Flächen ist also von der Form:

$$(17) \qquad ds^2 = du^2 + [(u - kv\operatorname{cotg}\omega)^2 + k^2]\, dv^2.$$

Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ gehört das Linienelement zu der Minimal-Schraubenregelfläche vom Parameter k, für $\omega \neq \frac{\pi}{2}$ zum einschaligen Rota-

tionshyperboloid, dessen Meridianhyperbel die Halbaxen a und b hat, wo $a = k \operatorname{cotg} \omega$, $b = k$ ist, wie man leicht einsieht*). Also: Die einzigen auf Rotationsflächen abwickelbaren Linienflächen sind die Biegungsflächen der Minimal-Schraubenregelfläche und des einschaligen Rotationshyperboloids.

Die ganze Klasse der Flächen der ersten Art ist bereits in § 119 als diejenige charakterisiert, welche die von den Binormalen der Curven constanter Torsion gebildeten Flächen umfasst.

Für die Flächen der zweiten Art giebt es einen eleganten, von Laguerre herrührenden Satz, zu dem wir in der folgenden Weise gelangen: Wir setzen in (17):

$$\frac{kv}{\sin \omega} = v_1, \quad u - kv \operatorname{cotg} \omega = u_1$$

und erhalten für das Quadrat des Linienelements der in Rede stehenden Fläche den Ausdruck:

$$ds^2 = du_1^2 + 2\cos \omega \, du_1 \, dv_1 + \left(\frac{u_1^2 \sin^2 \omega}{k^2} + 1\right) dv_1^2.$$

Durch Vergleichen mit den ursprünglichen Bezeichnungen (S. 218) haben wir dann:

$$\omega = \vartheta, \quad M = \frac{\sin \omega}{k}, \quad N = 0.$$

Setzen wir diese Werte in (15) ein und beachten wir dabei, dass σ gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, so erhalten wir:

$$\text{(18)} \qquad \frac{\cos \omega}{\varrho} + \frac{\sin \omega}{T} = \frac{\sin \omega}{k},$$

woraus der Satz folgt (vgl. S. 32):

Die Curven, in die der Kehlkreis des einschaligen Rotationshyperboloids bei einer Deformation der Fläche, bei der die Erzeugenden Gerade bleiben, verbogen wird, sind Bertrand'sche Curven.

Hieraus folgt eine Bestätigung der vorhin erwähnten Eigenschaft, dass das vorstehende Quadrat des Linienelements zum einschaligen Rotationshyperboloid gehört. In der That, wenn die Strictionslinie eben wird (§ 120), so ist $\frac{1}{T}$ gleich Null und nach (18)

$$\varrho = k \operatorname{cotg} \omega.$$

Die Strictionslinie wird also ein Kreis mit dem Radius $k \operatorname{cotg} \omega$, und die Fläche ist offenbar ein einschaliges Rotationshyperboloid, das diesen Kreis zum Kehlkreis hat.

---

*) Den directen Nachweis überlassen wir dem Leser.

Kapitel IX.

Evolutenfläche und Weingarten'scher Satz.

Allgemeine Eigenschaften der beiden Mäntel der Evolutenfläche. — Evolutenmittelfläche einer Fläche nach Ribaucour. — W-Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch eine Gleichung verbunden sind. — Sätze von Ribaucour über das Entsprechen der Haupttangentencurven und Krümmungslinien auf den beiden Mänteln der Evolutenfläche. — Bestimmung der Krümmungslinien einer W-Fläche mittels Quadraturen. — Die beiden Mäntel der Evolutenfläche einer W-Fläche sind auf Rotationsflächen abwickelbar (Weingarten'scher Satz). — Umkehrung des Weingarten'schen Satzes. — Besondere Formen des Linienelements der Kugel, die den W-Flächen entsprechen. — Anwendung auf die Bestimmung der Minimalflächen: $r_1 + r_2 = 0$ und der Weingarten'schen Flächen: $2(r_2 - r_1) = \sin 2(r_2 + r_1)$. — Evolventen- und Ergänzungsflächen der pseudosphärischen Flächen.

§ 122. Die geodätischen Linien der Evolutenfläche, die den Krümmungslinien der Evolventenfläche entsprechen.

Im ersten Teile dieses Kapitels nehmen wir die Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der Flächen wieder auf, um dann die Ergebnisse auf eine besonders wichtige Gattung von Flächen anzuwenden.

Wir haben auf S. 100 gesehen, dass auf der Normale in jedem Punkte M einer Fläche S zwei besondere Punkte M_1, M_2 liegen, nämlich die Hauptkrümmungsmittelpunkte der Fläche oder die Krümmungsmittelpunkte der beiden Hauptschnitte durch M. Bewegt sich der Punkt M auf der Fläche S, so beschreiben die Krümmungsmittelpunkte M_1, M_2 eine Fläche, welche die Evolutenfläche der Fläche S heisst, während die Fläche S die Evolventenfläche heisst. Die Evolutenfläche besteht offenbar aus zwei Mänteln S_1, S_2, von denen der eine vom Krümmungsmittelpunkt M_1, der andere vom Krümmungsmittelpunkt M_2 beschrieben wird.

Wir können die beiden Mäntel S_1, S_2 auch auf folgende Weise erzeugen: Wir betrachten eine Krümmungslinie C von S; die Flächennormalen längs C bilden nach S. 97 eine abwickelbare Fläche, deren Rück-

kehrcurve Γ eben der Ort der Krümmungsmittelpunkte der C berührenden Normalschnitte ist. Lassen wir die Curve C nach und nach in alle Krümmungslinien derselben Schar übergehen, so beschreibt ihre Evolute Γ einen Mantel der Evolutenfläche.

Vermittelst einfacher geometrischer Betrachtungen wollen wir nun einige grundlegende Eigenschaften der Evolutenflächen ableiten und zunächst den Satz beweisen:

Die Rückkehrcurven der abwickelbaren Flächen, welche die Örter der Flächennormalen längs der einzelnen Krümmungslinien der Fläche sind, sind geodätische Linien der Evolutenfläche.

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass jede Normale der Evolventenfläche die Evolutenfläche in zwei Punkten berührt, und zwar den ersten Mantel S_1 im ersten Krümmungsmittelpunkt M_1, den zweiten Mantel S_2 im zweiten Krümmungsmittelpunkt M_2. Wir betrachten nun ein Bogenelement MM' einer Krümmungslinie der zweiten Schar. Die Normalen in M und M' schneiden sich (bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung) im zweiten Krümmungsmittelpunkt M_2 und berühren den ersten Mantel S_1 in den bezüglichen auf ihnen gelegenen ersten Krümmungsmittelpunkten M_1 und M_1'.

Die Ebene MM_2M' enthält also zwei verschiedene Richtungen M_1M_2 und M_1M_1', die von M_1 ausgehen und S_1 berühren, und ist folglich die Tangentialebene des ersten Mantels in M_1. Daraus folgt unmittelbar:

Die Normale des ersten Mantels S_1 in M_1 ist der Tangente der ersten Krümmungslinie in M parallel. Entsprechendes gilt für den zweiten Mantel S_2.

Ist nun C_1 eine Krümmungslinie der ersten Schar und Γ_1 die Rückkehrcurve der von den Flächennormalen von S längs C_1 erzeugten abwickelbaren Fläche, so ist die Tangente von C_1 in M der Hauptnormale der Evolute Γ_1 parallel. Hiermit ist der vorhin ausgesprochene Satz bewiesen.

Ferner können wir leicht auf einem der Mäntel der Evolutenfläche, z. B. dem ersten, die zu diesen geodätischen Linien Γ_1 orthogonalen Trajectorien bestimmen. Ist nämlich t_1 eine von diesen orthogonalen Trajectorien auf S_1, ferner t die entsprechende Curve auf S, so erzeugen die Normalen von S längs t eine Linienfläche, auf der die Curven t und t_1 orthogonale Trajectorien der Erzeugenden sind. Das zwischen t und t_1 liegende Stück MM_1 dieser Erzeugenden ist demnach constant, wenn M längs t fortrückt (Satz (A), S. 159), d. h. längs der Curve t auf S ist der erste Hauptkrümmungsradius r_1 constant. Also:

Die orthogonalen Trajectorien der geodätischen Linien, die auf einem der Mäntel der Evolutenfläche von den Normalen der Evolventenfläche umhüllt werden, entsprechen denjenigen Curven auf der Evolventenfläche, längs deren der betreffende Hauptkrümmungsradius constant ist*).

Hierbei ist der Fall ausgeschlossen, dass der in Rede stehende Hauptkrümmungsradius auf der ganzen Fläche S constant ist. In diesem Falle reduciert sich aber, wie gezeigt werden wird, der entsprechende Mantel der Evolutenfläche auf eine Curve.

§ 123. **Formeln für die Evolutenfläche.**

Wir wollen nun die vorstehenden grundlegenden Eigenschaften auf analytischem Wege bestätigen und aus ihnen andere von grosser Wichtigkeit ableiten.

Am einfachsten lassen sich die dazu erforderlichen Rechnungen durchführen, wenn wir die Evolventenfläche S auf ihre Krümmungslinien u, v beziehen. Bezeichnen wir mit

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

das Quadrat des Linienelements, mit r_1, r_2 die den Curven u, v bezüglich entsprechenden Hauptkrümmungsradien, so haben wir (§ 54, S. 102):

$$D = -\frac{E}{r_2}, \quad D' = 0, \quad D'' = -\frac{G}{r_1},$$

und die Codazzi'schen Formeln werden in unserem Falle einfach (vgl. die beiden letzten Gleichungen (V), § 49, S. 94):

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right) = \frac{1}{r_2}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

oder:

$$(1) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right) = 0, \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right) = 0. \end{cases}$$

Was die Gaussische Gleichung anbetrifft, so lautet sie ((18) in § 35, S. 68):

---

*) Es dürfte nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, dass der hier gegebene Beweis für die Eigenschaft, dass die Curven $r_1 = $ Const. die orthogonalen Trajectorien der Curven Γ_1 sind, von der anderen Eigenschaft, dass die Curven Γ_1 geodätische Linien sind, unabhängig ist. Es ergiebt sich aus ihm sogar ein neuer Beweis für letztere Thatsache, wenn berücksichtigt wird, dass wegen der Eigenschaft der Evolventen (S. 27) der Bogen der Curven Γ_1, der zwischen zwei orthogonalen Trajectorien derselben liegt, für alle gleich ist (vgl. § 81, S. 159, Anmerkung).

(2) $$\frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right].$$

In den Gleichungen (1) können wir an Stelle von E, G die Coefficienten e, g des Linienelement-Quadrates der Kugel,

$$ds'^2 = edu^2 + gdv^2,$$

einführen, und zwar mittels der Gleichungen (13), § 54, S. 102:

(3) $$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{r_2}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{1}{r_2}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{1}{r_2}\frac{\partial z}{\partial u}, \\ \frac{\partial X}{\partial v} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = \frac{1}{r_1}\frac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

Es ergiebt sich:

$$e = \frac{E}{r_2^2}, \quad g = \frac{G}{r_1^2}.$$

Daher lassen sich die Gleichungen (1) auch folgendermassen schreiben:

(4) $$\begin{cases} (r_1 - r_2)\frac{\partial \log\sqrt{e}}{\partial v} - \frac{\partial r_2}{\partial v} = 0, \\ (r_1 - r_2)\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial u} + \frac{\partial r_1}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben wir bereits in § 69, S. 135, erhalten.

Wir können sie sofort zur Bestimmung derjenigen Flächen benutzen, für welche einer der Hauptkrümmungsradien constant ist.

Es sei z. B.

$$r_2 = \text{Const.}$$

Dann folgt aus (1) und (4):

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial e}{\partial v} = 0,$$

d. h. die Curven $v = \text{Const.}$ sind auf der Fläche und auf der Kugel geodätische Linien (vgl. S. 158). Es liegt also eine Curve $v = \text{Const.}$ der Fläche S in einer zur Fläche normalen Ebene (nach § 84, S. 166), und da sie einen constanten Hauptkrümmungsradius

$$r_2 = R$$

besitzt, so ist sie ein Kreis vom Radius R. Wir construieren die Kugel, die diesen Kreis als grössten Kreis hat; sie berührt die Fläche S längs des Kreises, und es ist daher S die Enveloppe einer Kugel von constantem Radius R, deren Mittelpunkt eine Raumcurve durchläuft. Eine solche Fläche heisst Kanal- oder Röhrenfläche. Umgekehrt ist klar, dass für jede Röhrenfläche vom Radius R einer der Hauptkrümmungsradien constant, gleich R, ist. Von den beiden Mänteln der Evolutenfläche reduciert sich der den Kreisen entsprechende

offenbar auf die Axe der Röhrenfläche, d. h. auf den Ort der Mittelpunkte der umhüllten Kugeln. Der zweite Mantel ist, wie sich geometrisch ergiebt, die Polardeveloppable der Axe (S. 23).

§ 124. Weitere Eigenschaften der Evolutenfläche.

Bezeichnen wir mit x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des ersten Krümmungsmittelpunktes M_1, so haben wir*):

$$(5)\qquad x_1 = x - r_1 X, \quad y_1 = y - r_1 Y, \quad z_1 = z - r_1 Z,$$

woraus sich durch Differentiation infolge der Gleichungen (3) ergiebt:

$$(6)\quad \begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial u} = \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial r_1}{\partial u} X, \quad \frac{\partial y_1}{\partial u} = \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial r_1}{\partial u} Y, \\ \qquad\qquad \frac{\partial z_1}{\partial u} = \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial r_1}{\partial u} Z, \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\frac{\partial r_1}{\partial v} X, \quad \frac{\partial y_1}{\partial v} = -\frac{\partial r_1}{\partial v} Y, \quad \frac{\partial z_1}{\partial v} = -\frac{\partial r_1}{\partial v} Z. \end{cases}$$

Bezeichnen wir überhaupt durch Hinzufügung des Index 1 die auf den ersten Mantel S_1 der Evolutenfläche bezüglichen Grössen, so erhalten wir, da die Normale der Tangente der zweiten Krümmungslinie parallel ist:

$$(7)\qquad X_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v},$$

Gleichungen, die den zweiten in § 122 angeführten Satz beweisen.

Ferner erhalten wir nach (6):

$$(8)\quad E_1 = E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2,$$

demnach:

$$(9)\quad ds_1^2 = \left[E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2\right] du^2 + 2\frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v} du\, dv + \left(\frac{\partial r_1}{\partial v}\right)^2 dv^2.$$

Werden zu Parameterlinien auf S_1 die Curven $u = \text{Const.}$ und $r_1 = \text{Const.}$ gewählt, so geht Gleichung (9) über in:

$$(9^*)\qquad ds_1^2 = dr_1^2 + E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2,$$

woraus hervorgeht, dass auf S_1 die Curven u geodätische Linien und die Curven $r_1 = \text{Const.}$ ihre orthogonalen Trajectorien sind (vgl. § 122).

Berücksichtigen wir die Gleichungen (§ 49, S. 94):

$$(10)\quad \frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\sqrt{G}}{r_1}X,$$

*) Man erinnere sich des Sinnes, in dem r_1 gerechnet wird. (S. 100, Anm.



dazu die analogen für Y_1 und Z_1, so erhalten wir für die Werte von

$$D_1, \quad D_1', \quad D_1''$$

infolge der Gleichungen (6) nach (3), S. 87, die Ausdrücke:

$$D_1 = -\sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\sqrt{E}}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right),$$

$$D_1' = -\sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial u} = 0,$$

$$D_1'' = -\sum \frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{\sqrt{G}}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial v}.$$

Eliminieren wir aus dem Werte für D_1 denjenigen für $\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}$ mittels der ersten der Gleichungen (1), so haben wir:

$$(11) \qquad D_1 = \frac{E}{\sqrt{G}}\frac{r_1}{r_2^2}\frac{\partial r_2}{\partial v}, \quad D_1 = 0, \quad D_1'' = -\frac{\sqrt{G}}{r_1}\frac{\partial r_1}{\partial v}.$$

Da D_1' gleich Null ist, so sehen wir sofort, dass **auf dem ersten (und ebenso auch auf dem zweiten) Mantel der Evolutenfläche diejenigen Curven u, v, welche den Krümmungslinien der Evolventenfläche entsprechen, ein conjugiertes System bilden.**

Dieses folgt auch unmittelbar daraus, dass auf S_1 die Tangenten der Curven u längs einer Curve v eine abwickelbare Fläche erzeugen, deren Rückkehrcurve die entsprechende Curve v auf dem zweiten Mantel S_2 ist (S. 107).

Merken wir uns noch, dass sich für das Krümmungsmass K_1 von S_1

$$(12) \qquad K_1 = \frac{D_1 D_1'' - D_1'^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2}\frac{\frac{\partial r_2}{\partial v}}{\frac{\partial r_1}{\partial v}}$$

ergiebt.

Entsprechend erhalten wir für das Krümmungsmass K_2 des zweiten Mantels S_2 den Wert:

$$(12^*) \qquad K_2 = -\frac{1}{(r_1 - r_2)^2}\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{\frac{\partial r_2}{\partial u}}.$$

§ 125. Beltramis Construction des Radius der geodätischen Krümmung.

In diesem Paragraphen geben wir eine von Beltrami herrührende Construction für den Radius der geodätischen Krümmung einer beliebigen auf einer Fläche gelegenen Curve, die für die Theorie der Evolutenflächen unmittelbar ein wichtiges Ergebnis liefert.

Auf einer Fläche S betrachten wir eine Schar von ∞^1 geodätischen Linien g, und es sei L eine Curve, deren Tangenten denjenigen der geodätischen Linien g conjugiert sind. Die Tangenten der Curven g längs L erzeugen eine abwickelbare Fläche, deren Rückkehrcurve wir mit Γ bezeichnen wollen. Es sei t irgend eine dieser Tangenten, M ihr Berührungspunkt mit S und m derjenige mit der Rückkehrcurve Γ. Wir wollen beweisen, dass der Punkt m der Mittelpunkt der geodätischen Krümmung in M für diejenige orthogonale Trajectorie der geodätischen Linien g ist, welche durch M geht.

Wir wählen zu diesem Zwecke auf S als Parameterlinien v die geodätischen Linien g und als Curven u ihre orthogonalen Trajectorien. Bei passender Wahl des Parameters u erhalten wir für das Quadrat des Linienelements von S nach S. 158 den Ausdruck:

$$ds^2 = du^2 + G dv^2,$$

und der Radius ϱ_u der geodätischen Krümmung der Curven u ist nach Grösse und Vorzeichen durch die Gleichung (§ 75, S. 148):

$$\frac{1}{\varrho_u} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}$$

bestimmt. Nun seien x, y, z die Coordinaten von M und ξ, η, ζ diejenigen von m. Setzen wir ferner den algebraischen Wert der Strecke Mm gleich r, so erhalten wir:

$$\xi = x + r\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \eta = y + r\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \zeta = z + r\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Verschieben wir M längs der Curve L und bezeichnen wir mit δ die entsprechenden Zunahmen, so ergiebt sich:

$$\delta\xi = \frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v + \delta r\frac{\partial x}{\partial u} + r\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\delta u + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\delta v\right),$$

$$\delta\eta = \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v + \delta r\frac{\partial y}{\partial u} + r\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\delta u + \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\delta v\right),$$

$$\delta\zeta = \frac{\partial z}{\partial u}\delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\delta v + \delta r\frac{\partial z}{\partial u} + r\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\delta u + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\delta v\right).$$

Nun sind $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ den Richtungscosinus der Tangente t der Rückkehrcurve Γ proportional; wenn wir daher die vorstehenden Gleichungen der Reihe nach mit $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ multiplicieren, sie dann addieren und dabei die Gleichungen:

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = G, \quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = 0$$

berücksichtigen, so erhalten wir:

$$G\,\delta v + \frac{r}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\,\delta v = 0,$$

d. h.:

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}.$$

Es stimmt also r der Grösse und dem Vorzeichen nach mit ϱ_u überein, was zu beweisen war.

Nachdem so der Satz von Beltrami bewiesen worden ist, betrachten wir wieder den ersten Mantel S_1 der Evolutenfläche einer Fläche S. Auf S_1 sind die orthogonalen Trajectorien der geodätischen Linien $u =$ Const. die Curven $r_1 =$ Const., während die Curven, deren Tangenten den Tangenten der Curven u conjugiert sind, die Curven v sind. Also: Der Mittelpunkt der geodätischen Krümmung einer auf S_1 gelegenen Curve $r_1 =$ Const. in einem Punkte M_1 ist der entsprechende Punkt M_2 auf dem zweiten Mantel S_2.

Daraus folgt, dass der Radius der geodätischen Krümmung der Curven $r_1 =$ Const. auf S_1 oder der Curven $r_2 =$ Const. auf S_2 (bis auf das Vorzeichen) durch die Differenz $r_1 - r_2$ der Hauptkrümmungsradien der Evolventenfläche gegeben ist.

§ 126. **Evolventen- und Evolutenmittelfläche nach Ribaucour.**

Im Zusammenhange mit der aus den beiden Mänteln S_1, S_2 bestehenden Evolutenfläche einer Fläche S wollen wir nun kurz noch eine zu S in enger Beziehung stehende Fläche betrachten, deren Untersuchung von Ribaucour herrührt und die wir mit diesem Mathematiker als Evolutenmittelfläche von S bezeichnen wollen. Wir betrachten den in der Mitte zwischen den beiden Krümmungsmittelpunkten M_1, M_2 von S gelegenen Punkt M_0; die Ebene, welche in M_0 auf der Linie M_1M_2 senkrecht errichtet, d. h. durch M_0 parallel der in M an die Evolventenfläche S gelegten Tangentialebene gelegt wird, heisse Mittelebene. Als Evolutenmittelfläche von S werde nun die Enveloppe Σ der Mittelebene bezeichnet. Umgekehrt nennen wir S die Evolventenmittelfläche von Σ.

Die Coordinaten des Mittelpunktes M_0 von M_1M_2 sind offenbar:

$$x_0 = x - \frac{r_1 + r_2}{2}X, \quad y_0 = y - \frac{r_1 + r_2}{2}Y, \quad z_0 = z - \frac{r_1 + r_2}{2}Z.$$

Wird mit ω der (algebraische) Abstand der Mittelebene vom Coordinatenanfangspunkt bezeichnet, so ist daher:

$$\omega = \Sigma X x_0 = \Sigma X x - \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Die Summe $\Sigma X x$ stellt nun den Abstand des Coordinatenanfangspunktes von der Tangentialebene der Evolventenfläche S dar. Bezeichnen wir diesen Abstand mit W, so haben wir demnach:

$$\omega = W - \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Nun ist nach den Weingarten'schen Gleichungen in Ebenencoordinaten (§ 72, (36), S. 141):

$$\frac{r_1 + r_2}{2} = W + \tfrac{1}{2}\Delta_2' W,$$

wo der zweite Differentialparameter $\Delta_2' W$ bezüglich des Linienelements der Bildkugel von S berechnet ist*). Daraus aber folgt:

$$\omega = -\tfrac{1}{2}\Delta_2' W. \tag{13}$$

Durch diese Gleichung, die für jedes beliebige System von Parameterlinien gilt, wird offenbar die Aufgabe gelöst: Zu einer gegebenen Evolventenfläche die Evolutenmittelfläche zu finden. Da nämlich W bekannt ist, so lässt sich aus (13) ω berechnen und dann durch die Gleichungen (34), § 72, S. 140 (wo ω für W zu setzen ist), die Evolutenmittelfläche Σ bestimmen.

Die umgekehrte Aufgabe: Für eine gegebene Fläche Σ diejenigen Flächen zu finden, deren Evolutenmittelfläche Σ ist, lässt sich mit Hilfe der Gleichung (13) auf eine bekannte Aufgabe der Analysis zurückführen. Wird nämlich auf Σ ein beliebiges Coordinatensystem (u, v) gewählt, so kennen wir ω als Function von u und v und müssen W aus der partiellen Differentialgleichung:

$$\Delta_2' W = -2\omega \tag{14}$$

bestimmen. Jede Lösung derselben giebt offenbar eine Lösung der gestellten Aufgabe. Ist insbesondere eine der Evolventenmittelflächen bekannt, z. B. diejenige, welche der Lösung W_1 von (14) entspricht, und wird

$$W = W_1 + \Omega$$

gesetzt, so ist die Bestimmung der anderen Evolventenmittelflächen auf die Integration der Gleichung:

$$\Delta_2'\Omega = 0 \tag{14*}$$

zurückgeführt.

---

*) Man beachte, dass sich S und Σ Punkt für Punkt infolge der Parallelität der Tangentialebenen entsprechen und dass daher das Linienelement der Bildkugel für S und Σ das gleiche ist.

Man braucht nur als Coordinatensystem (u, v) ein solches zu wählen, dem auf der Kugel ein isothermes System entspricht, um die Gleichungen (14), (14*) in die aus der Analysis wohlbekannten Gestalten:

(15) $$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = f(u, v),$$

wo f eine bekannte Function von u, v ist, bezw.

(15*) $$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 0$$

zu bringen, nach S. 72 u. 67.

Wenn sich die Evolutenmittelfläche auf einen Punkt reduciert, so sind die Evolventenflächen die von Appell*) untersuchten Flächen, bei denen die Mittelebenen durch einen Punkt gehen. Sie entsprechen den Lösungen der Gleichung (15*).

§ 127. W-Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch eine Gleichung verbunden sind.

Wir wollen nun die allgemeinen Sätze über Evolutenflächen auf eine wichtige Klasse von Flächen anwenden, auf diejenigen nämlich, deren Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 durch eine Gleichung:

$$\varphi(r_1, r_2) = 0$$

mit einander verbunden sind. Der Kürze wegen bezeichnen wir jede Fläche dieser Art als eine W-Fläche.

Auf die W-Flächen werden wir sofort bei der Untersuchung der folgenden Frage geführt: Wir ordnen zunächst die Punkte der beiden Mäntel S_1, S_2 der Evolutenfläche einander so zu, wie es sich aus ihrer geometrischen Construction von selbst ergiebt, d. h. wir ordnen

*) American Journal of Mathematics, 10. Bd. In demselben Bande hat Goursat die allgemeinen Flächen untersucht, die in unseren Bezeichnungen die durch die Gleichung:

$$r_1 + r_2 = n W \quad (n = \text{Const.})$$

ausgedrückte Eigenschaft besitzen. Ihre Bestimmung hängt von der Gleichung:

$$\Delta_2' W = (n-2) W$$

ab. Die Gleichung (13) wird für diese Flächen:

$$\omega = -\frac{n-2}{2} W$$

und beweist, dass die Evolutenmittelfläche einer Goursat'schen Fläche wieder eine der ursprünglichen ähnliche und zu ihr ähnlich gelegene Goursat'sche Fläche ist.

Es ist dieses offenbar eine charakteristische Eigenschaft der Goursat'schen Flächen.

jedem ersten Hauptkrümmungsmittelpunkt M_1 der Evolventenfläche den zweiten Hauptkrümmungsmittelpunkt M_2 zu. Dann fragen wir: **Wann tritt der Fall ein, dass sich auf den beiden Mänteln der Evolutenfläche die Haupttangentencurven entsprechen?** Dazu ist notwendig und hinreichend, dass die Coefficienten der zweiten Grundform von S_1 denjenigen der zweiten Grundform von S_2 proportional sind.

Nun ergiebt sich aus den Gleichungen (11) für S_1:

$$D_1 : D_1' : D_1'' = E r_1^2 \frac{\partial r_2}{\partial v} : 0 : - G r_2^2 \frac{\partial r_1}{\partial v}$$

und daher für S_2 entsprechend:

$$D_2 : D_2' : D_2'' = E r_1^2 \frac{\partial r_2}{\partial u} : 0 : - G r_2^2 \frac{\partial r_1}{\partial u}.$$

Die gestellte Bedingung hat also die Beziehung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

zur Folge, die besagt, dass r_1 und r_2 durch eine Gleichung verknüpft sind. Wir haben also den Satz von Ribaucour: **Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich auf den beiden Mänteln der Evolutenfläche die Haupttangentencurven entsprechen, ist, dass die Evolventenfläche eine W-Fläche ist.**

Es leuchtet ein, dass man, anstatt vom Entsprechen der Haupttangentencurven auf S_1, S_2 zu reden, auch sagen kann, jedem conjugierten System auf S_1 entspricht ein ebensolches auf S_2. Auf diese Weise wird dem Begriff des Entsprechens auch dann eine reelle Fassung gegeben, wenn die Haupttangentencurven auf S_1, S_2 imaginär sind. Auch mag noch bemerkt werden, dass, da auf den beiden Mänteln S_1, S_2 den Krümmungslinien der Evolventenfläche, wie beschaffen sie auch sein mag, zwei conjugierte Systeme entsprechen, nur die Bedingung gestellt zu werden braucht, dass noch einem anderen conjugierten System auf S_1 wieder ein conjugiertes System auf S_2 entsprechen soll, damit der soeben betrachtete Fall des Entsprechens vorliege*).

Tritt nun noch die weitere Bedingung hinzu, dass den Haupttangentencurven der beiden Mäntel einer Evolutenfläche die Haupttangentencurven der Evolventenfläche entsprechen sollen, deren Differentialgleichung nach S. 102 u. 109

*) Es braucht nämlich nur auf die beiden zweiten Grundformen von S_1, S_2 das Ergebnis in § 31, S. 58, angewandt zu werden. (Vgl. auch S. 119, zweite Anmerkung.)

$$\frac{E}{r_2}\,du^2 + \frac{G}{r_1}\,dv^2 = 0$$

ist, so ergeben sich sofort die beiden Bedingungen:

$$\frac{\partial(r_1 r_2)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial(r_1 r_2)}{\partial v} = 0,$$

woraus der Satz folgt: **Bei den Evolutenflächen der Flächen von constantem Krümmungsmass, und nur bei diesen, entsprechen den Haupttangentencurven der Evolventenfläche die Haupttangentencurven auf den beiden Mänteln der Evolutenfläche.**

Wir bemerken endlich, dass die Gleichungen (12), (12*), auf die Krümmungsmasse der beiden Mäntel der Evolutenfläche einer W-Fläche angewandt, geben:

$$(16)\qquad \begin{cases} K_1 = -\dfrac{1}{(r_1 - r_2)^2}\dfrac{dr_2}{dr_1}, \\ K_2 = -\dfrac{1}{(r_1 - r_2)^2}\dfrac{dr_1}{dr_2}. \end{cases}$$

Hieraus folgt somit der bemerkenswerte Satz von Halphen, der in der Gleichung:

$$(17)\qquad K_1 K_2 = \frac{1}{(r_1 - r_2)^4}$$

zum Ausdruck kommt.

§ 128. Satz von Ribaucour über das Entsprechen der Krümmungslinien auf den beiden Mänteln der Evolutenfläche.

Ein anderer Satz von Ribaucour lässt sich auf einfache Weise aus unseren allgemeinen Gleichungen ableiten. Dieser Satz bezieht sich auf den Fall, dass sich die Krümmungslinien auf den beiden Mänteln der Evolutenfläche einer Fläche entsprechen. Die Differentialgleichung der Krümmungslinien auf dem ersten Mantel, nämlich:

$$\begin{vmatrix} E_1 du + F_1 dv & F_1 du + G_1 dv \\ D_1 du + D_1' dv & D_1' du + D_1'' dv \end{vmatrix} = 0,$$

lautet, mit Benutzung der Gleichungen (9) und (11) entwickelt:

$$(18)\quad E r_1^2 \frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial v} du^2 + \left[EG(r_2 - r_1)^2 + G r_2^2 \left(\frac{\partial r_1}{\partial u}\right)^2 + E r_1^2 \frac{\partial r_1}{\partial v}\frac{\partial r_2}{\partial v}\right] du\,dv + \\ + G r_2^2 \frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_1}{\partial v} dv^2 = 0.$$

Als Differentialgleichung der Krümmungslinien auf dem zweiten Mantel S_2 ergiebt sich ebenso:

$$(18^*)\quad E r_1^2 \frac{\partial r_2}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial v}\,du^2 + \left[EG(r_2 - r_1)^2 + E r_1^2\left(\frac{\partial r_2}{\partial v}\right)^2 + G r_2^2 \frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial u}\right] du\,dv + \\ + G r_2^2 \frac{\partial r_1}{\partial u}\frac{\partial r_2}{\partial v}\,dv^2 = 0.$$

Sollen sich die Krümmungslinien auf beiden Mänteln entsprechen, so müssen die beiden Gleichungen (18), (18*) übereinstimmen, was sofort die Bedingungen:

$$\frac{\partial r_1}{\partial u} = \frac{\partial r_2}{\partial u}, \quad \frac{\partial r_1}{\partial v} = \frac{\partial r_2}{\partial v}$$

oder: $r_1 - r_2 = \text{Const.}$ liefert. Also: **Nur für die beiden Mäntel der Evolutenflächen derjenigen *W*-Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch die Bedingung:**

$$r_1 - r_2 = R \quad (R = \text{Const.})$$

verknüpft sind, trifft es zu, dass sich die Krümmungslinien entsprechen. Die Gleichungen (16) lassen ausserdem erkennen, dass **in diesem Falle die beiden Mäntel der Evolutenfläche Flächen von demselben negativen constanten Krümmungsmass, nämlich** $= -\frac{1}{R^2}$ **sind***).

Wir folgern hieraus, dass sich im vorliegenden Falle auch die Haupttangentencurven auf den beiden Mänteln entsprechen, und ferner **dass die entsprechenden Bogen solcher Haupttangentencurven einander gleich sind.** In der That haben wir nach Gleichung (9*):

$$ds_1^2 = dr_1^2 + \frac{E}{r_2^2}(r_2 - r_1)^2\,du^2,$$

$$ds_2^2 = dr_2^2 + \frac{G}{r_1^2}(r_2 - r_1)^2\,dv^2;$$

und da $dr_1^2 = dr_2^2$ und ausserdem längs der Haupttangentencurven (§ 127, S. 242)

$$E r_1^2 du^2 = G r_2^2 dv^2$$

ist, so folgt wirklich:

$$ds_1^2 = ds_2^2.$$

Diese letzte Bemerkung rührt von **Lie** her. Die soeben abgeleiteten eleganten Eigenschaften sind einer wichtigen Verallgemeinerung fähig, die wir in der Folge zur Kenntnis bringen werden.

---

*) Die Gleichungen (16) zeigen auch, dass nur bei den Evolutenflächen der Flächen: $r_1 - r_2 = \text{Const.}$ und der Minimalflächen die Krümmungsmasse der beiden Mäntel in entsprechenden Punkten gleich sind.

§ 129. Lies Satz über die Bestimmung der Krümmungslinien der W-Flächen mittels Quadraturen.

Lie hat bemerkt, dass auf jeder W-Fläche die Krümmungslinien mittels Quadraturen bestimmt werden können. Den Lie'schen Beweis werden wir später geben; hier wenden wir uns zum analytischen Beweise von Weingarten. Wir erinnern zu diesem Zwecke daran, dass sich die Differentialgleichung der Krümmungslinien einer Fläche S ergiebt, wenn die quadratische Covariante der beiden Grundformen, nämlich:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ Ddu + D'dv & D'du + D''dv \end{vmatrix},$$

gleich Null gesetzt wird (S. 99). Bezeichnen wir mit K_ψ die Krümmung dieser Differentialform und wählen wir zu ihrer Berechnung die Krümmungslinien als Parameterlinien, indem wir nach (23) u. (24), S. 134,

$$E = er_2^2\ , \quad F = 0, \quad G = gr_1^2\ ,$$
$$D = -er_2, \quad D' = 0, \quad D'' = -gr_1$$

setzen, so erhalten wir:

$$\psi = \sqrt{eg}\,(r_1 - r_2)\,du\,dv,$$

demnach (§ 29, S. 53, Gleichung (IV)):

$$K_\psi = -\frac{1}{(r_1 - r_2)\sqrt{eg}}\left[\frac{\partial^2 \log\sqrt{e}}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 \log\sqrt{g}}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial^2 \log(r_1 - r_2)}{\partial u\,\partial v}\right].$$

Nun ist aber infolge der Gleichungen (4), § 123, S. 235:

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{e}}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial r_2}{\partial v}}{r_1 - r_2},$$

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{g}}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\frac{\partial r_1}{\partial u}}{r_2 - r_1}$$

und daher:

$$K_\psi = \frac{1}{\sqrt{eg}\,(r_1 - r_2)^3}\begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Also nach S. 242: Für die W-Flächen, und nur für diese, hat die Form ψ die Krümmung Null. Der obige Satz von Lie folgt nunmehr aus § 29, S. 54, sofort, da die Form ψ offenbar indefinit ist.

Bezüglich der Haupttangentencurven einer W-Fläche ist ein entsprechender Satz nicht bekannt, ausser in den beiden besonders inter-

essanten Fällen der Minimalflächen und der pseudosphärischen Flächen. Für die ersteren besitzt die zweite (indefinite) Grundform:

$$D du^2 + 2 D' du\, dv + D'' dv^2$$

die Krümmung Null, und für die letzteren wird diese Grundform, mit $(r_1 - r_2)$ multipliciert, ebenfalls eine Form von der Krümmung Null (vgl. § 66, 67). Daraus folgt dann, dass sich ihre Haupttangentencurven mittels Quadraturen ergeben.

§ 130. Weingartens Satz über die Abwickelbarkeit der beiden Mäntel der Evolutenfläche auf Rotationsflächen.

Die wichtigste und fruchtbarste Eigenschaft der W-Flächen ist diejenige, welche sich in dem schönen Satze von Weingarten ausspricht:

A) Jeder Mantel der Evolutenfläche einer W-Fläche ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar, deren Bestimmung lediglich von der Gleichung abhängt, welche die Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 der Evolventenfläche W mit einander verbindet.

Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus den grundlegenden Entwickelungen der Paragraphen 124 und 125. Es sind nämlich auf dem ersten Mantel S_1 die Curven $r_1 =$ Const. geodätisch parallel (S. 239), und da der Radius ihrer geodätischen Krümmung,

$$r_1 - r_2,$$

eine Function von r_1 allein ist, so besitzen sie auch constante geodätische Krümmung. Also ist S_1 auf eine Rotationsfläche abwickelbar (§ 101, S. 195).

Da ferner die Function

$$f(r_1) = r_1 - r_2$$

lediglich von der Gleichung abhängt, die r_1 und r_2 mit einander verbindet, so ist auch der zweite Teil des Satzes einleuchtend.

Direct ergiebt sich der Satz aus der Gleichung (9*), § 124, S. 236:

$$ds_1^2 = dr_1^2 + E\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)^2 du^2.$$

Berechnen wir nämlich

$$\frac{\partial \log\left[\sqrt{E}\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)\right]}{\partial r_1} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \cdot \frac{1}{\frac{\partial r_1}{\partial v}} + \frac{1 - \frac{r_1}{r_2}\frac{d r_2}{d r_1}}{r_1 - r_2}$$

mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (1), S. 234, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \log\left[\sqrt{E}\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\right]}{\partial r_1} = \frac{1}{r_1 - r_2}.$$

Also ist:

$$\sqrt{E}\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right) = e^{\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2} + \varphi(u)}.$$

Wenn wir noch u durch $\int e^{\varphi(u)} du$ ersetzen, so ergiebt sich demnach der Satz:

Das Quadrat des Linienelements auf dem ersten Mantel S_1 der Evolutenfläche einer W-Fläche ist durch den Ausdruck:

(19) $$ds_1^2 = dr_1^2 + e^{2\int \frac{dr_1}{r_1 - r_2}} du^2$$

gegeben. Es ist klar, dass der zweite Mantel S_2 der Evolutenfläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, deren Linienelement-Quadrat durch

(19*) $$ds_2^2 = dr_2^2 + e^{2\int \frac{dr_2}{r_2 - r_1}} dv^2$$

gegeben ist.

Aus dem eben bewiesenen Satze von Weingarten können wir in der Weise, wie es Lie gethan hat, wieder den Satz in § 129 ableiten. Wir kennen nämlich auf S_1 unmittelbar die Curven $r_1 = \text{Const.}$; mittels einer Quadratur (§ 39, S. 74) ergeben sich die orthogonalen Trajectorien, denen auf der Evolventen-W-Fläche die Krümmungslinien des ersten Systems entsprechen. Ähnliches gilt für diejenigen des zweiten Systems.

§ 131. Beltramis Satz über die Normalensysteme von Flächen, die zugleich Flächen berühren.

Wie Weingarten selbst gezeigt hat, ist neben Satz A) auch die Umkehrung desselben richtig, bis auf einen Ausnahmefall, auf den wir später zurückkommen werden. Zum Beweise stellen wir die folgenden von Beltrami herrührenden geometrischen Ueberlegungen an*):

Auf einer beliebigen Fläche S nehmen wir eine Schar von ∞^1 Curven g an und betrachten das von den Tangenten der Curven gebildete Strahlensystem. Damit diese Strahlen die Normalen einer Fläche Σ seien, ist notwendig, dass die Curven g geodätische Linien sind, da einer der Mäntel der Evolutenfläche von Σ dann eben die

*) Ricerche di analisi applicata alla geometria. (Giornale di Matematiche, 2. u. 3. Bd.)

Fläche S ist (S. 233). Wir wollen nun beweisen, dass diese Bedingung auch hinreichend ist. Es seien die Curven g geodätische Linien und t eine ihrer orthogonalen Trajectorien. Wir betrachten die ∞^1 Evolventen C der Curven g, die von t ausgehen. Der Ort dieser Evolventen C ist nun eine Fläche Σ, welche die Tangenten der Curve g zu Normalen hat. In der That, ist MP ein Stück einer der Tangenten, das zwischen dem Berührungpunkt M mit einer geodätischen Linie g und dem Schnittpunkt P mit Σ liegt, so ist es auch in P normal zur Evolvente C. Lassen wir M längs einer Orthogonaltrajectorie t' der Curven g wandern, so bleibt MP beständig gleich dem zwischen t und t' liegenden Bogen der Curven g, und daher ist auch der Ort der Endpunkte P auf Σ in P normal zu MP. Da also die Tangente MP in P Normale zweier verschiedener von P ausgehender Curven auf Σ ist, so ist sie auch Normale von Σ, was zu beweisen war.

Wir haben also das Ergebnis: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Schar von ∞^2 Tangenten einer Fläche S das Normalensystem einer und daher unendlich vieler (paralleler) Flächen Σ bildet, ist, dass die auf S von diesen Geraden umhüllten Curven geodätische Linien sind.

Offenbar ist S ein Mantel der Evolutenfläche einer Fläche Σ, und einer der Hauptkrümmungsradien von Σ ist gleich dem Bogen der geodätischen Linien g, gerechnet von einer festen orthogonalen Trajectorie t. Der zweite Mantel S' der Evolutenfläche von Σ heisse die Ergänzungsfläche zu S bezüglich der geodätischen Linien g. Dieselbe kann auch als der Ort der Mittelpunkte der geodätischen Krümmung der zu den Curven g orthogonalen Trajectorien t' definiert werden (S. 238).

§ 132. Beweis der Umkehrung des Weingarten'schen Satzes.

Wir können nun die Umkehrung des Weingarten'schen Satzes leicht beweisen. Es sei nämlich S eine auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche, und wir nehmen an, die geodätischen Linien g, die bei der Abwickelung in die Meridiane übergehen, seien keine geraden Linien. Die ∞^2 Tangenten der Curven g sind dann nach dem Vorstehenden die Normalen einer Fläche Σ. Wenn wir mit

$$ds^2 = du^2 + \varphi^2(u)dv^2$$

das Quadrat des Linienelements von S, bezogen auf die geodätischen Linien g oder $v = \text{Const.}$ und auf ihre orthogonalen Trajectorien, und mit r_1, r_2 die Hauptkrümmungsradien der Evolventenfläche bezeichnen, so haben wir nun:

$$r_1 = u + \text{Const.},$$

also nach (19), S. 247:

$$\frac{1}{r_1 - r_2} = \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}.$$

Es sind daher r_1 und r_2 durch eine Gleichung verbunden, deren Natur lediglich von der Beschaffenheit der Function φ, d. h. von der Rotationsfläche abhängig ist, auf welche die Fläche S abwickelbar ist. S ist also Evolutenfläche einer W-Fläche.

Der ausgeschlossene Fall kann in der That eintreten, und die Untersuchungen des Kapitels VIII (§ 119—121) über die Linienflächen erledigen ihn vollständig. Wenn nämlich die geodätischen Linien g, die Biegungscurven der Meridane, Gerade sind, so ist die Fläche der Ort der Binormalen einer Curve constanter Torsion, und die Rotationsfläche, auf die sie abwickelbar ist, das Catenoid (§ 105, S. 202). Wir können also die Umkehrung des Weingarten'schen Satzes folgendermassen aussprechen:

B) Mit Ausnahme der Linienflächen, welche die Örter der Binormalen der Curven mit constanter Torsion (und also auf das Catenoid abwickelbar sind), kann jede andere auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche als der eine Mantel der Evolutenfläche einer W-Fläche aufgefasst werden.

§ 133. Besondere Formen des Linienelements auf der Kugel, die den W-Flächen entsprechen.

Die in den vorstehenden Paragraphen abgeleiteten Sätze lassen erkennen, dass die beiden Aufgaben, alle Biegungsflächen der Rotationsflächen zu finden bezw. die W-Flächen zu bestimmen, vollkommen gleichbedeutend sind. Letztere Aufgabe kann nun wieder, wie Weingarten gezeigt hat, auf die Bestimmung derjenigen besonderen Systeme von orthogonalen Curven auf der Kugel zurückgeführt werden, für die das Quadrat des Linienelements die Form:

$$ds'^2 = e\,du^2 + g\,dv^2,$$

wo g eine Function von e allein ist, annimmt.

Zum Beweise berücksichtigen wir, dass sich die Gleichungen (4) in § 123 für den Fall, dass die Fläche zur Gattung der W-Flächen gehört, folgendermassen schreiben lassen:

$$\frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\int \frac{dr_2}{r_1 - r_2},$$

$$\frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\int \frac{dr_1}{r_2 - r_1}.$$

Wenn wir nun integrieren und die Parameter u, v durch passende andere ersetzen, können wir

$$(20) \qquad \sqrt{e} = e^{\int \frac{dr_2}{r_1 - r_2}}, \qquad \sqrt{g} = e^{\int \frac{dr_1}{r_2 - r_1}}$$

machen. Es ergiebt sich demnach eine der beiden Grössen e, g als eine Function der anderen.

Es ist zweckmässig, die Integralzeichen aus diesen Gleichungen zu eliminieren. Dazu setzen wir, angenommen, dass r_2 und also auch $\sqrt{e}$ nicht constant ist,

$$\sqrt{e} = \frac{1}{\alpha};$$

dann sind $\sqrt{g}$, r_1, r_2 Functionen von α. Die erste der Gleichungen (20) giebt:

$$r_1 = r_2 - \alpha \frac{dr_2}{d\alpha}, \text{ also: } \frac{dr_1}{d\alpha} = -\alpha \frac{d^2 r_2}{d\alpha^2},$$

und die zweite:

$$\sqrt{g} = \frac{1}{\frac{dr_2}{d\alpha}}.$$

Setzen wir

$$r_2 = \vartheta(\alpha),$$

so folgt daraus:

$$r_1 = \vartheta(\alpha) - \alpha\vartheta'(\alpha), \qquad \sqrt{g} = \frac{1}{\vartheta'(\alpha)}.$$

Wir können demnach unser Ergebnis so fassen:

C) Wenn eine W-Fläche nach der Gaussischen Methode auf die Kugel abgebildet wird, so können die Parameter u, v ihrer Krümmungslinien so gewählt werden, dass das Quadrat des Linienelements der Kugel die Form:

$$(21) \qquad ds'^2 = \frac{du^2}{\alpha^2} + \frac{dv^2}{\vartheta'^2(\alpha)}$$

annimmt, wo α eine Function von u und v ist und die Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 der W-Fläche durch die Gleichungen:

$$(22) \qquad r_2 = \vartheta(\alpha), \quad r_1 = \vartheta(\alpha) - \alpha\vartheta'(\alpha)$$

gegeben sind.

Es gilt nun auch der umgekehrte Satz:

C*) Wenn das Linienelement-Quadrat (21) zur Kugel vom Radius Eins gehört, so giebt es eine zugehörige W-Fläche, die auf die Kugel abgebildet das sphärische System (u, v) zu Bildern der Krümmungslinien hat und deren Hauptkrümmungsradien durch die Gleichungen (22) gegeben sind.

Dieses folgt unmittelbar daraus, dass dann die Grundgleichungen (4), S. 235, erfüllt sind.

Wir fügen noch hinzu, dass sich, wenn X, Y, Z als Functionen von u und v bekannt sind, die W-Fläche mittels Quadraturen durch die Gleichungen ergiebt (vgl. (3), S. 235):

$$x = \int\left(r_2 \frac{\partial X}{\partial u} du + r_1 \frac{\partial X}{\partial v} dv\right), \quad y = \int\left(r_2 \frac{\partial Y}{\partial u} du + r_1 \frac{\partial Y}{\partial v} dv\right),$$
$$z = \int\left(r_2 \frac{\partial Z}{\partial u} du + r_1 \frac{\partial Z}{\partial v} dv\right).$$

Verfahren wir mit den Gleichungen (1), S. 234, in derselben Weise wie soeben mit den Gleichungen (4), so erhalten wir die folgenden Sätze, die wir nur anführen wollen:

D) Das Quadrat des Linienelements einer W-Fläche, bezogen auf die Krümmungslinien (u, v), kann auf die Form:

$$ds^2 = \frac{du^2}{\beta^2} + \frac{dv^2}{\vartheta'^2(\beta)} \tag{23}$$

gebracht werden, wo β eine Function von u und v ist. Die Hauptkrümmungsradien der W-Fläche sind dann durch die Gleichungen:

$$\frac{1}{r_2} = \vartheta(\beta), \quad \frac{1}{r_1} = \vartheta(\beta) - \beta\vartheta'(\beta) \tag{24}$$

gegeben.

D*) Wenn das Linienelement-Quadrat (23) so beschaffen ist, dass sich für seine Krümmung der Wert:

$$K = \vartheta(\beta)[\vartheta(\beta) - \beta\vartheta'(\beta)]$$

ergiebt, so gehört es zu einer W-Fläche, deren Hauptkrümmungsradien durch die Gleichungen (24) gegeben sind.

In der That sind dann die Gaussische Gleichung und die Codazzischen Gleichungen erfüllt.

§ 134. Anwendung auf die Bestimmung der Minimalflächen: $r_1 + r_2 = 0$ und der Weingarten'schen Flächen: $2(r_2 - r_1) = \sin 2(r_2 + r_1)$.

In der Anwendung der vorstehenden Ergebnisse, insbesondere der Sätze C) und C*), beschränken wir uns vorläufig auf zwei Fälle, in denen mittels Quadraturen die vollständige Klasse von W-Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch eine gegebene Gleichung verbunden sind, also auch nach dem Weingarten'schen Satze die vollständige Klasse von Flächen, die auf eine gegebene Rotationsfläche abwickelbar sind, bestimmt werden kann.

Der erste Fall ist derjenige, in dem das System (u, v), für welches das Quadrat des Linienelements der Kugel die Form (21) annimmt, ein isothermes ist. Dann kann man einfach

$$\vartheta'(\alpha) = \alpha, \quad \vartheta(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}$$

setzen, sodass man nach (22) erhält:

$$r_2 = \frac{\alpha^2}{2}, \quad r_1 = -\frac{\alpha^2}{2}.$$

Die entsprechenden Flächen sind ausschliesslich Minimalflächen und zwar alle Minimalflächen und ergeben sich mittels Quadraturen. Da das Catenoid eine Rotationsminimalfläche ist, so sind die Evolutenflächen der Minimalflächen auf die Evolutenfläche des Catenoids, d. h. auf diejenige Rotationsfläche abwickelbar, welche die Evolute der Kettenlinie zur Meridiancurve und die Leitlinie zur Drehaxe hat*). Von diesen Rotationsflächen können wir also mittels Quadraturen alle Biegungsflächen erhalten.

Ein zweiter Fall ergiebt sich aus den Sätzen in § 83, S. 164, über die geodätischen Ellipsen und Hyperbeln.

Wir können nämlich das Quadrat des Linienelements der Kugel in der allgemeinsten Weise auf die Form:

$$(25) \qquad ds'^2 = \frac{du^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dv^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}},$$

die ja zum Typus (21) gehört, bringen, wenn wir in (21)

$$\alpha = \sin\frac{\omega}{2}, \quad \vartheta'(\alpha) = \cos\frac{\omega}{2}$$

setzen, woraus

$$\vartheta'(\alpha)\,d\alpha = \frac{1 + \cos\omega}{4}\,d\omega,$$

$$\vartheta(\alpha) = \frac{\omega + \sin\omega}{4}$$

folgt. Die Gleichungen (22) geben dann:

$$(26) \qquad r_2 = \frac{\omega + \sin\omega}{4}, \quad r_1 = \frac{\omega - \sin\omega}{4}$$

und als Gleichung, welche die Hauptkrümmungsradien der entsprechenden W-Fläche verbindet:

$$(27) \qquad 2(r_2 - r_1) = \sin 2(r_2 + r_1).$$

Wir können demnach mittels Quadraturen auch die vollständige Klasse

) Für beide Mäntel der Evolutenfläche einer Minimalfläche ergiebt sich aus den Gleichungen (19) und (19):

$$ds^2 = d\alpha^2 + \alpha\,d\beta^2.$$

dieser W-Flächen bestimmen, obgleich die Relation, die hier zwischen den Hauptkrümmungsradien besteht, ziemlich verwickelter Art ist.

Die beiden Mäntel der Evolutenfläche dieser W-Fläche haben infolge der Gleichungen (19) und (19*), S. 247, als Linienelement-Quadrate:

$$ds_1^2 = \frac{1}{4}\left(\sin^4\frac{\omega}{2}\,d\omega^2 + 4\cos^2\frac{\omega}{2}\,du^2\right),$$

$$ds_2^2 = \frac{1}{4}\left(\cos^4\frac{\omega}{2}\,d\omega^2 + 4\sin^2\frac{\omega}{2}\,dv^2\right);$$

sie sind also (da ds_1 in ds_2 übergeht, wenn ω durch $\pi - \omega$ und u durch v ersetzt wird) auf einander und auf ein und dieselbe Rotationsfläche abwickelbar. Auch von dieser speciellen Rotationsfläche können wir demnach alle Biegungsflächen durch Quadraturen bestimmen.

Wir werden auf diese Ergebnisse in einem der nächsten Kapitel zurückkommen, wenn wir die elegante geometrische Construction von Darboux entwickeln, mittels deren man alle W-Flächen der Klasse (27) erhält.

§ 135. **Evolventen- und Ergänzungsflächen der pseudosphärischen Flächen.**

Zum Schluss wollen wir aus dem Weingarten'schen Satze einige Folgerungen ziehen, welche die pseudosphärischen Flächen betreffen, die ja zu den W-Flächen gehören.

Alle Evolutenflächen der pseudosphärischen Flächen sind auf ein und dieselbe Rotationsfläche, die Evolutenfläche der Pseudosphäre, d. h. auf das Catenoid, abwickelbar; also:

Jeder Mantel der Evolutenfläche einer pseudosphärischen Fläche ist auf das Catenoid abwickelbar.

Wir betrachten nun auf einer pseudosphärischen Fläche eins der unendlich vielen Systeme von geodätischen Linien v, für welche, sobald sie mit den orthogonalen Trajectorien als Parameterlinien gewählt werden, das Quadrat des Linienelements eine der drei Formen vom parabolischen, elliptischen oder hyperbolischen Typus annimmt (§ 98, S. 190):

(I) $$ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}}dv^2,$$

(II) $$ds^2 = du^2 + R^2\sinh^2\frac{u}{R}\,dv^2,$$

(III) $$ds^2 = du^2 + \cosh^2\frac{u}{R}\,dv^2.$$

Jedesmal sind die Tangenten der geodätischen Linien v die Normalen einer (Evolventen-) W-Fläche, und wir wollen nun feststellen, durch was

für eine Gleichung dementsprechend die Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 jeder solchen *W*-Fläche verbunden sind. Fassen wir die pseudosphärische Fläche S als den ersten Mantel der Evolutenfläche der *W*-Fläche auf und vergleichen wir die Ausdrücke (I), (II), (III) für das Quadrat des Linienelements mit dem Ausdruck (19), S. 247, indem wir r_1 statt u setzen:

$$ds_1^2 = dr_1^2 + e^{2\int\frac{dr_1}{r_1 - r_2}} dv_1^2,$$

so müssen wir die beiden Linienelemente einander gleich setzen, also

$$u = r_1 + C, \quad v = \lambda v_1 \quad (C, \lambda = \text{Const.})$$

annehmen. Als Relation zwischen r_1 und r_2 finden wir somit entsprechend den drei Fällen:

$$\text{(I')} \qquad r_1 - r_2 = R,$$

$$\text{(II')} \qquad r_1 - r_2 = R \operatorname{tangh} \frac{r_1 + C}{R},$$

$$\text{(III')} \qquad r_1 - r_2 = R \operatorname{cotgh} \frac{r_1 + C}{R}.$$

Der Wert von C in den beiden letzten Gleichungen hängt von der betreffenden speciellen Evolventenfläche Σ ab. Wir fragen nun: Auf was für Rotationsflächen sind die bezüglichen Ergänzungsflächen von S in den drei Fällen abwickelbar?

Im ersten Falle ergiebt sich die Antwort sofort aus dem Satze auf S. 244; offenbar ist die Ergänzungsfläche in diesem Falle wieder eine pseudosphärische Fläche vom Radius R. Diesen wichtigen Satz (aus dem in Kapitel XVII Folgerungen werden gezogen werden) können wir nach § 125 auch so aussprechen: Der Ort der Mittelpunkte der geodätischen Krümmung einer Schar paralleler Grenzkreise auf einer pseudosphärischen Fläche ist wieder eine pseudosphärische Fläche.

Indem wir nun zu den beiden anderen Fällen übergehen, sehen wir, dass sich für das Quadrat des Linienelements des zweiten Mantels der Evolutenfläche nach Gleichung (19*), § 130, im Falle (II)

$$ds_2^2 = \operatorname{tangh}^4 \frac{r_1 + C}{R}\, dr_1^2 + \frac{dv^2}{\cosh^2 \frac{r_1 + C}{R}},$$

im Falle (III)

$$ds_2^2 = \operatorname{cotgh}^4 \frac{r_1 + C}{R}\, dr_1^2 + \frac{dv^2}{\sinh^2 \frac{r_1 + C}{R}}$$

ergiebt. Die Meridiancurven der zugehörigen Rotationsflächen können in den beiden Fällen bezüglich durch die Gleichungen:

$$r = \frac{R}{\sqrt{R^2k^2+1}}\sin\varphi, \quad z = R\left[\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right],$$

$$r = \frac{R}{\sqrt{1-R^2k^2}}\sin\varphi, \quad z = R\left[\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right]$$

definiert werden, wo k eine Constante ist. Vergleicht man diese Gleichungen mit den früheren (§ 99, S. 191):

$$r = R\sin\varphi, \quad z = R\left[\log\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right],$$

so sieht man, dass die erste Curve die Projection der gewöhnlichen Tractrix auf eine durch die Asymptote gelegte Ebene ist; wir bezeichnen sie als verkürzte Tractrix. Die zweite Curve hat dagegen zur orthogonalen Projection auf eine durch die Asymptote gelegte Ebene die Tractrix selbst und werde als verlängerte Tractrix bezeichnet.

Also: Die Ergänzungsflächen einer pseudosphärischen Fläche in den drei Fällen (I), (II), (III) sind auf Rotationsflächen abwickelbar, die bezüglich die gewöhnliche, die verkürzte oder die verlängerte Tractrix zur Meridiancurve und die Asymptote zur Drehaxe haben.

Kapitel X.

Strahlensysteme (Congruenzen).

Strahlensysteme. — Grenzpunkte und Hauptflächen. — Isotrope Congruenzen von Ribaucour. — Abwickelbare Flächen und Brennpunkte des Strahlensystems. — Strahlensysteme von Normalen. — Beltrami'scher Satz. — Malus-Dupin'scher Satz. — Strahlensysteme mit gegebenem sphärischen Bilde der Hauptflächen. — Strahlensysteme mit gegebenem sphärischen Bilde der abwickelbaren Flächen. — Gleichungen, die sich auf die beiden Brennflächen beziehen. — Pseudosphärische Strahlensysteme. — Guichard'sche Strahlensysteme. — Guichard'sche und Voss'sche Flächen.

---

§ 136. Strahlensysteme.

Die Theorie, welche wir in dem vorliegenden Kapitel entwickeln wollen, hat zum Gegenstande die Systeme von doppelt unendlich vielen Geraden, die so im Raume verteilt sind, dass durch jeden Punkt des Raumes oder eines gewissen Raumgebiets eine Gerade oder eine endliche Zahl von Geraden des Systems hindurchgeht. Derartige Systeme von ∞^2 Geraden (Strahlen) werden kurz als Strahlensysteme oder auch als Strahlencongruenzen oder einfach als Congruenzen bezeichnet. Die Gesamtheit der Normalen einer Fläche ist nur ein besonderer Fall eines solchen Systems.

Diese Theorie, die aus Fragen der geometrischen Optik hervorgegangen ist, hat für die Flächenlehre immer mehr an Bedeutung gewonnen, und es scheint nicht zweifelhaft, dass sie in Zukunft noch viel mehr zu den Fortschritten der Geometrie beizutragen bestimmt ist.

Wir werden hier, im Anschluss besonders an die classische Arbeit von Kummer*), die Grundlagen der Theorie entwickeln und in diesem und den folgenden Kapiteln die hauptsächlichsten Anwendungen geben.

*) Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. (Crelles Journal, Bd. 57.)

Wir beschäftigen uns zunächst damit, das Strahlensystem analytisch zu definieren. Zu diesem Zwecke schneiden wir das ganze Strahlensystem durch eine Fläche S und betrachten für jeden Strahl des Systems denjenigen Punkt, in welchem (oder einen von denjenigen Punkten, in welchen) er von S geschnitten wird, als Anfangspunkt. Die Fläche S beziehen wir auf ein krummliniges Coordinatensystem (u, v) und definieren das Strahlensystem analytisch in der Weise, dass wir die Coordinaten x, y, z des Anfangspunktes und die Richtungscosinus des Strahles, die wir mit

$$X, Y, Z$$

bezeichnen, als Functionen von u und v ausdrücken.

Von den Functionen x, y, z setzen wir voraus, dass sie samt ihren partiellen Differentialquotienten endlich und stetig seien.

Ziehen wir durch den Mittelpunkt der Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

den Radius parallel der positiven Richtung des Strahles des Systems, so sind X, Y, Z die Coordinaten seines Endpunktes M_1. Diesen Punkt betrachten wir als das sphärische Bild der Geraden (u, v) des Strahlensystems. Durchläuft die Gerade (u, v) das System, so beschreibt der Punkt M_1 das sphärische Bild des Strahlensystems.

Die Coordinaten ξ, η, ζ jedes Punktes P auf dem Strahl (u, v) sind durch die Gleichungen:

$$(1) \qquad \xi = x + tX, \quad \eta = y + tY, \quad \zeta = z + tZ$$

gegeben, wo t die Abscisse des Punktes P auf dem Strahl ist und vom Anfangspunkte P_0 oder (x, y, z) ab gerechnet wird.

§ 137. Formeln für Strahlensysteme.

Mit Kummer führen wir die folgenden Fundamentalfunctionen ein:

$$(2) \qquad \sum\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = E, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = F, \quad \sum\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = G,$$

$$(3) \qquad \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = e, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = f, \quad \sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = f',$$

$$\sum\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = g,$$

mit Hilfe deren sich die beiden quadratischen Differentialformen ausdrücken:

$$(4) \qquad ds_1{}^2 = \sum dX^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$(5) \qquad \sum dx\,dX = e\,du^2 + (f + f')\,du\,dv + g\,dv^2,$$

die wir die beiden Grundformen nennen. Die erste stellt das Quadrat

des Linienelements des sphärischen Bildes dar; offenbar giebt ds_1 auch den unendlich kleinen Winkel zwischen zwei auf einander folgenden Erzeugenden (u, v), $(u + du, v + dv)$ an.

Wir bezeichnen ferner mit dp die unendlich kleine Länge des kleinsten Abstands des Strahles (u, v) von dem unendlich benachbarten Strahl, mit $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ die Richtungscosinus dieses kleinsten Abstands und endlich mit r den Wert der Abscisse t im Fusspunkt von dp auf dem Strahl (u, v) und haben dann:

$$\begin{aligned}\cos a : \cos b : \cos c &= (YdZ - ZdY) : (ZdX - XdZ) : (XdY - YdX),\\ &= \left[\left(Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right)du + \left(Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v}\right)dv\right] :\\ &: \left[\left(Z\frac{\partial X}{\partial u} - X\frac{\partial Z}{\partial u}\right)du + \left(Z\frac{\partial X}{\partial v} - X\frac{\partial Z}{\partial v}\right)dv\right] :\\ &: \left[\left(X\frac{\partial Y}{\partial u} - Y\frac{\partial X}{\partial u}\right)du + \left(X\frac{\partial Y}{\partial v} - Y\frac{\partial X}{\partial v}\right)dv\right].\end{aligned}$$

Wegen der Identitäten in § 68 (S. 131, 3. Anm.) kann man schreiben:

$$\begin{aligned}\cos a : \cos b : \cos c = &\left[\left(E\frac{\partial X}{\partial v} - F\frac{\partial X}{\partial u}\right)du - \left(G\frac{\partial X}{\partial u} - F\frac{\partial X}{\partial v}\right)dv\right] :\\ &: \left[\left(E\frac{\partial Y}{\partial v} - F\frac{\partial Y}{\partial u}\right)du - \left(G\frac{\partial Y}{\partial u} - F\frac{\partial Y}{\partial v}\right)dv\right] :\\ &: \left[\left(E\frac{\partial Z}{\partial v} - F\frac{\partial Z}{\partial u}\right)du - \left(G\frac{\partial Z}{\partial u} - F\frac{\partial Z}{\partial v}\right)dv\right],\end{aligned}$$

und daraus folgt:

$$(6)\quad \begin{cases}\cos a = \dfrac{\left(E\frac{\partial X}{\partial v} - F\frac{\partial X}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial X}{\partial v} - G\frac{\partial X}{\partial u}\right)dv}{\sqrt{EG - F^2}\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2}},\\[2ex] \cos b = \dfrac{\left(E\frac{\partial Y}{\partial v} - F\frac{\partial Y}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial Y}{\partial v} - G\frac{\partial Y}{\partial u}\right)dv}{\sqrt{EG - F^2}\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}},\\[2ex] \cos c = \dfrac{\left(E\frac{\partial Z}{\partial v} - F\frac{\partial Z}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial Z}{\partial v} - G\frac{\partial Z}{\partial u}\right)dv}{\sqrt{EG - F^2}\sqrt{Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2}}.\end{cases}$$

Nun ist:

$$dp = \sum \cos a\, dx$$

oder infolge obiger Gleichungen:

$$(7)\qquad dp = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}\, ds_1}\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ edu + fdv & f'du + gdv \end{vmatrix}.$$

—

Da r die Abscisse des Fusspunktes von dp auf dem Strahl (u, v) ist, so folgt, wenn t diejenige des Fusspunktes auf dem Strahl $(u + du, v + dv)$ bedeutet:

$$x + rX + dp \cos a = x + dx + t(X + dX)$$

nebst entsprechenden Gleichungen in y, z oder:

$$\begin{aligned} rX + dp \cos a &= dx + t(X + dX), \\ rY + dp \cos b &= dy + t(Y + dY), \\ rZ + dp \cos c &= dz + t(Z + dZ). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen geben, der Reihe nach mit X, Y, Z multipliciert und dann addiert:

$$t = r - \sum Xdx,$$

d. h. t unterscheidet sich, wie es auch natürlich ist, unendlich wenig von r. Wenn wir die Gleichungen dagegen mit dX, dY, dZ multiplicieren und dann addieren, so erhalten wir:

$$\sum dx\,dX + \left(r - \sum Xdx\right) \sum dX^2 = 0.$$

Also ist mit Vernachlässigung der unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung:

$$r = -\frac{\Sigma\,dx\,dX}{\Sigma\,dX^2},$$

d. h.

(8) $$r = -\frac{edu^2 + (f + f')du\,dv + gdv^2}{Edu^2 + 2F du\,dv + Gdv^2}.$$

§ 138. Grenzpunkte und Hauptebenen.

Die soeben abgeleiteten Gleichungen führen zu bemerkenswerten Folgerungen, zu denen wir am einfachsten dadurch gelangen, dass wir eine geeignete Transformation der krummlinigen Coordinaten (u, v) vornehmen. Hierzu schliessen wir zunächst den Fall aus, dass die beiden Grundformen (4) und (5) einander proportionale Coefficienten besitzen, d. h. dass die Proportion:

$$E : F : G = e : \frac{f + f'}{2} : g$$

bestehe. Dann kann mittels einer bestimmten reellen Transformation der Coordinaten u, v gleichzeitig (§ 31, S. 58)

$$F = 0, \quad f + f' = 0$$

gemacht werden.

Angenommen, diese Transformation wäre ausgeführt, so wird die Gleichung (8):

(8*) $$r = -\frac{edu^2 + gdv^2}{Edu^2 + Gdv^2}.$$

Bezeichnen wir mit r_1, r_2 diejenigen Werte von r, welche bezüglich $dv = 0$, $du = 0$ entsprechen, so erhalten wir:

$$r_1 = -\frac{e}{E}, \quad r_2 = -\frac{g}{G},$$

wo der getroffenen Annahme zufolge der Fall $r_1 = r_2$ ausgeschlossen bleibt. Gleichung (8*) lässt sich dann in der Form:

$$r = \frac{E r_1 du^2 + G r_2 dv^2}{E du^2 + G dv^2} \tag{9}$$

schreiben, und wenn z. B. $r_2 > r_1$ vorausgesetzt wird, so ist:

$$r = r_1 + \frac{G(r_2 - r_1)dv^2}{Edu^2 + Gdv^2} = r_2 - \frac{E(r_2 - r_1)du^2}{Edu^2 + Gdv^2},$$

woraus

$$r_1 \leqq r \leqq r_2$$

folgt.

Wir bezeichnen mit L_1 bez. L_2 die Fusspunkte der kleinsten Abstände des Strahls (u, v) von den beiden unendlich benachbarten Strahlen $(u + du, v)$, $(u, v + dv)$; ihre Abscissen sind r_1, r_2. Nach dem Obigen fällt der Fusspunkt des kleinsten Abstandes des Strahles (u, v) von jedem andern unendlich nahen Strahl $(u + du, v + dv)$ zwischen die Punkte L_1 und L_2; dieselben werden deshalb **Grenzpunkte** genannt.

Wenn wir mit

$$\cos a_1, \quad \cos b_1, \quad \cos c_1,$$

bez.

$$\cos a_2, \quad \cos b_2, \quad \cos c_2$$

die Werte von $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ in den Grenzpunkten L_1, L_2 bezeichnen, so erhalten wir gemäss den Gleichungen (6):

$$\cos a_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X}{\partial v}, \quad \cos b_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial Y}{\partial v}, \quad \cos c_1 = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial Z}{\partial v},$$

$$\cos a_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X}{\partial u}, \quad \cos b_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial Y}{\partial u}, \quad \cos c_2 = \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial Z}{\partial u},$$

demnach:

$$\cos a_1 \cos a_2 + \cos b_1 \cos b_2 + \cos c_1 \cos c_2 = 0.$$

Also ergiebt sich der Satz: **Die Richtungen der kleinsten Abstände des Strahles (u, v) von denjenigen beiden Strahlen des Strahlensystems, für welche die Fusspunkte dieser Abstände in die Grenzpunkte L_1, L_2 fallen, stehen auf einander senkrecht.**

Hauptebenen des Strahles (u, v) werden diejenigen Ebenen genannt, welche durch diesen Strahl senkrecht zu jenen beiden Minimalabständen gelegt werden. Der obige Satz lässt sich dann auch so aus-

sprechen: Die beiden Hauptebenen eines jeden Strahles stehen auf einander senkrecht.

Wir können nun die Gleichung (9) in einer anderen Form schreiben, wenn wir den Winkel ω einführen, den der kleinste Abstand dp des Strahles (u, v) vom Strahl $(u + du, v + dv)$ mit dem auf den Grenzpunkt L_1 bezüglichen Abstand dp_1 bildet. Wir haben nämlich:

$$\cos\omega = \Sigma \cos a \cos a_1 = \frac{\sqrt{E}\,du}{\sqrt{E du^2 + G dv^2}},$$

$$\cos^2\omega = \frac{E\,du^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}, \quad \sin^2\omega = \frac{G\,dv^2}{E\,du^2 + G\,dv^2}.$$

Somit entsteht aus (9) die Hamilton'sche Gleichung:

$$r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega. \tag{10}$$

§ 139. Isotrope Congruenzen von Ribaucour. Hauptflächen.

Wir untersuchen nun den Ausnahmefall:

$$e : \frac{f + f'}{2} : g = E : F : G.$$

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen bleiben auch dann noch gültig, mit dem einzigen Unterschiede, dass die dort vorgenommene Transformation hier auf unendlich viele Weisen möglich ist. Da sich $r_1 = r_2$ ergiebt, fallen die Grenzpunkte L_1, L_2 auf jedem Strahl in einen einzigen Punkt zusammen, und in denselben Punkt fallen auch die Fusspunkte aller Minimalabstände des Strahles von den unendlich benachbarten Strahlen. Diese merkwürdigen Strahlensysteme sind zuerst von Ribaucour untersucht worden, der ihnen den Namen isotrope Congruenzen gegeben hat. Ihr Studium bietet ein hohes Interesse wegen ihrer Beziehungen zu den Minimalflächen, die wir demnächst entwickeln werden.

Wir machen hier die folgenden Bemerkungen: Eine Gleichung:

$$\varphi(u, v) = 0$$

zwischen den Coordinaten u, v eines Strahles irgend eines Strahlensystems stellt eine Linienfläche dar, deren Erzeugende Strahlen des Systems sind, oder kurz ausgedrückt eine Linienfläche des Strahlensystems. Bei jeder Linienfläche einer isotropen Congruenz fällt offenbar die Strictionslinie mit dem Ort der Grenzpunkte ihrer Strahlen zusammen. Bei einer allgemeinen Congruenz dagegen tritt dieses nur bei den beiden Scharen von Linienflächen:

$$u = \text{Const.}, \quad v = \text{Const.}$$

ein, wenn u, v die im vorigen Paragraphen eingeführten Veränderlichen sind. Die Strictionslinie ist für jede Fläche $v =$ Const. der Ort des Grenzpunktes L_1 auf den entsprechenden Strahlen und ebenso für eine Fläche $u =$ Const. der Ort des Grenzpunktes L_2. Die Linienflächen dieser beiden Scharen werden daher als die Hauptflächen des Strahlensystems bezeichnet. Im Falle der isotropen Congruenzen und nur in diesem Falle ist jede Fläche des Systems eine Hauptfläche.

Wenn wir im Falle einer isotropen Congruenz als Curven (u, v) auf der Kugel ein Orthogonalsystem und als Ausgangsfläche die Ortsfläche der Grenzpunkte wählen, welche die Mittelfläche des Strahlensystems genannt wird, so haben wir:

$$r_1 = r_2 = 0,$$

daher:

$$e = 0, \quad f + f' = 0, \quad g = 0,$$

d. h. es ist identisch:

$$dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ = 0.$$

Wenn also die Mittelfläche S auf die Kugel abgebildet wird, nicht nach der Gaussischen Methode, sondern in der Weise, dass parallel der Richtung des Strahles des Systems ein Kugelradius gezogen wird, so zeigt die obige Gleichung, dass jedes Linienelement von S auf dem entsprechenden der Kugel senkrecht steht. Somit ergiebt sich der Satz von Ribaucour:

Die Mittelfläche einer isotropen Congruenz entspricht der Kugel durch Orthogonalität der Elemente.

Umgekehrt leuchtet ohne weiteres ein, dass, wenn eine Fläche S durch Orthogonalität der Elemente der Kugel entspricht, eine isotrope Congruenz entsteht, wenn durch die Punkte von S zu den Radien nach den entsprechenden Punkten der Kugel Parallele gezogen werden.

Endlich bemerken wir, dass, wenn von der Mittelfläche von S aus auf jedem Strahl eine constante Strecke t abgetragen wird, sodass

$$\xi = x + tX, \quad \eta = y + tY, \quad \zeta = z + tZ$$

die Coordinaten des Endpunktes sind, das Linienelement-Quadrat der Ortsfläche der Endpunkte durch

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + t^2(dX^2 + dY^2 + dZ^2)$$

gegeben ist und sich demnach nicht ändert, wenn t durch $-t$ ersetzt wird. Die beiden Flächen S_1, S_2, die entstehen, wenn die Strecke t nach beiden Seiten abgetragen wird, sind also auf einander abwickelbar, wobei sich die Punkte auf demselben Strahl entsprechen und die Entfernung zweier entsprechender Punkte constant gleich $2t$ ist. Um-

gekehrt ist klar, dass, wenn bei einem Paar auf einander abwickelbarer Flächen die Entfernung der entsprechenden Punkte constant ist, die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte eine isotrope Congruenz bilden.

§ 140. Gleichung zur Bestimmung der Grenzpunkte.

Wir kehren nun zu den allgemeinen Ergebnissen in § 138 zurück, die wir dadurch erhalten haben, dass wir ein besonderes System von Veränderlichen einführten, solche nämlich, die gleich Constanten gesetzt die Hauptflächen des Strahlensystems liefern. Wir wollen nun die Veränderlichen u, v als beliebig gewählt voraussetzen und die grundlegende Gleichung aufstellen, welche die Abscissen r_1, r_2 der Grenzpunkte giebt. Die Differentialgleichung der Hauptflächen ergiebt sich (§ 31, S. 57), wenn die Jacobi'sche Covariante der beiden Grundformen (4) und (5), d. h. die Determinante:

$$\begin{vmatrix} E du + F dv & F du + G dv \\ e du + \frac{f+f'}{2} dv & \frac{f+f'}{2} du + g dv \end{vmatrix}$$

gleich Null gesetzt wird. Sie lautet demnach:

$$\text{(A)} \quad \left(\frac{f+f'}{2} E - eF\right) du^2 + (gE - eG)\, du\, dv + \left(gF - \frac{f+f'}{2} G\right) dv^2 = 0.$$

Für diejenigen Werte von $\frac{du}{dv}$, welche dieser Gleichung genügen, lässt sich die Gleichung (8), nämlich:

$$r = -\frac{\left(e du + \frac{f+f'}{2} dv\right) du + \left(\frac{f+f'}{2} du + g dv\right) dv}{(E du + F dv) du + (F du + G dv) dv},$$

wie folgt schreiben:

$$r = -\frac{e du + \frac{f+f'}{2} dv}{E du + F dv} = -\frac{\frac{f+f'}{2} du + g dv}{F du + G dv}.$$

Es ist daher:

$$(Er + e) du + \left(Fr + \frac{f+f'}{2}\right) dv = 0,$$

$$\left(Fr + \frac{f+f'}{2}\right) du + (Gr + g) dv = 0.$$

Durch Elimination von du und dv aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich für r die quadratische Gleichung:

$$\text{(B)} \quad (EG - F^2) r^2 + [gE - (f+f') F + eG] r + eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = 0,$$

deren Wurzeln die Abscissen der beiden Grenzpunkte sind.

§ 141. Abwickelbare Flächen und Brennpunkte des Strahlensystems.

Wir untersuchen nun, ob es unter den Linienflächen des Strahlensystems abwickelbare Flächen giebt. Für eine solche Fläche:

(11) $$\varphi(u, v) = 0$$

muss dp, d. h. infolge der Gleichung (7)

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv & Fdu + Gdv \\ edu + fdv & f'du + gdv \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt:

(C) $$(f'E - eF)du^2 + [gE + (f' - f)F - eG]du\,dv + \\ + (gF - fG)dv^2 = 0$$

sein. Also: Die Strahlen des Strahlensystems können in zwei (reellen oder imaginären) Scharen von abwickelbaren Flächen angeordnet werden.

Zu derselben Differentialgleichung (C) der abwickelbaren Flächen des Strahlensystems gelangen wir auch auf die folgende Weise, die uns ausserdem noch ein anderes wichtiges Element liefert: Wir nehmen an, es wäre die Gleichung (11) die einer abwickelbaren Fläche des Strahlensystems, und bezeichnen mit ϱ die Abscisse des Punktes F, in dem der Strahl (u, v) die Rückkehrcurve der Fläche (11) berührt. Dann sind die Coordinaten von F:

$$x_1 = x + \varrho X, \quad y_1 = y + \varrho Y, \quad z_1 = z + \varrho Z.$$

Wenn wir diese Gleichungen differenzieren, wobei wir u und v als durch die Gleichung (11) verknüpft voraussetzen, so sind der Annahme zufolge dx_1, dy_1, dz_1 proportional den Grössen X, Y, Z, und wir erhalten demnach:

$$dx + \varrho dX = \lambda X, \quad dy + \varrho dY = \lambda Y, \quad dz + \varrho dZ = \lambda Z,$$

wenn λ ein (unendlich kleiner) Proportionalitätsfactor ist.

Multiplicieren wir diese drei Gleichungen der Reihe nach das erste Mal mit $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial Y}{\partial u}$, $\frac{\partial Z}{\partial u}$, das zweite Mal mit $\frac{\partial X}{\partial v}$, $\frac{\partial Y}{\partial v}$, $\frac{\partial Z}{\partial v}$, und addieren wir sie jedesmal, so erhalten wir:

$$edu + fdv + \varrho(Edu + Fdv) = 0,$$
$$f'du + gdv + \varrho(Fdu + Gdv) = 0.$$

Durch Elimination von ϱ ergiebt sich genau die Differentialgleichung (C) der abwickelbaren Flächen des Strahlensystems. Werden dagegen du und dv eliminiert, so ergiebt sich für ϱ die quadratische Gleichung:

(D) $$(EG - F^2)\varrho^2 + [gE - (f + f')F + eG]\varrho + eg - ff' = 0.$$

Ihre Wurzeln ϱ_1, ϱ_2 sind offenbar die Abscissen der beiden Punkte F_1, F_2, in denen der Strahl (u, v) die Rückkehrcurve der einen oder der andern durch ihn hindurchgehenden abwickelbaren Fläche der beiden Scharen berührt. Diese beiden Punkte werden die Brennpunkte des Strahles (u, v) genannt und können auch als diejenigen beiden Punkte definiert werden, in denen der Strahl (u, v) von den beiden unendlich benachbarten Strahlen, die der einen bez. der andern abwickelbaren Fläche angehören, geschnitten wird*). Sie sind reell oder imaginär, je nachdem die abwickelbaren Flächen des Strahlensystems reell oder imaginär sind.

Vergleicht man die Gleichungen (B) und (D), so folgt:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = r_1 + r_2,$$

d. h. der Mittelpunkt der Grenzpunkte fällt mit demjenigen der Brennpunkte zusammen. Dieser Punkt wird deshalb der Mittelpunkt des Strahles genannt, und der Ort der Mittelpunkte heisst die Mittelfläche. Aus den Gleichungen (B) und (D) folgt ferner:

$$\varrho_1 \varrho_2 = r_1 r_2 + \frac{(f - f')^2}{4(EG - F^2)}.$$

Also ist:

$$(r_1 - r_2)^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2 = \frac{(f - f')^2}{EG - F^2}.$$

Wird demnach mit $2d$ die Entfernung der Grenzpunkte und mit 2δ diejenige der Brennpunkte bezeichnet, so ist:

(12) $$d^2 - \delta^2 = \frac{(f - f')^2}{4(EG - F^2)}.$$

Wenn also die beiden Brennpunkte reell sind, so liegen sie, wie auch aus § 138, S. 260, folgt, zwischen den Grenzpunkten.

Der Einfachheit halber wählen wir die Mittelfläche als Ausgangsfläche. Dann lautet, wenn

$$r_1 = d, \quad r_2 = -d$$

gesetzt ist, die Hamilton'sche Gleichung (§ 138, S. 261):

$$r = d \cos 2\omega,$$

woraus hervorgeht, dass, während der Fusspunkt des kleinsten Abstandes zwischen dem Strahl (u, v) und einem unendlich benachbarten Strahl die Strecke zwischen den Grenzpunkten von $+d$ bis $-d$ durchläuft, der Winkel ω von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, wobei er den Wert $\frac{\pi}{4}$ im

*) Das Schneiden findet nur bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung statt, d. h. dp ist in F_1 und F_2 von höherer als der ersten Ordnung unendlich klein.

Mittelpunkt des Strahles annimmt. Bezeichnen wir mit ω_1, ω_2 seine Werte in den Brennpunkten

$$\varrho_1 = \delta, \quad \varrho_2 = -\delta,$$

so haben wir:

$$\cos 2\omega_1 = \frac{\delta}{d}, \quad \cos 2\omega_2 = -\frac{\delta}{d},$$

demnach ist:

$$\omega_1 + \omega_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Als Brennebenen werden diejenigen Ebenen bezeichnet, welche durch den Strahl und durch die beiden ihn schneidenden unendlich benachbarten Strahlen gelegt werden. Somit folgt: Die Winkel der beiden Brennebenen werden durch dieselben Ebenen halbiert wie die Winkel der beiden Hauptebenen.

Bezeichnen wir den Winkel der beiden Brennebenen mit

$$\gamma = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\pi}{2} - 2\omega_1,$$

so haben wir infolge der obigen Gleichungen:

$$\text{(13)} \qquad \sin\gamma = \frac{\delta}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{d^2 - \delta^2}}{d}.$$

§ 142. Brennflächen des Strahlensystems.

In Verbindung mit einem gegebenen Strahlensystem sind fünf Flächen zu betrachten, nämlich die Mittelfläche, der Ort der Mittelpunkte, die beiden Grenzflächen, die Örter der Grenzpunkte, und endlich die beiden Brennflächen, die Örter der Brennpunkte*). Die ersten drei sind stets reell, die letzten beiden nur für Strahlensysteme mit reellen abwickelbaren Flächen. Das Strahlensystem wird dann von den gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Brennflächenmäntel S_1 und S_2 gebildet. Da die beiden Brennpunkte F_1, F_2 die Berührungspunkte des Strahles mit den Brennflächen S_1, S_2 sind, so sind die Brennebenen offenbar die Tangentialebenen der Brennflächen in F_1, F_2. Die Strahlen des Systems umhüllen auf S_1 eine Schar von ∞^1 Curven, nämlich die Rückkehrkanten Γ_1 der abwickelbaren Flächen der einen der beiden Scharen; Ähnliches gilt für S_2. Man sieht sofort, dass die Schmiegungsebene der Curve Γ_1 im Punkte F_1, durch den sie hin-

*) Bei vielen Untersuchungen ist es vorteilhaft, noch eine sechste, von Ribaucour als Mittelenveloppe eingeführte Fläche zu betrachten, nämlich die Enveloppe derjenigen Ebenen, welche auf den Strahlen in den Mittelpunkten senkrecht stehen (Mittelebenen).

durchgeht, auch Tangentialebene von S_2 in F_2 ist. Die beiden Scharen von abwickelbaren Flächen des Strahlensystems schneiden jede der Brennflächen in einem conjugierten Curvensystem. (Nach S. 107.)

Können die Brennflächen zusammenfallen? Ist dem so, so fallen die auf der Brennfläche von den Strahlen umhüllten Curven mit ihrem eigenen conjugierten System zusammen, d. h. sie sind die Haupttangentencurven der einen Schar. Ferner lässt sich leicht nachweisen, dass dann die Entfernung $2d$ der Grenzpunkte durch

$$2d = \frac{1}{\sqrt{-K'}}$$

gegeben ist, wo K das Krümmungsmass der Brennfläche ist.

Man wähle nämlich als Ausgangsfläche die Brennfläche, als Parameterlinien die in Rede stehenden Haupttangentencurven v und ihre orthogonalen Trajectorien u, und es sei

$$ds^2 = E'du^2 + G'dv^2$$

das Quadrat des Linienelements der Brennfläche. Für die Coefficienten der zweiten Grundform haben wir nach (III), S. 91:

$$D = 0, \quad \frac{D'^2}{E'G'} = -K'.$$

Wir bilden die Richtungscosinus der Tangenten der Parameterlinien:

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial z}{\partial u},$$
$$X_2 = \frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad Z_2 = \frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial z}{\partial v}$$

und folgern aus den Gleichungen (I), S. 89, mit Rücksicht auf (A), S. 67:

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial\sqrt{E'}}{\partial v}X_2, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial\sqrt{G'}}{\partial u}X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E'}}X'.$$

Da nun X_1, Y_1, Z_1 gerade die Richtungscosinus des Strahles (u, v) sind, so finden wir für die Grundgrössen (2), (3), S. 257:

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial\sqrt{E'}}{\partial v}\right)^2, \quad F = -\frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{\partial\sqrt{E'}}{\partial v}\frac{\partial\sqrt{G'}}{\partial u},$$
$$G = \left(\frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial\sqrt{G'}}{\partial u}\right)^2 + \frac{D'^2}{E'},$$

$$e = 0, \quad f = -\frac{\partial\sqrt{E'}}{\partial v}, \quad f' = 0, \quad g = \sqrt{\frac{G'}{E'}}\frac{\partial\sqrt{G'}}{\partial u},$$

demnach:

$$EG - F^2 = \frac{D'^2}{E'G'}\left(\frac{\partial\sqrt{E'}}{\partial v}\right)^2,$$
$$eg - \left(\frac{f+f'}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\sqrt{E'}}{\partial v}\right)^2.$$

Die Gleichung (B), S. 263, giebt also, da ihr mittleres Glied gleich Null ist:

$$\frac{1}{4r^2} = \frac{D'^2}{E'G'} = -K',$$

was zu beweisen war.

§ 143. Normalensysteme. Malus-Dupin'scher Satz.

Ein Strahlensystem heisse ein **Normalensystem** oder eine **Normalencongruenz**, wenn es eine Fläche und folglich (§ 131, S. 248) eine Schar von ∞^1 Flächen giebt, die zu allen Strahlen normal sind.

Wenn ein Strahlensystem eine Normalencongruenz ist, so muss es möglich sein, in den Gleichungen (1), S. 257, für t eine solche Function von u und v zu wählen, dass die Ortsfläche des Punktes (ξ, η, ζ) zu den Strahlen normal wird. Dann müssen die Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ der Bedingung:

$$X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta = 0$$

genügen. Nun ist:

$$d\xi = dx + X dt + t dX, \quad d\eta = dy + Y dt + t dY, \quad d\zeta = dz + Z dt + t dZ,$$

daher lautet die gestellte Bedingung:

$$dt + \sum X dx = 0.$$

Setzen wir noch:

$$(14) \qquad U = \sum X \frac{\partial x}{\partial u}, \quad V = \sum X \frac{\partial x}{\partial v},$$

so haben wir zur Bestimmung von t die Gleichung:

$$dt = -(U du + V dv),$$

derzufolge die gestellte Bedingung die Forderung:

$$(15) \qquad \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}$$

liefert, die wegen der Gleichungen (3) auch in der Form:

$$(15^*) \qquad f = f'$$

geschrieben werden kann.

Unter der Voraussetzung also, dass die Gleichung (15) oder (15*) erfüllt ist, giebt es eine Schar von (parallelen) zum Strahlensystem orthogonalen Flächen, die durch die Gleichung:

$$(16) \qquad t = \text{Const.} - \int (U du + V dv)$$

bestimmt sind.

Wenn f gleich f' ist, so ist nach (12) und (13):

$$d = \delta, \quad \gamma = \frac{\pi}{2},$$

und umgekehrt folgt aus der einen oder der anderen von letzteren Gleichungen: $f = f'$. Also:

Dafür, dass ein Strahlensystem eine Normalencongruenz sei, ist die notwendige und hinreichende Bedingung, dass die Brennpunkte mit den Grenzpunkten zusammenfallen oder anders ausgedrückt, dass die Brennebenen auf einander senkrecht stehen*).

Die beiden Brennflächen eines Normalensystems fallen offenbar mit den beiden Mänteln der Evolutenfläche der zu den Strahlen orthogonalen Flächen zusammen.

Die Gleichung (15) bringen wir auf eine andere Form, indem wir die Winkel α, β einführen, die der Strahl (u, v) mit den Parameterlinien v, u der Ausgangsfläche S bildet. Ist

$$ds^2 = E'du^2 + 2F'du\,dv + G'dv^2$$

das Quadrat des Linienelements dieser Fläche, so haben wir:

$$\cos\alpha = \sum \frac{X}{\sqrt{E'}}\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{U}{\sqrt{E'}}, \quad \cos\beta = \sum \frac{X}{\sqrt{G'}}\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{V}{\sqrt{G'}}.$$

Daher lässt sich Gleichung (15) so schreiben:

$$(17) \qquad \frac{\partial(\sqrt{E'}\cos\alpha)}{\partial v} = \frac{\partial(\sqrt{G'}\cos\beta)}{\partial u}.$$

Wird diese Gleichung als erfüllt angenommen, so giebt die Gleichung (16):

$$(18) \qquad t = \text{Const.} - \int\left(\sqrt{E'}\cos\alpha\,du + \sqrt{G'}\cos\beta\,dv\right).$$

In diesen Gleichungen treten nur die Winkel α, β und die Coefficienten des Linienelement-Quadrats der Ausgangsfläche auf. Beltrami hat daraus die folgenden interessanten Schlüsse gezogen: Indem wir die Bedingung (17) als erfüllt annehmen, denken wir uns die Fläche S verbogen, wobei das Strahlensystem mit der Fläche fest verbunden ebenfalls und zwar so verändert wird, dass sich die Winkel α, β nicht ändern. Die Bedingung (17) bleibt dann stets erfüllt, und der Wert (18) für t ändert sich bei der Verbiegung nicht. Somit ergiebt sich der Beltrami'sche Satz:

Wenn die von den Punkten einer Fläche S ausgehenden Strahlen eines Normalensystems von einer der Orthogonalflächen Σ begrenzt gedacht werden, so ist bei jeder Verbiegung der Fläche S, bei der die mit der Fläche fest verbunden

*) Dieser Satz ergiebt sich auch unmittelbar aus den geometrischen Betrachtungen in § 131.

gedachten Strahlen ebenfalls ihre Lage ändern, der Ort der Endpunkte der Strahlen stets eine zu den Strahlen orthogonale Fläche*).

Aus der Gleichung (17) lässt sich ferner leicht der Malus-Dupin'sche Satz ableiten:

Wenn ein von Lichtstrahlen gebildetes Normalensystem eine beliebige Anzahl von Reflexionen oder Refractionen erfährt, so bleibt es immer ein Normalensystem.

Wir nehmen nämlich als Ausgangsfläche S die reflectierende oder brechende Fläche, als Parameterlinien u auf S diejenigen Curven, welche von den orthogonalen Projectionen der Strahlen auf die Tangentialebenen von S umhüllt werden, und als Curven v ihre orthogonalen Trajectorien. Dann haben wir:

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

wenn γ der Winkel des Strahles mit der Normale von S ist. Die Gleichung (17) wird nun:

$$\frac{\partial\left(\sqrt{G'}\sin\gamma\right)}{\partial u} = 0,$$

und wenn sie erfüllt ist, so ist sie es auch noch dann, wenn mittels der Bedingung:

$$\sin\gamma' = n\sin\gamma \quad (n = \text{Const.})$$

γ durch γ' ersetzt wird, wodurch der Satz bewiesen ist.

§ 145. Strahlensysteme mit gegebenem sphärischen Bilde der Hauptflächen.

Wir kehren nun zu den allgemeinen Strahlensystemen zurück, um nach einander zwei Aufgaben zu behandeln, die als die Verallgemeinerung der folgenden betrachtet werden können: die Flächen mit gegebenem Bilde der Krümmungslinien, d. h. die Normalensysteme mit gegebenem sphärischen Bilde der abwickelbaren Flächen (§ 74, Kap. V) zu bestimmen. Für ein Normalensystem fallen die abwickelbaren Flächen mit den Hauptflächen (S. 262) zusammen, während im Falle eines allgemeinen Strahlensystems die beiden Scharen von einander

*) Es mag bemerkt werden, dass, da in den Gleichungen (17) und (18) nur E' und G' auftreten, die biegsame Fläche S auch als nur teilweise undehnbar, d. h. nur längs der Curven u, v als undehnbar angenommen zu werden braucht. Auch bei diesen allgemeineren Verbiegungen behält der Beltrami'sche Satz seine Giltigkeit.

verschieden sind. Wir müssen uns daher nach einander mit folgenden beiden Aufgaben beschäftigen:

1) die Strahlensysteme mit gegebenem sphärischen Bilde der Hauptflächen,

2) die Strahlensysteme mit gegebenem sphärischen Bilde der abwickelbaren Flächen zu bestimmen.

Zunächst wollen wir uns mit der ersten Aufgabe beschäftigen, die stets eine reelle Bedeutung hat, mögen nun die abwickelbaren Flächen reell oder imaginär sein.

Das System (u, v) auf der Kugel, das Bild der Hauptflächen, muss ein orthogonales sein (§ 138, S. 261). Es sei also

$$ds'^2 = E du^2 + G dv^2$$

das Quadrat des Linienelements des sphärischen Bildes. Als Ausgangsfläche nehmen wir die Mittelfläche (S. 265), so dass die Unbekannten unserer Aufgabe die Coordinaten x, y, z des Mittelpunktes des Strahles (u, v) sind. Nach Voraussetzung müssen wir

$$F = 0, \quad f + f' = 0, \quad eG + gE = 0$$

haben, und wenn mit $2r$ die Entfernung der Grenzpunkte bezeichnet wird, ist also wegen der auf S. 260 für r_1 und r_2 gefundenen Werte:

$$\text{(19)} \qquad \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = rE, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = -rG,$$
$$\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = 0.$$

Wir führen nun eine neue unbekannte Function φ ein, indem wir

$$\text{(20)} \qquad f = \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = \varphi\sqrt{EG}, \quad f' = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = -\varphi\sqrt{EG}$$

setzen. Die geometrische Bedeutung von φ ergiebt sich unmittelbar aus der Gleichung (D) in § 141 (S. 265), da, wenn mit 2ϱ die Entfernung der Brennpunkte bezeichnet wird,

$$\text{(21)} \qquad \varphi^2 = r^2 - \varrho^2$$

folgt.

§ 146. Lösung der gestellten Aufgabe.

Aus der ersten der Gleichungen (20) berechnen wir $\frac{\partial(\varphi\sqrt{EG})}{\partial u}$, indem wir beachten, dass infolge der Gleichungen (4), S. 122,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} - EX$$

und ferner infolge der ersten der Gleichungen (19)

$$\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial (rE)}{\partial v} - \sum \frac{\partial x}{\partial u}\left(\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

ist. Daraus ergiebt sich mit Berücksichtigung wieder der Gleichungen (19) und (20):

$$\frac{\partial(\varphi\sqrt{EG})}{\partial u} = \varphi\sqrt{EG}\left(\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right) - r\left[E\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + G\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\right] +$$
$$+ \frac{\partial(rE)}{\partial v} - E\sum X\frac{\partial x}{\partial v}.$$

In unserem Falle ist aber nach (A), S. 67:

$$E\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + G\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} = 0, \quad \frac{\partial \log\sqrt{EG}}{\partial u} = \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}.$$

Daher folgt:

$$\text{(a)} \qquad \sum X\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{E}\frac{\partial(rE)}{\partial v} - \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

Ebenso ergiebt sich durch Differentiation der zweiten der Gleichungen (20) nach v:

$$\text{(b)} \qquad \sum X\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{1}{G}\frac{\partial(rG)}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}.$$

Nun brauchen wir nur die Gleichungen (a), (b) mit (19), (20) zu combinieren und nach $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}; \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ aufzulösen, um zu erhalten:

$$\text{(22)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = r\dfrac{\partial X}{\partial u} - \sqrt{\dfrac{E}{G}}\,\varphi\dfrac{\partial X}{\partial v} + \left[\sqrt{\dfrac{E}{G}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{1}{G}\dfrac{\partial(rG)}{\partial u}\right]X, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = -r\dfrac{\partial X}{\partial v} + \sqrt{\dfrac{G}{E}}\,\varphi\dfrac{\partial X}{\partial u} + \left[-\sqrt{\dfrac{G}{E}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{1}{E}\dfrac{\partial(rE)}{\partial v}\right]X; \end{cases}$$

dazu analoge Gleichungen in y und z.

Umgekehrt, sind r, φ zwei solche Functionen von u und v, dass die Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen (22) erfüllt sind, so bestimmen diese Gleichungen mittels Quadraturen ein Strahlensystem mit gegebenem sphärischen Bilde der Hauptflächen. Entwickeln wir nun wirklich die Integrabilitätsbedingungen für die Gleichungen (22), indem wir dabei die Grundgleichungen (4), S. 122, welche die zweiten Differentialquotienten von X, Y, Z geben, sowie die Gleichungen (A), S. 67, berücksichtigen, so finden wir, dass sie sich auf folgende einzige Bedingung zwischen r und φ reducieren:

$$\text{(23)} \qquad 2\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} + \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial \log E}{\partial v} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial \log G}{\partial u} + r\frac{\partial^2 \log(EG)}{\partial u \partial v} =$$
$$= \sqrt{EG}\,(\Delta_2\varphi + 2\varphi),$$

wo $\Delta_2\varphi$ der zweite Differentialparameter von φ:

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right]$$

ist. Man sieht also, dass die gestellte Aufgabe hinsichtlich ihrer Lösung eine grosse Willkür gestattet insofern, als r oder φ willkürlich gewählt und dann φ bez. r aus der partiellen Differentialgleichung (23) bestimmt werden kann.

Soll das Strahlensystem insbesondere eine Normalencongruenz sein, so haben wir $\varphi = 0$, und die Gleichung für r wird:

$$(24)\qquad \frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial r}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} + r\,\frac{\partial^2 \log\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Dies ist genau die adjungierte*) Gleichung der Gleichung:

$$(25)\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u} - \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} = 0,$$

von deren Lösung, wie wir in § 73 gesehen haben, dieselbe Aufgabe abhängt. Bekanntlich sind die Integrationen der Gleichung (24) und ihrer adjungierten (25) analytisch äquivalent.

§ 147. **Anwendung auf isotrope Strahlensysteme.**

Hinsichtlich der Anwendung der Gleichung (23) beschränken wir uns hier auf den Fall eines isotropen Strahlensystems (§ 139), wo $r = 0$ ist. Die Bestimmung der isotropen Strahlensysteme hängt infolge (23) von der Lösung der Gleichung:

$$\Delta_2\varphi + 2\varphi = 0$$

ab, die nach den Weingarten'schen Gleichungen für Ebenencoordinaten (vgl. (36), § 72, S. 141) auch als die Differentialgleichung der Minimalflächen in Ebenencoordinaten gedeutet werden kann.

Nun hat Ribaucour in der That die Theorie der isotropen Strahlensysteme vermittelst des folgenden grundlegenden Satzes zu derjenigen der Minimalflächen in Beziehung gebracht:

Die Mittelenveloppe**) eines isotropen Strahlensystems ist eine Minimalfläche.

Dieser Satz folgt mit Leichtigkeit aus unseren allgemeinen Gleichungen (22), in denen wir, da es sich jetzt um ein isotropes Strahlensystem handelt, für das die Hauptflächen unbestimmt sind, die Ortho-

*) S. Darboux, 2. Bd., S. 71 u. f.

**) Vgl. die Anmerkung zu § 142 (S. 266).

gonalcurven u, v auf der Bildkugel willkürlich wählen können; wir nehmen sie als isotherm an, indem wir nach S. 72

$$E = G = \lambda, \quad r = 0$$

setzen.

Alsdann werden die Gleichungen (22):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = X\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \varphi\frac{\partial X}{\partial v},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -X\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi\frac{\partial X}{\partial u}.$$

Wenn wir mit W den Abstand der Mittelebene vom Coordinatenanfangspunkt bezeichnen, so ist ferner:

$$W = \sum Xx,$$

also:

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \sum x\frac{\partial X}{\partial u},$$

$$\frac{\partial W}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \sum x\frac{\partial X}{\partial v}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = \sum x\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}\right) = -2\lambda\sum xX,$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + 2\lambda W = 0,$$

wodurch der Ribaucour'sche Satz bewiesen ist.

§ 148. Strahlensysteme mit gegebenem sphärischen Bilde der abwickelbaren Flächen.

Wir kommen nun zu der zweiten in § 145 gestellten Aufgabe, die, wie wir sogleich sehen werden, eine weit geringere Willkür bei ihrer Lösung gestattet. Die wichtigen Ergebnisse, die wir jetzt ableiten wollen, verdanken wir Guichard, der auf folgende Weise zu ihnen gelangt ist*):

Es sei

$$ds'^2 = Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2$$

das gegebene Quadrat des Linienelements auf der Kugel, wo die Curven u, v die Bilder der abwickelbaren Flächen des Strahlensystems sind. Wir nehmen auch hier als Ausgangsfläche die Mittelfläche des Systems, indem wir als Unbekannte die Coordinaten x, y, z des Strahlmittel-

*) Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables (Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, t. VI, 3e série).

punkts wählen. Bezeichnen wir mit 2ϱ die Entfernung der Brennpunkte von einander, so sind

$$x + \varrho X, \quad y + \varrho Y, \quad z + \varrho Z$$

die Coordinaten des einen und

$$x - \varrho X, \quad y - \varrho Y, \quad z - \varrho Z$$

die des anderen Brennpunkts. Wir nehmen an, dass der erste den Curven $v = \text{Const.}$, der zweite den Curven $u = \text{Const.}$ entspreche. Dann müssen wir haben:

$$\frac{\partial(x + \varrho X)}{\partial u} = hX, \quad \frac{\partial(y + \varrho Y)}{\partial u} = hY, \quad \frac{\partial(z + \varrho Z)}{\partial u} = hZ,$$

$$\frac{\partial(x - \varrho X)}{\partial v} = lX, \quad \frac{\partial(y - \varrho Y)}{\partial v} = lY, \quad \frac{\partial(z - \varrho Z)}{\partial v} = lZ,$$

wo h, l geeignete Proportionalitätsfactoren sind. Schreiben wir diese Gleichungen wie folgt:

$$(26) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left(h - \dfrac{\partial \varrho}{\partial u}\right) X - \varrho \dfrac{\partial X}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \left(l + \dfrac{\partial \varrho}{\partial v}\right) X + \varrho \dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

dazu die analogen in y, z, und stellen wir dann die Integrabilitätsbedingungen auf:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) \text{ u. s. w.,}$$

wobei wir berücksichtigen, dass nach (4), S. 122,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} - FX$$

ist, so erhalten wir:

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial l}{\partial u} - 2 \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} + 2 \varrho F = 0,$$

$$(\beta) \qquad \begin{cases} l = -2\left[\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \varrho\right], \\[2ex] h = 2\left[\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \varrho\right]. \end{cases}$$

Demnach werden die Gleichungen (26):

$$(27) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + 2 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \varrho\right] X - \varrho \dfrac{\partial X}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial r} = -\left[\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + 2 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \varrho\right] X + \varrho \dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

und die Gleichung (α) giebt, wenn in ihr für l, h die Werte (β) eingesetzt werden, für ϱ die Gleichung:

$$(28)\quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + F\right]\varrho = 0.$$

Umgekehrt, ist ϱ eine Lösung dieser Gleichung, so liefern die Gleichungen (27) mittels Quadraturen ein entsprechendes Strahlensystem, für welches das Bild der abwickelbaren Flächen das gegebene ist.

Wie man sieht, ist die Laplace'sche Gleichung (28), von deren Lösung die Aufgabe abhängig ist, die adjungierte der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial v} + FW = 0,$$

von deren Lösung, wir in § 73, S. 141, gesehen haben, die Bestimmung derjenigen Flächen abhängt, welche das System (u, v) zum sphärischen Bilde eines conjugierten Systems haben. Diese beiden Aufgaben sind also gleichbedeutend.

§ 149. Formeln für die beiden Brennflächen.

Wir wollen nun die Grössen berechnen, die sich auf die beiden Mäntel der Brennfläche beziehen, und müssen dazu ein Gleichungensystem ableiten, das uns später bei anderen Untersuchungen von Nutzen sein wird.

In jedem Punkte (u, v) der Kugel betrachten wir das rechtwinklige Trieder, das von der Kugelnormale und den beiden Richtungen, welche die Winkel der Parameterlinien u, v halbieren, gebildet wird. Die Cosinus der letzteren beiden Richtungen mögen mit

$$X_1,\quad Y_1,\quad Z_1,$$
$$X_2,\quad Y_2,\quad Z_2$$

bezeichnet werden. Bedeutet noch Ω den Winkel der Kugelcurven u, v, der durch die Gleichungen (vgl. S. 63):

$$\cos\Omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},\quad \sin\Omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

bestimmt ist, so erhalten wir sofort:

$$(29)\quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{2\sin\dfrac{\Omega}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial X}{\partial u} - \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial X}{\partial v}\right), \\[2ex] X_2 = \dfrac{1}{2\cos\dfrac{\Omega}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial X}{\partial u} + \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial X}{\partial v}\right), \end{cases}$$

nebst analogen Gleichungen in Y und Z.

Die Gleichungen, die wir ableiten sollen, drücken die partiellen Differentialquotienten der neun Richtungscosinus:

$$\begin{matrix} X, & X_1, & X_2, \\ Y, & Y_1, & Y_2, \\ Z, & Z_1, & Z_2 \end{matrix}$$

linear durch die Cosinus selbst und durch die Coefficienten des Quadrats des Linienelements auf der Kugel aus. Aus den Gleichungen (29) ergiebt sich sofort:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \sqrt{E} \sin \frac{\Omega}{2} X_1 + \sqrt{E} \cos \frac{\Omega}{2} X_2,$$

$$\frac{\partial X}{\partial v} = -\sqrt{G} \sin \frac{\Omega}{2} X_1 + \sqrt{G} \cos \frac{\Omega}{2} X_2.$$

Demnach ist:

$$\sum X \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\sum X_1 \frac{\partial X}{\partial u} = -\sqrt{E} \sin \frac{\Omega}{2},$$

$$\sum X \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\sum X_1 \frac{\partial X}{\partial v} = +\sqrt{G} \sin \frac{\Omega}{2},$$

$$\sum X \frac{\partial X_2}{\partial u} = -\sum X_2 \frac{\partial X}{\partial u} = -\sqrt{E} \cos \frac{\Omega}{2},$$

$$\sum X \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\sum X_2 \frac{\partial X}{\partial v} = -\sqrt{G} \cos \frac{\Omega}{2}.$$

Nun berechnen wir die beiden Summen:

$$\sum X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\sum X_1 \frac{\partial X_2}{\partial u},$$

$$\sum X_2 \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\sum X_1 \frac{\partial X_2}{\partial v}.$$

Infolge der Gleichungen (29) und der soeben aufgestellten ist:

$$\sum X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{1}{2 \sin \Omega} \sum \left[\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial X}{\partial u} \right) - \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \right) \right].$$

Da nach (b), S. 63,

$$\cos \Omega = \sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v}$$

ist, so ergiebt sich hieraus mittels Differentiation nach u:

$$\sum \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial X}{\partial u} \right) = -\sin \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial u} - \sum \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \right),$$

so dass sich die vorherige Gleichung auch so schreiben lässt:

$$\sum X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{2 \sin \Omega} \left[\sin \Omega \frac{\partial \Omega}{\partial u} + \frac{2}{\sqrt{E}} \sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \right) \right].$$

Wird mit Berücksichtigung der Gleichung (S. 275):

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} - FX$$

entwickelt, so ergiebt sich:

$$\sum X_2 \frac{\partial X_1}{\partial u} =$$
$$= -\frac{1}{2\sin\Omega}\left[\sin\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial u} + \frac{2}{\sqrt{EG}}\left\{E\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + F\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} - \frac{F}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\right\}\right].$$

Nun ist nach (A), S. 67:

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2\begin{bmatrix}1\,2\\2\end{bmatrix} = 2F\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + 2G\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix},$$

also:

$$E\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + F\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} - \frac{F}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{EG-F^2}{G}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = E\sin^2\Omega\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}.$$

Daher erhalten wir:

$$\sum X_2\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\sum X_1\frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u} - \sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\sin\Omega.$$

Entsprechend ist:

$$\sum X_2\frac{\partial X_1}{\partial v} = -\sum X_1\frac{\partial X_2}{\partial v} = +\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\sin\Omega.$$

Diese beiden Gleichungen geben, mit den Gleichungen auf S. 277, oben, und den Identitäten:

$$\sum X_1\frac{\partial X_1}{\partial u} = 0, \quad \sum X_1\frac{\partial X_1}{\partial v} = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

combiniert, sofort das gesuchte Gleichungensystem:

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \sqrt{E}\sin\dfrac{\Omega}{2}\cdot X_1 + \sqrt{E}\cos\dfrac{\Omega}{2}\cdot X_2, \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\sqrt{G}\sin\dfrac{\Omega}{2}\cdot X_1 + \sqrt{G}\cos\dfrac{\Omega}{2}\cdot X_2, \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -AX_2 - \sqrt{E}\sin\dfrac{\Omega}{2}\cdot X, \quad \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = BX_2 + \sqrt{G}\sin\dfrac{\Omega}{2}\cdot X, \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = AX_1 - \sqrt{E}\cos\dfrac{\Omega}{2}\cdot X, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -BX_1 - \sqrt{G}\sin\dfrac{\Omega}{2}\cdot X, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$(31)\quad A = \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\sin\Omega, \quad B = \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\sin\Omega$$

gesetzt worden ist.

Es mag bemerkt werden, dass sich infolge der in § 77 (S. 150) entwickelten Gleichungen A und B auch durch die geodätischen Krümmungen $\frac{1}{\varrho_u}$, $\frac{1}{\varrho_v}$ der Parameterlinien folgendermassen ausdrücken:

$$(31^*)\quad A = -\frac{\sqrt{E}}{\varrho_v} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}, \quad B = -\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}.$$

Die Gleichungen (30) geben, wenn das Linienelement der Kugel gegeben ist, für X, X_1, X_2 das bereits in § 50, S. 96, erwähnte

System von totalen Differentialgleichungen, das unbeschränkt integrierbar ist; seine Integration hängt von der Integration einer Riccati'schen Gleichung ab.

§ 150. Fortsetzung.

Wir kehren nun zu der Guichard'schen Aufgabe und den Guichard-schen Gleichungen zurück, in denen der Winkel Ω der Kugelcurven u, v auch denjenigen der Brennebenen darstellt*). Die Gleichungen (27) lauten nach (30):

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + 2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\right]X - \sqrt{E}\sin\dfrac{\Omega}{2}\cdot\varrho X_1 - \sqrt{E}\cos\dfrac{\Omega}{2}\cdot\varrho X_2, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\right]X - \sqrt{G}\sin\dfrac{\Omega}{2}\cdot\varrho X_1 + \sqrt{G}\cos\dfrac{\Omega}{2}\cdot\varrho X_2. \end{cases}$$

Wir bezeichnen mit S_1, S_2 die beiden Brennflächen, mit x_1, y_1, z_1, bez. x_2, y_2, z_2 die Coordinaten der Brennpunkte F_1, F_2, sodass

$$x_1 = x + \varrho X, \quad y_1 = y + \varrho Y, \quad z_1 = z + \varrho Z;$$
$$x_2 = x - \varrho X, \quad y_2 = y - \varrho Y, \quad z_2 = z - \varrho Z$$

ist; ferner bezeichnen wir mit

$$E_1, \quad F_1, \quad G_1; \quad D_1, \quad D_1', \quad D_1'',$$
$$E_2, \quad F_2, \quad G_2; \quad D_2, \quad D_2', \quad D_2''$$

die Coefficienten der beiden Grundformen von S_1 bez. S_2. Infolge der Gleichungen (30), (31) finden wir:

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = 2\left[\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\right]X,$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho X - 2\sqrt{G}\sin\frac{\Omega}{2}\cdot\varrho X_1 + 2\sqrt{G}\cos\frac{\Omega}{2}\cdot\varrho X_2,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial u} = 2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho X - 2\sqrt{E}\sin\frac{\Omega}{2}\cdot\varrho X_1 - 2\sqrt{E}\cos\frac{\Omega}{2}\cdot\varrho X_2,$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial v} = -2\left[\frac{\partial \varrho}{\partial v} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\right]X.$$

*) Die Kugelcurven u, v sind die Bilder der Tangenten der Rückkehrcurven der im Strahlensystem enthaltenen abwickelbaren Flächen, woraus sich die Richtigkeit unserer Behauptung sofort ergiebt. Analytisch gelangt man zu demselben Ergebnis, wenn man beachtet, dass

$$e = -\varrho E, \quad f = \varrho F, \quad f' = -\varrho F, \quad g = \varrho G$$

ist und also Gleichung (B), S. 263,

$$\frac{\varrho^2}{r^2} = \frac{EG - F^2}{EG} = \sin^2\Omega$$

giebt.

Daraus ergeben sich sofort die Gleichungen:

$$(33)\quad \begin{cases} E_1 = 4\left[\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\right]^2, \quad F_1 = -4\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\left[\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\right], \\ G_1 = 4\varrho^2\left[\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}^2 + G\right], \quad E_1G_1 - F_1^2 = 16G\varrho^2\left[\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\right]^2 \end{cases}$$

und analog:

$$(33^*)\quad \begin{cases} E_2 = 4\varrho^2\left[\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}^2 + E\right], \quad F_2 = -4\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\left[\frac{\partial \varrho}{\partial v} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\right], \\ G_2 = 4\left[\frac{\partial \varrho}{\partial v} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\right]^2, \quad E_2G_2 - F_2^2 = 16E\varrho^2\left[\frac{\partial \varrho}{\partial v} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\right]^2. \end{cases}$$

Wir bezeichnen nun mit ξ_1, η_1, ζ_1 die Richtungscosinus der Normale von S_1, mit ξ_2, η_2, ζ_2 diejenigen der Normale von S_2. Dann haben wir:

$$\xi_1 = \cos\frac{\Omega}{2}X_1 + \sin\frac{\Omega}{2}X_2,$$

$$\xi_2 = \cos\frac{\Omega}{2}X_1 - \sin\frac{\Omega}{2}X_2.$$

Wir berechnen alsdann:

$$D_1 = -\sum\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad D_1' = -\sum\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial u}, \quad D_1'' = -\sum\frac{\partial \xi_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v},$$

$$D_2 = -\sum\frac{\partial \xi_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial u}, \quad D_2' = -\sum\frac{\partial \xi_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}, \quad D_2'' = -\sum\frac{\partial \xi_2}{\partial v}\frac{\partial x_2}{\partial v}$$

und finden:

$$(34)\quad \begin{cases} D_1 = 2\sqrt{E}\sin\Omega\left[\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\right], \\ D_1' = 0, \quad D_1'' = -2\sqrt{G}\,\varrho\left[\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\sin\Omega\right], \\ D_2 = 2\sqrt{E}\,\varrho\left[\frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\sin\Omega\right], \\ D_2' = 0, \quad D_2'' = -2\sqrt{G}\sin\Omega\left[\frac{\partial \varrho}{\partial v} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\right].^{*)} \end{cases}$$

Die Krümmungsmasse K_1, K_2 der beiden Mäntel sind nach Formel (III), S. 91, durch die Ausdrücke gegeben:

*) Die Gleichungen $D_1' = 0$, $D_2' = 0$ sind der analytische Ausdruck der bekannten Eigenschaft der Curven u, v, auf beiden Brennflächen ein conjugiertes System zu bilden. Die Werte von D_1'' und D_2 lassen sich auch in der Form:

$$D_1'' = \frac{2G\varrho}{\varrho_u}, \quad D_2 = -\frac{2E\varrho}{\varrho_v}$$

schreiben.

$$(35)\quad \begin{cases} K_1 = -\dfrac{\sqrt{\dfrac{E}{G}}\sin\Omega\left[\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}+\sqrt{\dfrac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\sin\Omega\right]}{4\varrho\left[\dfrac{\partial\varrho}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\right]}, \\[2ex] K_2 = -\dfrac{\sqrt{\dfrac{G}{E}}\sin\Omega\left[\dfrac{\partial\Omega}{\partial u}+\sqrt{\dfrac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\sin\Omega\right]}{4\varrho\left[\dfrac{\partial\varrho}{\partial v}+\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\right]}. \end{cases}$$

Wir führen hier zwei Sätze an, die sich unmittelbar aus unseren Gleichungen ergeben und die sich auf zwei bemerkenswerte Klassen von Strahlensystemen beziehen. Die Systeme der ersten Klasse, denen wir eins der nächsten Kapitel (Kap. 12) widmen werden, sind diejenigen, bei welchen auf den beiden Mänteln der Brennfläche die Haupttangentencurven einander entsprechen; die Systeme der zweiten Klasse sind die jenigen, bei welchen den Haupttangentencurven auf dem einen Mantel ein conjugiertes System auf dem anderen Mantel entspricht. Im ersten Falle muss nach S. 109 die Proportion:

$$D_1 : D_1' : D_1'' = D_2 : D_2' : D_2'',$$

im zweiten nach S. 108 die Gleichung:

$$D_1 D_2'' + D_2 D_1'' - 2 D_1' D_2' = 0$$

bestehen. Mit Rücksicht auf die Gleichungen (34), (35) ergiebt sich in diesen Fällen für das Product $K_1 K_2$ der Ausdruck:

$$K_1 K_2 = \pm\left(\frac{\sin\Omega}{2\varrho}\right)^4,$$

wo das obere Vorzeichen im ersten, das untere Vorzeichen im zweiten Falle gilt. Da nun $\frac{2\varrho}{\sin\Omega}$ die Entfernung der Grenzpunkte von einander ist, können wir folgenden Satz aufstellen:

Bei den Strahlensystemen der ersten Klasse ist das Product der Krümmungsmasse der beiden Brennflächenmäntel in zwei entsprechenden Punkten gleich dem reciproken Werte der vierten Potenz der Entfernung der Grenzpunkte, bei den Strahlensystemen der zweiten Klasse ist es derselbe Ausdruck mit entgegengesetztem Vorzeichen.

Man sieht, dass für die Systeme der ersten Klasse der in diesem Falle von Ribaucour herrührende Satz nur eine Verallgemeinerung des Halphen'schen (S. 243, Gleichung (17)) für die beiden Mäntel der Evolutenfläche einer W-Fläche ist. Für die Strahlensysteme der zweiten Classe hat zuerst Waelsch den betreffenden Satz angegeben*).

---

*) Comptes Rendus de l'Académie 118. Bd., S. 736.

§ 151. Pseudosphärische Strahlensysteme.

Wir wenden die allgemeinen Gleichungen des voraufgehenden Paragraphen noch auf zwei besondere Fälle an. Zunächst stellen wir uns die Frage: Giebt es Strahlensysteme, bei denen die Entfernung der Brennpunkte und die Entfernung der Grenzpunkte gleichzeitig constant ist? Aus § 128, S. 244, wissen wir, dass es Normalensysteme dieser Art in der That giebt, nämlich diejenigen, welche von den Normalen einer W-Fläche gebildet werden, deren Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 durch die Gleichung:

$$r_1 - r_2 = \text{Const.}$$

verbunden sind.

Jetzt, bei der Behandlung der allgemeinen Frage, müssen wir in den Gleichungen des voraufgehenden Paragraphen

$$\varrho = \text{Const.}, \quad \Omega = \text{Const.}$$

annehmen. Dann werden die Gleichungen (35):

$$K_1 = K_2 = -\frac{\sin^2 \Omega}{4\varrho^2};$$

und da eben

$$\frac{2\varrho}{\sin \Omega} = 2r$$

die Entfernung der Grenzpunkte ist, so haben wir den Satz: Wenn in einem Strahlensystem die Entfernung der Brennpunkte sowohl als auch diejenige der Grenzpunkte constant ist, so sind die beiden Brennflächen pseudosphärische Flächen, deren Radien gleich der Entfernung der Grenzpunkte sind.

Die Strahlensysteme dieser Art, deren Vorhandensein für alle Werte von ϱ und Ω wir später nachweisen werden, heissen pseudosphärische Strahlensysteme. Hier wollen wir unter der Voraussetzung, dass es solche wirklich giebt, noch einige Eigenschaften bezüglich des Entsprechens der Punkte auf den beiden Mänteln der Brennfläche ableiten. Als Differentialgleichung der Haupttangentencurven finden wir auf beiden Mänteln aus den Gleichungen (34):

$$E du^2 - G dv^2 = 0,$$

sodass die Haupttangentencurven auf den beiden Mänteln einander entsprechen. Ferner ergeben sich für die Quadrate der Linienelemente ds_1, ds_2 nach (33) und (33*) die Ausdrücke:

$$ds_1^2 = 4\varrho^2 \left[\left(\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} du - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} dv \right)^2 + G dv^2 \right],$$

$$ds_2^2 = 4\varrho^2 \left[\left(\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} du - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} dv \right)^2 + E du^2 \right];$$



und daraus folgt, dass die Bogen entsprechender Haupttangentencurven einander gleich sind. Aus den Gleichungen (33) und (34) erhalten wir als Differentialgleichung der Krümmungslinien auf beiden Mänteln:

$$E\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}du^2-\left[EG+E\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}^2+G\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}^2\right]du\,dv+$$
$$+G\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}dv^2=0.$$

Wir haben somit den Satz: **Auf den beiden Mänteln der Brennfläche eines pseudosphärischen Strahlensystems entsprechen die Krümmungslinien einander, ebenso die Haupttangentencurven, und es sind überdies entsprechende Bogen der letzteren einander gleich** *).

---

*) Erwähnenswert sind die Folgerungen, die sich aus den Gleichungen in § 146 für die sphärischen Bilder u, v der Hauptflächen eines pseudosphärischen Strahlensystems ergeben. Da r und ϱ, also auch $\varphi=\sqrt{r^2-\varrho^2}$ constant sind, so geht Gleichung (23), S. 272, über in:

$$\frac{\partial^2\log\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v}=\frac{\varphi}{r}\sqrt{EG}=\cos\Omega\sqrt{EG}.$$

Also: **Das Quadrat des Linienelements der Kugel, bezogen auf die Bildcurven u, v der Hauptflächen eines pseudosphärischen Strahlensystems, nimmt die Form:**

(a) $$ds'^2=E\,du^2+G\,dv^2$$

an, wo das Product $\sqrt{EG}$ eine Lösung der Liouville'schen Gleichung:

(b) $$\frac{\partial^2\log\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v}=\cos\Omega\sqrt{EG}\quad(\Omega=\text{Const.})$$

ist.

Umgekehrt ist gemäss § 146 klar, dass, wenn das Linienelement der Kugel auf die Form (a) gebracht und dabei Gleichung (b) erfüllt ist, es ein entsprechendes pseudosphärisches Strahlensystem giebt.

Ist insbesondere das pseudosphärische System ein Normalensystem, so ist $\Omega=\frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial^2\log\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v}=0$, und $\sqrt{EG}$ kann ohne weiteres gleich Eins gesetzt werden. Werden dann u, v als rechtwinklige Cartesische Coordinaten eines Punktes in einer Bildebene aufgefasst, so liegt hier eine flächentreue Abbildung der Kugel auf die Ebene vor, bei der dem Orthogonalsystem der Parallelen zu den Coordinatenaxen in der Bildebene ein Orthogonalsystem auf der Kugel entspricht.

Zu diesen Ergebnissen würde man direct in der Weise gelangen, dass man nach Satz (C), S. 250, die sphärischen Bilder der Krümmungslinien derjenigen W-Flächen zu bestimmen suchte, bei welchen die Differenz der Hauptkrümmungsradien constant ist.

Bemerkenswert ist noch der Fall $\Omega=0$; dann wird das Strahlensystem von den Tangenten der einen Schar Haupttangentencurven einer pseudosphärischen Fläche gebildet (vgl. § 142, S. 267).

§ 152. Guichard'sche Strahlensysteme. Guichard'sche und Voss'sche Flächen.

Die zweite Frage, die wir uns vorlegen, ist die folgende*): Bei welchen Strahlensystemen schneiden die abwickelbaren Flächen die Brennflächen in Krümmungslinien?

Für diesen Fall müssen wir

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0$$

haben, und es ergeben sich also infolge von (33) und (33*) (unter der Voraussetzung, dass sich die Brennflächen nicht auf Curven reducieren) als notwendige und hinreichende Bedingungen:

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Nun besagen diese (§ 67, S. 130), dass die sphärischen Curven u, v die Bilder der Haupttangentencurven einer pseudosphärischen Fläche sind, und somit haben wir das Ergebnis: Die gesuchten Strahlensysteme sind sämtlich und ausschliesslich diejenigen, welche zum Bilde der abwickelbaren Flächen die Bildcurven der Haupttangentencurven einer pseudosphärischen Fläche haben.

Da dann (§ 67)

$$E = G = 1, \quad \text{also} \quad F = \cos \Omega$$

gesetzt werden kann, so lautet die Laplace'sche Gleichung, die ϱ bestimmt, nach (28), S. 276:

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \, \partial v} + \varrho \cos \Omega = 0. \tag{36}$$

Jeder Lösung ϱ dieser Gleichung entspricht ein Strahlensystem der eben betrachteten Art; wir wollen diese Systeme Guichard'sche Strahlensysteme nennen.

Für die Quadrate der Linienelemente der beiden Mäntel der Brennfläche eines Guichard'schen Systems ergeben sich aus den Gleichungen (33) und (33*) die einfachen Ausdrücke:

$$ds_1^2 = 4 \left(\frac{\partial \varrho}{\partial u}\right)^2 du^2 + 4 \varrho^2 dv^2,$$

$$ds_2^2 = 4 \varrho^2 du^2 + 4 \left(\frac{\partial \varrho}{\partial v}\right)^2 dv^2.$$

In der Gleichung (36) bedeutet Ω nach § 67, S. 131, eine beliebige Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \, \partial v} = - \sin \Omega,$$

*) Vgl. Guichard a. a. O.

und mit **Guichard** mag bemerkt werden, dass $\frac{\partial \Omega}{\partial u}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial v}$ particuläre Lösungen der Gleichung (36) sind; einer der beiden Brennflächenmäntel ist für diese Lösungen eine Kugel.

Auf der Guichard'schen Fläche S_1 haben die Krümmungslinien $v =$ Const. die Strahlen des Systems zu Tangenten. Es möge nun Γ_1 die Evolutenfläche von S_1 bezüglich der Curven $v =$ Const. sein. Die Normale in einem Punkte von Γ_1 ist dann dem entsprechenden Strahl des Guichard'schen Systems parallel; und da nun die Curven u, v auf Γ_1 conjugiert sind, so besitzt die Fläche Γ_1 die Eigenschaft, dass bei ihrer Gaussischen Abbildung auf die Kugel das Bild ihres conjugierten Systems u, v mit demjenigen der Haupttangentencurven einer pseudosphärischen Fläche zusammenfällt. Nun braucht man nur auf die Gleichungen (25), § 69, S. 135, zurückzugreifen, um zu sehen, dass, wenn mit $\begin{Bmatrix} r\,s \\ t \end{Bmatrix}_1$ die für die Fläche Γ_1 gebildeten Christoffel'schen Symbole bezeichnet werden,

$$\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}_1 = 0, \quad \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}_1 = 0$$

ist, d. h. dass die Curven u, v auf der Fläche Γ_1 geodätische Linien sind. Die Flächen dieser Art, auf denen es ein von geodätischen Linien gebildetes conjugiertes System giebt, sind zuerst von **Voss***) untersucht worden und sollen als **Voss'sche Flächen** bezeichnet werden. Also: **Jede Guichard'sche Fläche hat als einen Mantel der Evolutenfläche eine Voss'sche Fläche.**

Umgekehrt sieht man sofort: **Die Evolventenflächen einer Voss'schen Fläche bezüglich der einen oder der anderen Schar geodätischer, ein conjugiertes System bildender Linien sind Guichard'sche Flächen.**

Wir werden später auf die Eigenschaften der in diesem Paragraphen betrachteten Flächen und auf ihre Beziehungen zu den pseudosphärischen Flächen zurückkommen.

---

*) Sitzungsberichte der Münchener Akademie der Wissenschaften, März 1888.

Kapitel XI.

Unendlich kleine Verbiegungen der Flächen und Entsprechen durch Orthogonalität der Elemente.

Zusammenhang der Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegungen mit der Frage nach Paaren von Flächen, die sich durch Orthogonalität der Elemente entsprechen, sowie nach Paaren von auf einander abwickelbaren Flächen. — Grundlegende Gleichungen von Weingarten. — Die charakteristische Function φ und die charakteristische Gleichung. — Die bei einer unendlich kleinen Verbiegung associierten Flächen. — Zurückführung der charakteristischen Gleichung auf die beiden Normalformen: $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = M\vartheta$, $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = M\vartheta$. — Das conjugierte System, das bei einer unendlich kleinen Verbiegung conjugiert bleibt. — Eigenschaften der Flächen, die einander durch Orthogonalität der Elemente entsprechen. — Die Ribaucour'schen Strahlensysteme. — Kurze Angabe einer zweiten Methode, die Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegungen zu behandeln.

§ 153. Zusammenhang der Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegungen mit der Frage nach Paaren von Flächen, die sich durch Orthogonalität der Elemente entsprechen, sowie nach Paaren auf einander abwickelbarer Flächen.

In dem vorliegenden Kapitel wollen wir die Untersuchung der Deformationen biegsamer und nicht dehnbarer Flächen wieder aufnehmen und zwar die unendlich kleinen Verbiegungen derselben betrachten. Die vielfachen Beziehungen dieser Theorie zu der allgemeinen Flächentheorie, insbesondere zu der Theorie der Strahlensysteme, sowie andrerseits ihr enger Zusammenhang mit den partiellen Differentialgleichungen von der Laplace'schen Form verleihen diesen Untersuchungen ein ungemein hohes Interesse.

Wir entwickeln zunächst die Grundformeln unter Anlehnung an die Abhandlung von Weingarten im 100. Bande von Crelles Journal.

Für die Fläche S, deren unendlich kleine Verbiegungen wir untersuchen wollen, behalten wir unsere alten Bezeichnungen bei. Der Punkt P oder (x, y, z) von S erfahre bei der betreffenden unendlich

kleinen Verbiegung eine Verschiebung, deren Componenten nach den Coordinatenaxen die Grössen

$$\varepsilon\bar{x}, \quad \varepsilon\bar{y}, \quad \varepsilon\bar{z}$$

sein mögen, wo $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ bestimmte Functionen von u, v sind und ε eine unendlich kleine Constante ist, deren Potenzen von der zweiten an vernachlässigt werden können. Nach der Verbiegung ist der Punkt P in den Punkt P' gerückt, der die Coordinaten

$$x' = x + \varepsilon\bar{x}, \quad y' = y + \varepsilon\bar{y}, \quad z' = z + \varepsilon\bar{z}$$

hat, und da nach Voraussetzung

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

sein muss, so ergiebt sich:

$$(1) \qquad dx\,\overline{dx} + dy\,\overline{dy} + dz\,\overline{dz} = 0.$$

Dieser Gleichung hat Moutard die folgende einfache und wichtige geometrische Deutung gegeben:

Man betrachte $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ als Coordinaten eines Raumpunktes $\bar{P}$; während P die Fläche S beschreibt, beschreibt dann $\bar{P}$ eine Fläche $\bar{S}$, die Punkt für Punkt der Fläche S entspricht, und zwar ist zufolge der Gleichung (1) das Entsprechen ein derartiges, dass zwei entsprechende Linienelemente von S und $\bar{S}$ auf einander senkrecht stehen. Umgekehrt, ist $\bar{S}$ eine Fläche, die durch Orthogonalität der Elemente der Fläche S punktweise entspricht, so ergiebt sich daraus eine unendlich kleine Verbiegung der Fläche S.

Man kann also der Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegungen einer Fläche S folgende endliche Fassung geben: Die Flächen $\bar{S}$ zu bestimmen, die der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entsprechen *).

*) Es mag gleich hier bemerkt werden, dass jeder Fläche S stets eine Ebene $\bar{S}$ zugeordnet werden kann, die ihr durch Orthogonalität der Elemente entspricht. Hierzu braucht man nur die Punkte der Fläche S auf die Ebene orthogonal zu projicieren und das Bild in der Ebene um einen rechten Winkel um einen festen Mittelpunkt zu drehen. Wählen wir als diese Ebene die $\bar{x}\bar{y}$-Ebene und als Drehungsmittelpunkt den Coordinatenanfangspunkt, so haben wir:

$$\bar{x} = +y, \quad \bar{y} = -x, \quad \bar{z} = 0,$$

wodurch die Gleichung (1) in der That erfüllt wird. Der Punkt (x, y, z) ist nach der Verbiegung in den Punkt

$$x + \varepsilon y, \quad y - \varepsilon x, \quad z$$

gerückt, d. h. die unendlich kleine Verbiegung ist in diesem Falle bloss eine Drehung um die z-Axe. Wir fügen noch hinzu, dass, wie sich leicht nachweisen

Eine zweite endliche Fassung derselben Aufgabe ergiebt sich aus den folgenden Ueberlegungen: es werde

$$\xi = x + t\bar{x}, \quad \eta = y + t\bar{y}, \quad \zeta = z + t\bar{z}$$

gesetzt, wo t eine Constante ist. Werden ξ, η, ζ als Coordinaten eines beweglichen Punktes einer Fläche Σ aufgefasst, so erhalten wir für das Quadrat des Linienelements dieser Fläche nach (1):

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + t^2(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2),$$

d. h. einen Wert, der sich nicht ändert, wenn t durch $-t$ ersetzt wird. Betrachten wir also die Ortsfläche Σ' des Punktes

$$\xi' = x - t\bar{x}, \quad \eta' = y - t\bar{y}, \quad \zeta' = y - t\bar{z},$$

so sind Σ und Σ' auf einander abwickelbar, wobei sich die Punkte (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') entsprechen. Der Mittelpunkt der Strecke, die zwei entsprechende Punkte von Σ, Σ' verbindet, ist der Punkt P oder (x, y, z) von S, während die Richtung dieser Strecke die Richtung der Verschiebung angiebt, die P erfährt.

Umgekehrt seien Σ, Σ' zwei auf einander abwickelbare Flächen, und ξ, η, ζ; ξ', η', ζ' die Coordinaten zweier entsprechender Punkte. Setzt man dann:

$$x = \frac{\xi + \xi'}{2}, \quad y = \frac{\eta + \eta'}{2}, \quad z = \frac{\zeta + \zeta'}{2},$$

$$\bar{x} = \frac{\xi - \xi'}{2}, \quad \bar{y} = \frac{\eta - \eta'}{2}, \quad \bar{z} = \frac{\zeta - \zeta'}{2},$$

so ist:

$$dx\,d\bar{x} + dy\,d\bar{y} + dz\,d\bar{z} = 0.$$

Also: Sind zwei Flächen Σ, Σ' auf einander abwickelbar, so ist die Ortsfläche S des Mittelpunktes der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte einer unendlich kleinen Verbiegung fähig, bei der jeder Punkt von S in der Richtung dieser Verbindungslinie verschoben wird.

§ 154. Die charakteristische Function φ und die charakteristische Gleichung.

Wir kommen nun zu der analytischen Behandlung unserer Aufgabe, die in der Bestimmung dreier solcher unbekannter Functionen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ von u, v besteht, dass die Gleichung (1) oder die drei Gleichungen:

lässt, die angegebene Construction die allgemeinste ist, die einer Fläche S eine Ebene zuordnet, welche ihr durch Orthogonalität der Elemente entspricht.

(2) $$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}=0,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}=0,\quad \sum\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}=0$$

erfüllt werden.

Um dieses Gleichungensystem symmetrisch zu behandeln, führt Weingarten die Invariante des Differentialausdrucks

$$\sum \bar{x}\,dx=\left(\sum \bar{x}\frac{\partial x}{\partial u}\right)du+\left(\sum \bar{x}\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv$$

bezüglich der ersten Grundform der Fläche S,

$$ds^2=Edu^2+2Fdu\,dv+Gdv^2,$$

als Hilfsfunction φ ein, indem er nämlich

$$\varphi=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\sum \bar{x}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\sum \bar{x}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left(\sum\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\sum\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

setzt. Diese Function φ, die Weingarten die Verschiebungsfunction nennt, wollen wir als die charakteristische Function bezeichnen. Wie Volterra bemerkt hat*), besitzt sie eine einfache kinematische Bedeutung: sie giebt nämlich die nach der Normale genommene Componente der Drehung an, die ein Oberflächenelement von S bei der Verbiegung erfährt.

Die letzte der Gleichungen (2) lässt sich durch die beiden ersetzen:

(3) $$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}=\varphi\sqrt{EG-F^2},\quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}=-\varphi\sqrt{EG-F^2}.$$

Bilden wir mit Hilfe der ersten den Ausdruck

$$\frac{\partial(\varphi\sqrt{EG-F^2})}{\partial u},$$

indem wir berücksichtigen, dass infolge der ersten Gleichung (2)

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u\,\partial v}=-\sum\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}$$

ist, und indem wir unter Beachtung der früher (S. 92) gefundenen Gleichung:

$$\frac{\partial \log\sqrt{EG-F^2}}{\partial u}=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$$

die Fundamentalgleichungen (I), § 47, S. 89, benutzen, so finden wir:

(4) $$\frac{\partial\varphi}{\partial u}=\frac{D\sum X\frac{\partial x}{\partial v}-D'\sum X\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

*) Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili. Rendiconti della Reale Accad. dei Lincei, Sitzung vom 6. April 1884.

Bilden wir analog aus der zweiten Gleichung (3)

$$\frac{\partial(\varphi\sqrt{EG-F^2})}{\partial v},$$

so ergiebt sich:

$$(4^*)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v}=-\frac{D'\sum X\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}-D''\sum X\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Wird der kein Interesse bietende Fall, dass die Fläche S abwickelbar ist, ausgeschlossen, d. h.

$$DD''-D'^2 \neq 0$$

vorausgesetzt, so geben die Gleichungen (4) und (4*) nach

$$\sum X\frac{\partial\bar{x}}{\partial u},\quad \sum X\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}$$

aufgelöst:

$$(5)\qquad \sum X\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}=-\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{EG-F^2}},\qquad \sum X\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}=\frac{D''\frac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{EG-F^2}},$$

wo wie gewöhnlich K das Krümmungsmass der Fläche S bedeutet.

Nun brauchen die Gleichungen (2), (3) und (5) nur combiniert zu werden, damit sich durch Auflösung die folgenden ergeben:

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u}=\dfrac{D\left(\varphi\frac{\partial X}{\partial v}-X\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)-D'\left(\varphi\frac{\partial X}{\partial u}-X\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}{K\sqrt{EG-F^2}},\\[2ex] \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial v}=\dfrac{D'\left(\varphi\frac{\partial X}{\partial v}-X\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)-D''\left(\varphi\frac{\partial X}{\partial u}-X\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)}{K\sqrt{EG-F^2}}, \end{cases}$$

dazu analoge für $\bar{y}$ und $\bar{z}$. Hieraus erhellt, dass sich, sobald die charakteristische Function φ bekannt ist, die Fläche $\bar{S}$, die der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entspricht, mittels Quadraturen ergiebt.

Nun folgt aus den Gleichungen (5) weiter:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\frac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)=\sum\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}-\sum\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v},$$

und wenn rechts für $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ die Werte eingesetzt werden, die sich aus den Fundamentalgleichungen (II), § 47, S. 90, ergeben, so folgt:

Die charakteristische Function φ muss der folgenden partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die wir als die charakteristische Gleichung bezeichnen wollen, genügen:

$$(7)\quad \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\frac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{EG-F^2}}\right)\right]=$$
$$=\frac{2FD'-ED''-GD}{EG-F^2}\varphi.\,^{*)}$$

§ 155. Umformung der charakteristischen Gleichung.

Wir wollen nun beweisen, dass jedem Integral φ dieser Gleichung eine Lösung der Aufgabe entspricht. Hierzu bemerken wir, wie in der Anmerkung zu S. 287, dass, wenn

$$\bar{x}=+y,\quad \bar{y}=-x,\quad \bar{z}=0$$

gesetzt wird, die Grundgleichung (1) erfüllt ist. Der entsprechende Wert der charakteristischen Function φ ist

$$\varphi=X;$$

daher besitzt die Gleichung (7) die particulären Lösungen

$$X,\ Y,\ Z.$$

Hierauf lässt sich sofort nachweisen, dass, wenn φ eine Lösung der Gleichung (7) ist, die Gleichungen (6) den Integrabilitätsbedingungen genügen und mittels Quadraturen eine Fläche $\bar{S}$ ergeben, die der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entspricht.

Aus dem soeben Bemerkten folgt weiter, dass diejenigen unendlich kleinen Verbiegungen der Fläche S, die nur in einer Bewegung bestehen, den Lösungen

$$\varphi=aX+bY+cZ\quad (a,\ b,\ c=\text{Const.})$$

der charakteristischen Gleichung (7) entsprechen.

Wir bringen nun die Gleichung (7) auf eine für die Anwendungen sehr wichtige Form. Dieselbe ergiebt sich, wenn die Coefficienten

$$e,\ f,\ g,$$

die bei der sphärischen Abbildung von S auftreten, eingeführt werden. Wird die Gleichung (7) mit $\sqrt{EG-F^2}\,.\sqrt{eg-f^2}$ multipliciert und wird dabei berücksichtigt, dass nach S. 121

$$K\sqrt{EG-F^2}=\pm\sqrt{eg-f^2}$$

ist, so folgt:

---

*) Der Coefficient von φ, $\frac{2FD'-ED''-GD}{EG-F^2}$, giebt die mittlere Krümmung H von S an.

$$\sqrt{eg-f^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\frac{D'}{\sqrt{eg-f^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right]+(eD''+gD-2fD')\varphi=0.$$

Werden die Christoffel'schen Symbole $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}$ für das sphärische Bild mit Strichen versehen und die Gleichungen (6*), § 63, S. 124, berücksichtigt, so geht obige Gleichung über in:

$$D''\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}-\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial v}+e\varphi\right]-$$
$$-2D'\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial v}+f\varphi\right]+$$
$$+D\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}-\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}'\frac{\partial\varphi}{\partial v}+g\varphi\right]=0$$

oder nach S. 46, (22):

$$(7^*)\qquad D''[\varphi_{11}'+e\varphi]-2D'[\varphi_{12}'+f\varphi]+D[\varphi_{22}'+g\varphi]=0,$$

wo die Symbole φ_{11}', φ_{12}', φ_{22}' die covarianten zweiten Differentialquotienten der charakteristischen Function φ bezüglich des Linienelements der Kugel bedeuten. Wird die charakteristische Gleichung in dieser Form geschrieben, so ist gemäss den Gleichungen (4), § 63, S. 122, klar, dass, wie vorhin bemerkt, X, Y, Z particuläre Lösungen von ihr sind.

Wir bemerken nun, dass, wenn wir die Fläche S, wie in § 72, Kap. V, durch die Ebenencoordinaten

$$X,\ Y,\ Z,\ W$$

bestimmen, d. h. mit W den Abstand der Tangentialebene vom Coordinatenanfangspunkt bezeichnen, infolge der Gleichungen (35) des angeführten Paragraphen die charakteristische Gleichung (7*) wie folgt lautet:

$$(8)\qquad (W_{22}'+gW)(\varphi_{11}'+e\varphi)-2(W_{12}'+fW)(\varphi_{12}'+f\varphi)+$$
$$+(W_{11}'+eW)(\varphi_{22}''+g\varphi)=0.$$

Da sie in W und φ symmetrisch ist, so lehrt sie uns, dass, wenn mit S_0 die Enveloppe der Ebenen:

$$xX+yY+zZ=\varphi$$

bezeichnet wird, ebenso, wie φ die charakteristische Function für eine unendlich kleine Verbiegung der Fläche S ist, W die charakteristische Function für eine unendlich kleine Verbiegung von S_0 ist.

§ 156. Die bei einer unendlich kleinen Verbiegung associierten Flächen.

Um die charakteristische geometrische Beziehung zwischen zwei solchen Flächen S und S_0 zu erkennen, bemerken wir, dass, wenn wir dieselben einander Punkt für Punkt durch Parallelismus der Normalen entsprechen lassen, und wenn wir mit

$$\text{(a)} \qquad \begin{cases} D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2, \\ D_0 du^2 + 2D_0' du\, dv + D_0'' dv^2 \end{cases}$$

bezüglich die beiden zweiten Grundformen von S und S_0 bezeichnen und dabei berücksichtigen, dass

$$-D_0 = \varphi_{11}' + e\varphi, \quad -D_0' = \varphi_{12}' + f\varphi, \quad -D_0'' = \varphi_{22}' + g\varphi$$

ist, die Gleichung (8) in die folgende übergeht:

$$(8^*) \qquad D'' D_0 + D D_0'' - 2D' D_0' = 0.$$

Dieselbe besagt, dass die simultane Invariante dieser beiden Differentialformen gleich Null ist. Geometrisch ausgedrückt heisst dieses, dass den Haupttangentencurven auf der einen Fläche ein conjugiertes System auf der anderen entspricht, wie man auf Grund der Invarianteneigenschaft der Gleichung (8*) sofort daraus ersieht, dass, wenn $D = D'' = 0$ ist, $D_0' = 0$ folgt.

Wenn sich umgekehrt die beiden Flächen S und S_0 durch Parallelismus der Normalen in der Weise entsprechen, dass den Haupttangentencurven auf der einen ein conjugiertes System auf der anderen entspricht, so ist infolge der Gleichung (8) oder der äquivalenten (7*) sofort klar, dass der Abstand eines festen Raumpunkts von der Tangentialebene der einen die charakteristische Function für eine unendlich kleine Verbiegung der anderen ist. Wir sagen dann, dass die Flächen S, S_0 ein Paar associierte Flächen sind.

Wir sehen nun, dass, wenn von zwei associierten Flächen die eine ein positives Krümmungsmass besitzt, die andere sicherlich ein negatives hat, wie aus der Gleichung (8) hervorgeht, denn wird darin z. B. $D' = 0$ angenommen und D, D'' dasselbe Vorzeichen beigelegt, so folgt daraus, dass D_0 und D_0'' entgegengesetzte Vorzeichen haben. Dagegen kann einer Fläche mit negativem Krümmungsmass sowohl eine solche mit negativem wie mit positivem Krümmungsmass associiert sein. Eine der beiden associierten Flächen S, S_0 wenigstens besitzt demnach reelle Haupttangentencurven, nehmen wir z. B. an, die Fläche S_0. Wir wählen dann als Parameterlinien u, v auf S_0 die Haupttangentencurven, denen auf S ein conjugiertes System entspricht. Aus

den Formeln für die sphärische Abbildung, Kap. V, insbesondere den Gleichungen (13) und (22), S. 126 und 134, erkennt man sofort, dass die Beziehungen zwischen den Coordinaten x, y, z; x_0, y_0, z_0 zweier entsprechender Punkte auf S und S_0 wie folgt lauten:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = l\dfrac{\partial x_0}{\partial v}, & \dfrac{\partial y}{\partial u} = l\dfrac{\partial y_0}{\partial v}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial u} = l\dfrac{\partial z_0}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = m\dfrac{\partial x_0}{\partial u}, & \dfrac{\partial y}{\partial v} = m\dfrac{\partial y_0}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v} = m\dfrac{\partial z_0}{\partial u}, \end{cases}$$

wo l, m passende Functionen von u, v sind.

Wir betrachten ferner dasjenige conjugierte System (α, β) auf S, dem auf S_0 ebenfalls ein conjugiertes entspricht, indem wir nämlich als Veränderliche α, β diejenigen einführen, durch die sich die beiden simultanen Formen (a) als Summen von Quadraten darstellen lassen. Dieses System ist sicher stets reell, wenn eine der beiden Flächen elliptische Punkte hat, d. h. wenn eine der beiden Formen (a) definit ist. In diesen Veränderlichen α, β gelten nach § 69 die Gleichungen:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_0}{\partial \alpha} = r\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}, & \dfrac{\partial y_0}{\partial \alpha} = r\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \dfrac{\partial z_0}{\partial \alpha} = r\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{\partial x_0}{\partial \beta} = -r\dfrac{\partial x}{\partial \beta}, & \dfrac{\partial y_0}{\partial \beta} = -r\dfrac{\partial y}{\partial \beta}, \quad \dfrac{\partial z_0}{\partial \beta} = -r\dfrac{\partial z}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Hierin ist r eine Function von α, β, die durch die Gleichungen:

$$(11)\qquad \frac{\partial \log r}{\partial \alpha} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \log r}{\partial \beta} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}$$

bestimmt ist, wo die Symbole rechts für das Linienelement von S in den Parametern α, β berechnet sind.

Wir sehen demnach, dass die an den Curven α, β auf S und S_0 in zwei entsprechenden Punkten gezogenen Tangenten einander parallel sind und dass die Laplace'sche Gleichung für die beiden conjugierten Systeme (α, β) auf S und S_0 gleiche Invarianten besitzt.

Die Gleichungen (10) können auch in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{x_0 - rx}{1 - r}\right) = \lambda(x_0 - x), \quad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{y_0 - ry}{1 - r}\right) = \lambda(y_0 - y),$$
$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{z_0 - rz}{1 - r}\right) = \lambda(z_0 - z),$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{x_0 + rx}{1 + r}\right) = \mu(x_0 - x), \quad \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{y_0 + ry}{1 + r}\right) = \mu(y_0 - y),$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{z_0 + rz}{1 + r}\right) = \mu(z_0 - z),$$

wo λ und μ Proportionalitätsfactoren sind. Sie lehren uns, dass, wenn wir das von den Verbindungslinien entsprechender Punkte P, P_0 zweier

associierter Flächen gebildete Strahlensystem betrachten, die abwickelbaren Flächen desselben die Flächen $\alpha =$ Const. und $\beta =$ Const. sind und dass die Brennpunkte F_1, F_2, deren Coordinaten

$$\frac{x_0 - rx}{1 - r}, \quad \frac{y_0 - ry}{1 - r}, \quad \frac{z_0 - rz}{1 - r};$$

bez.

$$\frac{x_0 + rx}{1 + r}, \quad \frac{y_0 + ry}{1 + r}, \quad \frac{z_0 + rz}{1 + r}$$

sind, die Strecke PP_0 harmonisch teilen. Also: Die abwickelbaren Flächen des von den Verbindungslinien entsprechender Punkte P, P_0 zweier associierter Flächen S, S_0 gebildeten Strahlensystems schneiden jede dieser Flächen in einem conjugierten System mit gleichen Invarianten; auf jedem Strahl teilen die Brennpunkte die Strecke PP_0 harmonisch.

§ 157. Zurückführung der charakteristischen Gleichung auf ihre beiden Normalformen.

Wir kehren nun im Falle einer gegebenen Fläche S zu der charakteristischen Gleichung (7*) für die unendlich kleinen Verbiegungen zurück und wollen dieselbe durch zweckmässige Wahl der Parameterlinien u, v in eine Form bringen, die wir als die Normalform bezeichnen.

1. Wir setzen zunächst voraus, dass die Fläche S entgegengesetzt gerichtete Hauptkrümmungsradien besitze, und wählen als Parameterlinien die Haupttangentencurven u, v. Da dann $D = 0$, $D'' = 0$ ist, so lautet die Gleichung (7*):

$$\varphi_{12}' + f\varphi = 0,$$

oder, wenn wir mit Hilfe der Gleichungen in § 64, S. 125, entwickeln:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \varrho}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \varrho}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + f\varphi = 0. \tag{12}$$

Ist φ eine Lösung der Gleichung, so lauten die allgemeinen Gleichungen (6), welche die der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entsprechende Fläche $\bar{S}$ bestimmen:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \quad \varrho\left(X\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} - \varphi\dfrac{\partial X}{\partial u}\right), \\ \dfrac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\varrho\left(X\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} - \varphi\dfrac{\partial X}{\partial v}\right). \end{cases} \tag{13}$$

Nun wenden wir die Transformation an, deren wir uns in § 68, S. 132, zur Ableitung der Lelieuvre'schen Formeln bedient haben, d. h. wir ersetzen die unbekannte Function φ durch

$$\varphi\sqrt{\varrho} = \vartheta.$$

Die Gleichung (12) geht dann über in:

$$(14)\qquad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v}=M\vartheta,\quad M=\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\frac{\partial^2\sqrt{\varrho}}{\partial u\,\partial v}-f,$$

und die Gleichungen (13) lauten dementsprechend:

$$(15)\qquad \frac{\partial\bar{x}}{\partial u}=\begin{vmatrix}\xi & \vartheta\\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\vartheta}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial\bar{x}}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\xi & \vartheta\\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\vartheta}{\partial v}\end{vmatrix},$$

analog in y und z, und zwar ergeben sich diese letzteren, wenn ξ der Reihe nach durch η und ζ ersetzt wird. Erinnern wir uns nun daran, dass ξ, η, ζ selbst in den Lelieuvre'schen Formeln (18), S. 132, drei particuläre Lösungen der Gleichung (14) sind. Jede andere von ξ, η, ζ linear unabhängige Lösung ϑ giebt eine wirkliche unendlich kleine Verbiegung der Fläche, während sich entgegengesetzten Falls, wenn sich ϑ linear aus ξ, η, ζ zusammensetzt, nur eine Bewegung ergiebt.

2. Es sei nun S eine Fläche mit positivem Krümmungsmass. Wie in § 70 führen wir als Parametersystem (u, v) ein isotherm-conjugiertes System ein. Die charakteristische Gleichung wird dann:

$$\varphi_{11}'+\varphi_{22}'+(e+g)\varphi=0,$$

d. h. (§ 71, S. 138):

$$(16)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}+\frac{\partial\log\varrho}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\log\varrho}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+(e+g)\varphi=0,$$

und aus den Gleichungen (6) ergiebt sich:

$$(17)\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u}=\varrho\left(\varphi\dfrac{\partial X}{\partial v}-X\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right),\\[2mm] \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial v}=-\varrho\left(\varphi\dfrac{\partial X}{\partial u}-X\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\right).\end{cases}$$

Durch die Transformation:

$$\varphi\sqrt{\varrho}=\vartheta$$

geht die charakteristische Gleichung (16) über in:

$$(18)\qquad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2}=M\vartheta,\quad M=\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\left(\frac{\partial^2\sqrt{\varrho}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\sqrt{\varrho}}{\partial v^2}\right)-(e+g),$$

und als die Gleichungen, welche die Fläche $\bar{S}$ bestimmen, ergeben sich:

$$(19)\qquad \frac{\partial\bar{x}}{\partial u}=\begin{vmatrix}\vartheta & \xi\\ \frac{\partial\vartheta}{\partial v} & \frac{\partial\xi}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial\bar{x}}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\vartheta & \xi\\ \frac{\partial\vartheta}{\partial u} & \frac{\partial\xi}{\partial u}\end{vmatrix}$$

nebst analogen, in denen $\bar{x}, \xi$ bezüglich durch $\bar{y}, \eta$; $\bar{z}, \zeta$ ersetzt sind.

Wir können also dieses Ergebnis folgendermassen aussprechen:

Die Gleichung, von der die Aufgabe der Bestimmung der

unendlich kleinen Verbiegungen einer Fläche S abhängt, lässt sich auf die Normalform:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = M\vartheta \text{ bezw. } \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = M\vartheta$$

bringen, je nachdem die Fläche S ein negatives oder ein positives Krümmungsmass besitzt.

So können wir z. B. für alle Flächen, die den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = 0$$

entsprechen, die Aufgabe, ihre unendlich kleinen Verbiegungen zu bestimmen, vollständig lösen, insbesondere für die geraden Conoide (§ 68) und für das Rotationsparaboloid (§ 71).

§ 158. Das conjugierte System, das bei einer unendlich kleinen Verbiegung conjugiert bleibt.

Wir betrachten zwei associierte Flächen S, S_0 und wählen als Parameterlinien auf S_0 die als reell vorausgesetzten Haupttangentencurven u, v; die ihnen entsprechenden Curven auf S bilden ein conjugiertes System. Die charakteristische Function φ für die entsprechende unendlich kleine Verbiegung der Fläche S genügt (da $D = 0$, $D'' = 0$ ist) den beiden Gleichungen (§ 156, S. 293):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \varphi}{\partial v} - e\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{\partial \varphi}{\partial v} - g\varphi.$$

Nun sei $\bar{S}$ die bei derselben unendlich kleinen Verbiegung der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entsprechende Fläche. Dann erhalten wir infolge der Gleichungen (6) die Beziehungen:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{D}{\sqrt{eg - f^2}} \left(\varphi \frac{\partial X}{\partial v} - X \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{D''}{\sqrt{eg - f^2}} \left(X \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \varphi \frac{\partial X}{\partial u} \right).$$

Bilden wir

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v}$$

unter Berücksichtigung der Gleichungen (6*), § 63, S. 124:

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{D}{\sqrt{eg - f^2}} \right) = - \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{D}{\sqrt{eg - f^2}} - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}' \frac{D''}{\sqrt{eg - f^2}},$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{D''}{\sqrt{eg - f^2}} \right) = - \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{D}{\sqrt{eg - f^2}} - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix}' \frac{D''}{\sqrt{eg - f^2}},$$

so ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} = -\left\{ {11 \atop 2} \right\}' \frac{D''}{D} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} - \left\{ {22 \atop 1} \right\}' \frac{D}{D''} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}.$$

Aber nach den Gleichungen (25), § 69, S. 135:

$$\left\{ {12 \atop 1} \right\} = -\left\{ {11 \atop 2} \right\}' \frac{D''}{D}, \quad \left\{ {12 \atop 2} \right\} = -\left\{ {22 \atop 1} \right\}' \frac{D}{D''}$$

kann diese Gleichung wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} = \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v}.$$

Daraus ergiebt sich, dass auch auf $\bar{S}$ das System (u, v) conjugiert ist, und ferner, dass die Laplace'sche Gleichung auf $\bar{S}$ dieselbe ist wie auf S. Des weiteren sehen wir, dass derselben Laplace'schen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \quad .$$

wegen der Identität (S. 289):

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0$$

auch der Ausdruck

$$x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}$$

genügt. Wenn wir nun zu der auf S. 288 gegebenen zweiten endlichen Fassung der Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegungen zurückkehren und die beiden auf einander abwickelbaren Flächen Σ, Σ' betrachten, welche die Ortsflächen der Punkte:

$$\left. \begin{array}{lll} \xi = x + t\bar{x}, & \eta = y + t\bar{y}, & \zeta = z + t\bar{z} \\ \text{bezgl.} \\ \xi' = x - t\bar{x}, & \eta' = y - t\bar{y}, & \zeta' = z - t\bar{z} \end{array} \right\} (t = \text{Const.})$$

sind, so sehen wir, dass auch auf Σ und Σ' das System (u, v) conjugiert ist und dass die Laplace'sche Gleichung immer dieselbe bleibt. Von dieser ist ausser $\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta'$ auch der Ausdruck

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) - (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = 4t(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z})$$

eine Lösung*).

*) Vgl. Koenigs, Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, Bd. CXVI, S. 569 (1893). Der Satz von Koenigs ergiebt sich übrigens sofort daraus, dass auf den zwei auf das gemeinsame conjugierte System bezogenen und auf einander abwickelbaren Flächen die Laplace'sche Gleichung dieselbe ist. Wenn

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad \varrho' = \tfrac{1}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2)$$

gesetzt wird, so folgt (§ 60, S. 116):

$$\varrho_{12} = F, \quad \varrho_{12}' = F.$$

Hieraus könnten wir umgekehrt die Ergebnisse des Textes folgern.

Insbesondere gilt dieses für einen unendlich kleinen Wert ε von t, woraus sich der Satz ergiebt:

Das conjugierte System auf einer Fläche S, das den Haupttangentencurven der einer Fläche S bei einer unendlich kleinen Verbiegung associierten Fläche S_0 entspricht, bleibt bei dieser Verbiegung conjugiert. Auf der Fläche $\bar{S}$, die der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entspricht, entspricht diesem System wieder das homologe conjugierte System.

Betrachten wir umgekehrt bei einer unendlich kleinen Verbiegung einer Fläche S dasjenige conjugierte System, welches bei der Verbiegung conjugiert bleibt*). Ihm entspricht auf der associierten Fläche S_0 das System der Haupttangentencurven. Wir können also das Ergebnis so aussprechen:

Damit ein conjugiertes System auf S bei einer unendlich kleinen Verbiegung von S conjugiert bleibe, ist es notwendig und hinreichend, dass sein Gaussisches sphärisches Bild auch dasjenige der Haupttangentencurven einer Fläche S_0 ist. Die Flächen S, S_0 sind dann bei dieser Verbiegung associiert.

Ist insbesondere das conjugierte System das der Krümmungslinien, so geht die soeben aufgestellte Bedingung in die über, dass das sphärische Bild der Krümmungslinien ein Isothermensystem sein muss. Die associierte Fläche S_0 ist dann eine Minimalfläche**).

§ 159. Eigenschaften von Flächen, die einander durch Orthogonalität der Elemente entsprechen.

Wir wollen nun einige Eigenschaften von Paaren einander durch Orthogonalität der Elemente entsprechender Flächen S, $\bar{S}$ entwickeln.

---

*) In jedem Falle, ausser in demjenigen einer blossen Bewegung (bei der offenbar jedes conjugierte System conjugiert bleibt), ist dieses System eindeutig bestimmt und sicher reell, wenn die Fläche, die verbogen wird, ein positives Krümmungsmass hat. Bezeichnen wir nämlich mit δD, $\delta D'$, $\delta D''$ die Variationen von D, D', D'' bei der Verbiegung, indem wir das gemeinsame conjugierte System als nicht eindeutig bestimmt voraussetzen, so muss die Proportion:

$$\delta D : \delta D' : \delta D'' = D : D' : D''$$

bestehen, und da ferner

$$\delta(DD'' - D'^2) = D\delta D'' + D''\delta D - 2D'\delta D' = 0$$

ist, während $DD'' - D'^2$ nicht gleich Null ist, so folgt daraus:

$$\delta D = \delta D' = \delta D'' = 0.$$

**) S. Weingarten, Sitzungsber. der Königl. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 28. Jan. 1886.

Wir setzen zunächst voraus, dass die Fläche S ein positives Krümmungsmass besitze, und wählen wie in § 157 als Parameterlinien u, v auf S ein isotherm-conjugiertes System. Die Gleichungen (19) können nun so geschrieben werden:

$$\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right), \quad \frac{1}{\vartheta}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right).$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right) = 0$$

oder:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} = 2\frac{\partial \log \vartheta}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + 2\frac{\partial \log \vartheta}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}$$

nebst analogen Gleichungen in $\bar{y}$ und $\bar{z}$. Bezeichnen wir andrerseits mit $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}$ die Christoffel'schen Symbole für die Fläche S und analog mit $D, \bar{D}', D''$; $X, Y, \bar{Z}$ die Coefficienten der zweiten Grundform und die Richtungscosinus der Normale von $\bar{S}$, so haben wir infolge der Grundgleichungen (I), § 47, S. 89:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v^2} = \left(\overline{\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}} + \overline{\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}}\right)\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \left(\overline{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}} + \overline{\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}}\right)\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + (\bar{D} + \bar{D}'')\bar{X},$$

dazu analoge Gleichungen in $\bar{y}$ und $\bar{z}$. Durch Vergleich dieser mit der obigen Gleichung ergiebt sich:

$$\overline{\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}} + \overline{\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}} = \frac{\partial \log \vartheta^2}{\partial u}, \quad \overline{\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}} + \overline{\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}} = \frac{\partial \log \vartheta^2}{\partial v},$$

$$\bar{D} + \bar{D}'' = 0.$$

Die letzte dieser Gleichungen sagt uns, dass $\bar{D}$ und $\bar{D}''$ einander gleich, aber dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind, woraus folgt: **Einer Fläche S mit positivem Krümmungsmass entsprechen durch Orthogonalität der Elemente nur Flächen $\bar{S}$ mit negativem Krümmungsmass*)**.

Wie im Falle von Paaren associierter Flächen (§ 156), so ist auch hier leicht einzusehen, dass einer Fläche S mit negativem Krümmungsmass durch Orthogonalität der Elemente Flächen sowohl mit positivem wie mit negativem Krümmungsmass entsprechen.

Zweitens setzen wir voraus, dass die Fläche S ein negatives Krümmungsmass besitze, und wählen die Haupttangentencurven als Parameterlinien u, v. Die Gleichungen (15), § 157, S. 296, können dann folgendermassen geschrieben werden:

*) Die Fläche $\bar{S}$ kann nur dann die Krümmung Null besitzen, wenn $\bar{D} = 0$, $\bar{D}' = 0$, $\bar{D}'' = 0$ ist, und geht dann in eine Ebene über (vgl. § 153).

$$\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right), \quad \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right).$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right) = 0$$

oder:

$$\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \vartheta}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} + \frac{\partial \log \vartheta}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}.$$

Also: **Den Haupttangentencurven einer Fläche S mit negativem Krümmungsmass entspricht auf jeder Fläche $\bar{S}$, die S durch Orthogonalität der Elemente entspricht, ein conjugiertes System mit denselben Invarianten.**

Umgekehrt setzen wir nun voraus, dass es auf einer Fläche S ein conjugiertes System mit denselben Invarianten gebe, für das also

$$\overline{\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}} = \frac{\partial \log \vartheta}{\partial v}, \quad \overline{\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}} = \frac{\partial \log \vartheta}{\partial u}$$

ist, wo ϑ eine passend gewählte Function von u, v ist.

Werden ξ, η, ζ mittels Quadraturen aus den Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right) = -\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\xi}{\vartheta}\right) = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\eta}{\vartheta}\right) = -\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{y}}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\eta}{\vartheta}\right) = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{y}}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\zeta}{\vartheta}\right) = -\frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{z}}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\zeta}{\vartheta}\right) = \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \bar{z}}{\partial v},$$

so sind diese Grössen Lösungen der nachstehenden Gleichung für Θ:

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta}{\partial u \partial v} + \frac{1}{\vartheta^2}\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)\Theta.$$

Folglich (§ 68, S. 133) bestimmen die Lelieuvre'schen Formeln:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.}$$

eine Fläche S, auf der die Curven u, v die Haupttangentencurven sind und die durch Orthogonalität der Elemente der Fläche $\bar{S}$ entspricht. **Wir sehen also, dass die Frage nach den unendlich kleinen Verbiegungen einer Fläche S gleichbedeutend ist mit der Bestimmung der conjugierten Systeme mit gleichen Invarianten auf $\bar{S}$.**

§ 160. Die Ribaucour'schen Strahlensysteme.

Ribaucour hat zuerst eine wichtige Klasse von Strahlensystemen betrachtet, zu denen wir in der folgenden Weise gelangen:

Es seien S, $\bar{S}$ zwei Flächen, die einander durch Orthogonalität der Elemente entsprechen. Ziehen wir durch die Punkte der einen von ihnen, sagen wir $\bar{S}$, Strahlen parallel den Normalen in den entsprechenden Punkten von S, so erhalten wir ein Strahlensystem der erwähnten Art.

Diese Strahlensysteme bezeichnen wir als **Ribaucour'sche Strahlensysteme** und die Fläche S, deren Normalen den Strahlen parallel sind, als **erzeugende Fläche**.

Wir wenden nun die allgemeinen Gleichungen des Kap. X auf die in Rede stehenden Ribaucour'schen Systeme an. Berücksichtigen wir zu diesem Zwecke die Gleichungen (6), § 154, S. 290:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{\left(D \frac{\partial X}{\partial v} - D' \frac{\partial X}{\partial u}\right) \varphi + \left(D' \frac{\partial \varphi}{\partial u} - D \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) X}{\sqrt{eg - f^2}},$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{\left(D' \frac{\partial X}{\partial v} - D'' \frac{\partial X}{\partial u}\right) \varphi + \left(D'' \frac{\partial \varphi}{\partial v} - D' \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) X}{\sqrt{eg - f^2}},$$

und setzen wir in den Kummer'schen Bezeichnungen (Kap. X, S. 257):

$$\bar{e} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \bar{f} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u}, \quad \bar{f}' = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v}, \quad \bar{g} = \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial v},$$

so finden wir:

$$\bar{e} = \frac{fD - eD'}{\sqrt{eg - f^2}} \varphi, \quad \bar{f} = \frac{fD' - eD''}{\sqrt{eg - f^2}} \varphi, \quad \bar{f}' = \frac{gD - fD'}{\sqrt{eg - f^2}} \varphi,$$

$$\bar{g} = \frac{gD' - fD''}{\sqrt{eg - f^2}} \varphi.$$

Die Gleichungen (B), S. 263, und (D), S. 265, die bezüglich die Abscissen der Grenz- und Brennpunkte bestimmen, lauten hier*):

$$(20) \qquad \begin{cases} r^2 = \dfrac{(r_1 - r_2)^2}{4} \varphi^2, \\ \varrho^2 = - r_1 r_2 \varphi^2, \end{cases}$$

*) Beim Einsetzen in die angeführten Gleichungen (B), (D) müssen die in denselben mit E, F, G; e, f, f', g bezeichneten Grössen bezüglich durch e, f, g; $\bar{e}$, $\bar{f}$, $\bar{f}'$, $\bar{g}$ ersetzt werden.

wenn mit r_1, r_2 die Hauptkrümmungsradien der erzeugenden Fläche S bezeichnet werden *).

Die Gleichung (C), § 141, S. 264, welche die abwickelbaren Flächen des Strahlensystems bestimmt, wird hier:

$$(21)\qquad D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2 = 0.$$

Wir haben also das Ergebnis:

Bei jedem Ribaucour'schen Strahlensystem ist die Ausgangsfläche $\bar{S}$, welche durch Orthogonalität der Elemente der erzeugenden Fläche S entspricht, die Mittelfläche des Strahlensystems. Die abwickelbaren Flächen des Strahlensystems entsprechen den Haupttangentencurven der erzeugenden Fläche S und schneiden folglich (§ 159) die Mittelfläche $\bar{S}$ in einem conjugierten System mit gleichen Invarianten.

§ 161. Sätze über Ribaucour'sche Strahlensysteme.

Die eben erwähnte Eigenschaft der Ribaucour'schen Strahlensysteme, dass nämlich ihre abwickelbaren Flächen die Mittelfläche in einem conjugierten System schneiden, ist für diese Strahlensysteme charakteristisch, denn es besteht der Satz:

Jedes Strahlensystem, dessen abwickelbare Flächen die Mittelfläche in einem conjugierten System schneiden, ist ein Ribaucour'sches Strahlensystem.

Zum Beweise stellen wir die folgenden von Guichard herrührenden Betrachtungen an: Wir gehen zu den Gleichungen (27), § 148, S. 275, zurück, aus denen sich die Coordinaten x, y, z des Mittelpunkts ergeben:

$$(22)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + 2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\right]X - \varrho\dfrac{\partial X}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\right]X + \varrho\dfrac{\partial X}{\partial v}, \end{cases}$$

worin ϱ eine Lösung der Gleichung (28), S. 276:

$$(23)\quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\,\partial v} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \varrho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} + f\right]\varrho = 0$$

---

*) Um die Richtigkeit der Gleichungen des Textes nachzuweisen, berücksichtige man die folgenden (S. 124, (8)):

$$r_1 + r_2 = \frac{2fD' - eD' - gD}{eg - f^2}, \quad r_1 r_2 = \frac{DD'' - D'^2}{eg - f^2}.$$

bedeutet. Wir bringen nun die Eigenschaft zum Ausdruck, dass auf der Mittelfläche S die Spuren u, v der abwickelbaren Flächen des Strahlensystems ein conjugiertes System bilden. Hierzu ist notwendig und hinreichend, dass es zwei solche Functionen P, Q von u, v gebe, dass x, y, z Lösungen derselben Laplace'schen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + Q \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \tag{24}$$

sind. Bilden wir nun wirklich $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ aus einer der Gleichungen (22), wobei wir (23) und die Gleichung (S. 122, (4)):

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial X}{\partial v} - fX$$

berücksichtigen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = -\left[\frac{\partial \varrho}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \varrho\right] \frac{\partial X}{\partial u} + \left[\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \varrho\right] \frac{\partial X}{\partial v} +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\right) \varrho + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial u}\right] X;$$

analoge Gleichungen bestehen für y und z. Die Functionen P und Q sind also durch die Gleichungen:

$$P = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial v}, \quad Q = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial u} \tag{25}$$

bestimmt und müssen noch der weiteren Bedingung:

$$P\left[\frac{\partial \varrho}{\partial u} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \varrho\right] - Q\left[\frac{\partial \varrho}{\partial v} + 2 \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \varrho\right] =$$
$$= \left[\frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\right] \varrho + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial v} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial u}$$

genügen, die sich für die Werte (25) von P und Q auf

$$\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \tag{26}$$

reduciert. Diese Gleichung besagt, dass die sphärischen Bilder der Developpabeln des Strahlensystems auch die Bilder der Haupttangentencurven einer Fläche sind (§ 64, S. 125). Auf diese Weise ist eben Guichard zu dem Satz gelangt:

Damit die Developpabeln eines Strahlensystems die Mittelfläche S in einem conjugierten System schneiden, ist es notwendig und hinreichend, dass ihre sphärischen Bilder auch die Bilder der Haupttangentencurven einer Fläche $\bar{S}$ sind.

Nun ist ferner leicht einzusehen, dass diese Fläche $\bar{S}$ durch Orthogonalität der Elemente der Mittelfläche S des Strahlensystems ent-

spricht, das demnach ein Ribaucour'sches ist. Bezeichnen wir nämlich mit

$$K = -\frac{1}{R^2}$$

das Krümmungsmass von $\bar{S}$, so gelten die Gleichungen (§ 64, S. 125, (10)):

$$\frac{\partial \log R}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \log R}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix},$$

und für die Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ eines Punktes von $\bar{S}$ ist (S. 126, (13)):

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \frac{R}{\sqrt{eg-f^2}}\left(f\frac{\partial X}{\partial u} - e\frac{\partial X}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \frac{R}{\sqrt{eg-f^2}}\left(f\frac{\partial X}{\partial v} - g\frac{\partial X}{\partial u}\right) \text{ u. s. w.}$$

Diese Gleichungen geben, mit den Gleichungen (22) combiniert:

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0, \quad \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = 0, \quad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = 0$$

und beweisen dadurch eben, dass S und $\bar{S}$ einander durch Orthogonalität der Elemente entsprechen*).

§ 162. Besondere Klassen von Ribaucour'schen Strahlensystemen.

Wir wollen nun einige besondere Klassen von Ribaucour'schen Strahlensystemen betrachten.

Es gehören hierher die isotropen Congruenzen (§ 139, S. 261). Man sieht nämlich sofort ein, dass die isotropen Congruenzen diejenigen speciellen Ribaucour'schen Congruenzen sind, deren erzeugende Fläche eine Kugel ist.

Ihre analytische Darstellung ergiebt sich am einfachsten, wenn man berücksichtigt, dass die Haupttangentencurven der Mittelfläche einer isotropen Congruenz reell sind (§ 159) und einem conjugierten System mit gleichen Invarianten, d. h. einem Isothermensystem auf der Kugel entsprechen. Gehen wir umgekehrt von einem beliebigen Isothermensystem auf der Kugel aus, so finden wir aus den Gleichungen zum Schlusse des § 159, S. 301, mittels Quadraturen die allgemeinste isotrope Congruenz oder, was auf dasselbe hinauskommt, die allgemeinste unendlich kleine Verbiegung der Kugel.

*) Wir sehen, dass die am Schlusse des vorigen Paragraphen angeführte Eigenschaft, dass das conjugierte System (u, v) auf der Mittelfläche eines Ribaucour'schen Strahlensystems gleiche Invarianten besitzt, auch sofort aus der Gleichung (25) folgt, da $\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial u}$ ist.

Die Guichard'schen Strahlensysteme (§ 152, S. 284), deren abwickelbare Flächen dieselben sphärischen Bilder wie die Haupttangentencurven einer pseudosphärischen Fläche haben, können nun offenbar als Ribaucour'sche Strahlensysteme mit pseudosphärischer Erzeugungsfläche definiert werden.

Wir wollen nun untersuchen, ob es Ribaucour'sche Normalensysteme giebt. Die sphärischen Bilder ihrer abwickelbaren Flächen bilden in diesem Falle ein Orthogonalsystem, und da dasselbe auch das Bild der Haupttangentencurven der erzeugenden Fläche sein muss, so ist folglich diese eine Minimalfläche. Die Bilder der Krümmungslinien der zu den Congruenzstrahlen normalen Flächen bilden ein Isothermensystem. Umgekehrt bilden die Normalen einer Fläche, bei der die Bilder der Krümmungslinien ein Isothermensystem sind, ein Ribaucour'sches Strahlensystem.

Endlich bemerken wir, dass es unter denjenigen Ribaucour'schen Strahlensystemen, die eine gegebene Fläche S zur Erzeugenden haben, unendlich viele giebt, deren Mittelfläche eine Ebene ist.

Um sie alle zu erhalten, brauchen wir nur wie folgt zu verfahren (§ 153, S. 287, Anmerkung): Wir projicieren alle Punkte von S orthogonal auf eine Ebene π, drehen das ebene Bild der Fläche um einen rechten Winkel um einen festen Punkt der Ebene und ziehen durch die Punkte des neuen Bildes Parallele zu den Normalen von S. Ist insbesondere die Fläche S eine Minimalfläche, so ist das auf diese Weise erhaltene Strahlensystem nach dem soeben Gesagten ein Normalensystem; die zu den Strahlen normalen Flächen sind in diesem Falle die Bonnet'schen Flächen, bei denen die zwischen den beiden Krümmungsmittelpunkten in der Mitte gelegenen Punkte in einer Ebene liegen.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass bei einer orthogonalen Projection der Haupttangentencurven einer beliebigen Fläche auf eine Ebene ein ebenes System mit gleichen Invarianten entsteht und dass umgekehrt jedes derartige ebene System die Orthogonalprojection der Haupttangentencurven einer gewissen Fläche ist*).

*) Koenigs, Comptes Rend. de l'Acad. d. Sciences, Bd. CXIV, S. 55. Der von Koenigs gegebene Satz ist insofern allgemeiner, als er sich auf eine beliebige Centralprojection der Haupttangentencurven bezieht. Derselbe folgt sofort aus dem im Texte betrachteten Specialfall, wenn man berücksichtigt, dass bei projectiven Transformationen die Haupttangentencurven und die conjugierten Systeme mit gleichen Invarianten in ebensolche Curven bezw. Systeme übergehen.

§ 163. **Kurze Angabe einer zweiten Methode, die Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegungen zu behandeln.**

Wir schliessen dieses erste Kapitel über die unendlich kleinen Verbiegungen mit der kurzen Entwicklung einer zweiten Methode, diese Aufgabe zu behandeln, welche sich unmittelbar aus den allgemeinen Sätzen in Kap. IV ergiebt. Die Fläche S, deren unendlich kleine Verbiegungen wir bestimmen wollen, denken wir uns durch die beiden Grundformen (§ 48, Kap. IV)

$$Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2,$$

$$Ddu^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2$$

definiert. Bei jeder unendlich kleinen Verbiegung von S bleibt die erste Form ungeändert; die Coefficienten der zweiten erfahren unendlich kleine Aenderungen, die wir mit

$$\delta D = \varepsilon d, \quad \delta D' = \varepsilon d', \quad \delta D'' = \varepsilon d''$$

bezeichnen wollen, wo ε eine unendlich kleine Constante ist und d, d', d'' drei näher zu bestimmende Functionen von u und v sind. Sobald d, d', d'' bekannt sind, erfordert die Bestimmung der entsprechenden unendlich kleinen Verbiegung nur noch Quadraturen. Nun ergeben sich die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen die Unbekannten d, d', d'' genügen müssen, unmittelbar durch Variation der Gaussischen Gleichung (III) und der Codazzi'schen Gleichungen (IV) (§ 48, S. 91). Sie lauten:

$$(27) \qquad D''d - 2D'd' + Dd'' = 0,$$

$$(28) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial d}{\partial v} - \dfrac{\partial d'}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} d + \left[\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}\right] d' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} d'' = 0, \\ \dfrac{\partial d''}{\partial u} - \dfrac{\partial d'}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} d + \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\right] d' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} d'' = 0\ ^*). \end{cases}$$

Die Gleichungen (28) lassen sich auch in die zweite Form der Codazzi'schen Gleichungen (IV*), § 48, S. 92, bringen:

*) Hieraus folgt sofort wieder, dass die Frage nach den unendlich kleinen Verbiegungen der Kugel mit der Bestimmung der Minimalflächen gleichbedeutend ist. Ist nämlich S eine Kugel, so sind D, D', D'' proportional E, F, G, und jedes Wertsystem, welches den Gleichungen (27) und (28) genügt, giebt die Coefficienten der zweiten Grundform einer Minimalfläche.

$$(28^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{d}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{d'}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\dfrac{d}{\sqrt{EG-F^2}}-\\ \qquad -2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\dfrac{d'}{\sqrt{EG-F^2}}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\dfrac{d''}{\sqrt{EG-F^2}}=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{d''}{\sqrt{EG-F^2}}\right)-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{d'}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\dfrac{d}{\sqrt{EG-F^2}}-\\ \qquad -2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\dfrac{d'}{\sqrt{EG-F^2}}+\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\dfrac{d''}{\sqrt{EG-F^2}}=0.\end{cases}$$

Bezeichnen wir mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Coordinaten eines Punktes der associierten Fläche $\bar{S}$, so lässt sich leicht beweisen, dass $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ durch Quadraturen aus den Formeln

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial u}=\dfrac{d'}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial u}-\dfrac{d}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial v},\\ \dfrac{\partial\bar{x}}{\partial v}=\dfrac{d''}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial u}-\dfrac{d'}{\sqrt{EG-F^2}}\dfrac{\partial x}{\partial v},\end{cases}$$

sowie den analogen für $\bar{y}$, $\bar{z}$ zu berechnen sind. Hieraus findet man die Verschiebungsfunction

$$\varphi=\sum X\bar{x}$$

und die unendlich kleine Verbiegung selbst allein durch Quadraturen, wie oben (S. 307) behauptet wurde.

Diese allgemeinen Entwicklungen wollen wir nun auf einige Beispiele anwenden.

Erstens behandeln wir nach dieser Methode wiederum die schon in § 158 beantwortete Frage: Ist es möglich, eine Fläche S einer solchen unendlich kleinen Verbiegung zu unterwerfen, dass ein ursprünglich conjugiertes System (u,v) conjugiert bleibt?

Wählen wir dieses System (u, v) als Parametersystem, so haben wir der Voraussetzung zufolge:

$$D'=0,\quad d'=0.$$

Also giebt Gleichung (27):

$$d=\lambda D,\quad d''=-\lambda D'',$$

wo λ einen geeigneten Factor bedeutet. Werden diese Werte in die Gleichungen (28) eingesetzt und wird dabei berücksichtigt, dass D und D'' den Gleichungen (S. 134, (21)):

$$\frac{\partial D}{\partial v}=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}D-\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}D'',$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u}=\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}D''-\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}D$$

genügen, so ergiebt sich:



$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \frac{2D}{D''}\begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = \frac{2D''}{D}\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}$$

oder infolge der Gleichungen (25), § 69, S. 135:

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}', \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}',$$

wo die Symbole $\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'$ für das Linienelement der Kugel berechnet sind.

Die fragliche Verbiegung ist demnach möglich, wenn

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'$$

ist, was wieder den Satz in § 158 liefert.

§ 164. Anwendungen der zweiten Methode.

Zweitens untersuchen wir, ob es möglich ist, eine Fläche unendlich wenig so zu verbiegen, dass ihre Hauptkrümmungsradien sich nicht ändern. Da sich ja bei jeder Verbiegung die Totalkrümmung nicht ändert, so braucht nur die Bedingung, dass sich auch die mittlere Krümmung nicht ändern soll, hinzugefügt zu werden. Werden die Krümmungslinien als Parameterlinien gewählt, so lautet die soeben angegebene Bedingung (nach S. 105, (18)):

$$Ed'' + Gd = 0.$$

Sie liefert, mit (27) (vgl. S. 102):

$$\frac{E}{r_2}d'' + \frac{G}{r_1}d = 0$$

combiniert, und unter Ausschluss des Falles der Kugel die Gleichungen:

$$d = d'' = 0.$$

Aus den Gleichungen (28*) ergiebt sich dann:

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{d'}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{d'}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix},$$

und als notwendige und hinreichende Bedingung für die gesuchte Verbiegung erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}$$

oder mit Rücksicht darauf, dass $F = 0$ ist:

$$\frac{\partial^2 \log\left(\frac{E}{G}\right)}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Dieses besagt nach S. 129, dass die Krümmungslinien u, v ein Isothermensystem bilden. Wir haben also den von Weingarten angegebenen Satz: Damit eine Fläche einer unendlich kleinen Verbiegung unterworfen werden kann, bei der sich ihre Hauptkrümmungsradien nicht ändern, ist es notwendig und hinreichend, dass ihre Krümmungslinien ein Isothermensystem bilden.

Schliesslich wollen wir noch die Frage nach den unendlich kleinen Verbiegungen einer beliebigen Linienfläche S nach dieser Methode behandeln.

Als Parameterlinien auf S wählen wir die Erzeugenden v und die Haupttangentencurven u des zweiten Systems und haben dann:

$$D = D'' = 0, \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Gleichung (27) giebt: $d' = 0$, und die Gleichungen (28) gehen über in:

$$\frac{\partial d}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} d,$$

$$\frac{\partial d''}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} d'' - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} d.$$

Dieses System lässt sich offenbar durch Quadraturen integrieren. Da aber die Bestimmung der Haupttangentencurven des zweiten Systems einer Linienfläche im Allgemeinen die Integration einer Riccati'schen Differentialgleichung (nach § 116, S. 221) erfordert, so haben wir: Die Bestimmung der unendlich kleinen Verbiegungen einer beliebigen Linienfläche lässt sich auf die Integration der Riccati'schen Differentialgleichung ihrer Haupttangentencurven und darauf folgende Quadraturen zurückführen.

Sind insbesondere die Haupttangentencurven der Linienfläche bekannt, so werden also alle unendlich kleinen Verbiegungen der Fläche durch Quadraturen bestimmt.

Kapitel XII.

W-Strahlensysteme.

Moutard's Satz über die Laplace'schen Gleichungen von der Form: $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = M\vartheta$. — *W*-Strahlensysteme, d. h. Strahlensysteme, auf deren Brennflächenmänteln die Haupttangentencurven einander entsprechen. — Ihre Ableitung aus den unendlich kleinen Verbiegungen der Brennfläche. — Verallgemeinerung des Halphen'schen Satzes. — *W*-Normalensysteme, die der Gleichung: $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0$ oder: $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = 0$ entsprechen. — Sätze von Darboux über diejenigen *W*-Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch die Gleichung: $r_2 - r_1 = \frac{1}{k} \sin[k(r_1 + r_2)]$ verbunden sind. — Bestimmung aller auf das Rotationsparaboloid abwickelbaren Flächen. — *W*-Strahlensysteme, deren Brennflächenmäntel in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmass haben. — Sätze von Cosserat über die associierten Flächen dieser Brennflächen.

---

§ 165. Moutard's Satz über die Laplace'schen Gleichungen von der Form: $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = M\vartheta$.

In diesem zweiten den unendlich kleinen Verbiegungen gewidmeten Kapitel werden wir uns speciell mit einer neuen Klasse von Strahlensystemen beschäftigen, die mit diesen Verbiegungen in engem Zusammenhange stehen. Dieselben ergeben sich am einfachsten aus der geometrischen Deutung des Moutard'schen Satzes über Differentialgleichungen von der Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = M\vartheta, \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = M\vartheta,$$

von denen ja, wie wir gesehen haben, die Aufgabe der unendlich kleinen Verbiegungen abhängt.

Zu diesem Zwecke leiten wir zunächst kurz das schöne Ergebnis Moutard's ab.

Ist ϑ eine beliebige Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = M\vartheta \tag{1}$$

und R eine bestimmte particuläre Lösung derselben, sodass

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} = MR \tag{2}$$

ist, so ergiebt sich infolge von (1) und (2):

$$\frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} \vartheta & R \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} \vartheta & R \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnen wir daher mit ψ eine geeignete Function von u und v, so können wir setzen:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{vmatrix} \vartheta & R \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \vartheta & R \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Schreiben wir diese Gleichungen in der Form:

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial \psi}{\partial u} = -\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta}{R}\right), \quad \frac{1}{R^2}\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\vartheta}{R}\right),$$

so sehen wir, dass ψ seinerseits der Laplace'schen Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right) = 0$$

genügt. Führen wir statt der unbekannten Function ψ eine andere, ϑ_1, ein, indem wir

$$\psi = R\vartheta_1$$

setzen, so nimmt obige Gleichung wieder die Moutard'sche Form (1) an; sie wird nämlich:

$$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial u \partial v} = M_1 \vartheta_1, \tag{1*}$$

wo

$$M_1 = R\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(\frac{1}{R}\right) \tag{4}$$

ist.

Wir bezeichnen nun die Gleichung (1*) als die mittels der particulären Lösung R gebildete Moutard'sche Transformierte der Gleichung (1). Infolge der Gleichung (4) ist klar, dass der reciproke Wert von R eine particuläre Lösung der Gleichung (1*) ist, sodass die Gleichung (1) wieder die mittels der particulären Lösung $\frac{1}{R}$ gebildete Moutard'sche Transformierte der Gleichung (1*) ist. Die beiden Aufgaben, die Gleichungen (1) und (1*) zu integrieren, sind äquivalent, da nach dem Vorstehenden zwischen ihren allgemeinen Lösungen ϑ und ϑ_1 die Beziehungen:

$$\frac{\partial (R\vartheta_1)}{\partial u} = -R^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta}{R}\right), \quad \frac{\partial (R\vartheta_1)}{\partial v} = R^2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\vartheta}{R}\right) \tag{5}$$



bestehen, aus denen sich, wenn ϑ bekannt ist, mittels Quadraturen ϑ_1 ergiebt, und umgekehrt.

Wir wollen auch die entsprechenden Gleichungen für die Gleichung:

(6) $$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = M\vartheta$$

entwickeln, die übrigens in die Gleichung (1) übergeht, wenn $u + iv$ und $u - iv$ als unabhängige Veränderliche gewählt werden. Ist R eine particuläre Lösung von (6), und setzen wir:

(7) $$M_1 = R\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right],$$

so ist die Integration der Gleichung (6) äquivalent mit der Integration der nachstehenden Transformierten:

(6*) $$\frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial v^2} = M_1 \vartheta_1,$$

in Anbetracht der Gleichungen:

(8) $$\frac{\partial (R\vartheta_1)}{\partial u} = R^2 \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\vartheta}{R}\right), \quad \frac{\partial (R\vartheta_1)}{\partial v} = -R^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\vartheta}{R}\right).$$

§ 166. Geometrische Deutung des Moutard'schen Satzes.

Mit Hilfe der Lelieuvre'schen Formeln und der Formeln für unendlich kleine Verbiegungen können wir dem Moutard'schen Satze eine bemerkenswerte geometrische Deutung geben. Es seien ξ, η, ζ drei particuläre Lösungen der Gleichung (1), R eine vierte Lösung. Wir betrachten nun die Fläche S, die durch die Lelieuvre'schen Formeln:

(9) $$\frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

definiert ist, und die von ihr unendlich wenig verschiedene Biegungsfläche, die der neuen Lösung entspricht. Sie ist durch die Gleichungen (15), § 157, S. 296:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \begin{vmatrix} \xi & R \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial u} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \xi & R \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

definiert, welche die Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ eines Punktes der Fläche $\bar{S}$ geben, die der Fläche S durch Orthogonalität der Elemente entspricht. Wird

(10) $$\bar{x} = R\xi_1, \quad \bar{y} = R\eta_1, \quad \bar{z} = R\zeta_1$$

gesetzt, so sind ξ_1, η_1, ζ_1 zufolge (5) drei durch Moutard'sche Transformation aus ξ, η, ζ hervorgegangene particuläre Lösungen der Gleichung (1*). Wir construieren nun wieder mittels der Lelieuvre'schen Formeln eine auf ihre Haupttangentencurven u, v bezogene Fläche S_1, die bis auf eine Translation durch die Gleichungen:

$$(11)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

und analoge in y_1 und z_1 definiert ist.

Verfügen wir über die additiven Constanten in x_1, y_1, z_1 in geeigneter Weise, so können wir beweisen, dass die Fläche S_1 in eine solche Lage im Raume gebracht werden kann, dass sie und S zusammen die beiden Mäntel der Brennfläche eines Strahlensystems sind, dessen Strahlen die beiden Flächen in entsprechenden Punkten berühren.

Aus den Gleichungen (9) und (11) folgern wir nämlich:

$$(12)\qquad \frac{\partial (x_1 - x)}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix},$$

$$(12^*)\qquad \frac{\partial (x_1 - x)}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Nun ergeben sich aus den Gleichungen (5) die folgenden:

$$(13)\qquad \begin{cases} R\frac{\partial(\xi_1 + \xi)}{\partial u} = (\xi - \xi_1)\frac{\partial R}{\partial u}, \quad R\frac{\partial(\eta_1 + \eta)}{\partial u} = (\eta - \eta_1)\frac{\partial R}{\partial u}, \\ \qquad\qquad R\frac{\partial(\zeta_1 + \zeta)}{\partial u} = (\zeta - \zeta_1)\frac{\partial R}{\partial u}, \\ R\frac{\partial(\xi_1 - \xi)}{\partial v} = -(\xi + \xi_1)\frac{\partial R}{\partial v}, \quad R\frac{\partial(\eta_1 - \eta)}{\partial v} = -(\eta + \eta_1)\frac{\partial R}{\partial v}, \\ \qquad\qquad R\frac{\partial(\zeta_1 - \zeta)}{\partial v} = -(\zeta + \zeta_1)\frac{\partial R}{\partial v}. \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\begin{vmatrix} \eta - \eta_1 & \zeta - \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \eta + \eta_1 & \zeta + \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} - \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

nebst analogen Gleichungen, die sich durch cyclische Vertauschung ableiten lassen. Subtrahieren wir die letzten Gleichungen bezüglich von den Gleichungen (12) und (12*), so erhalten wir:

$$\frac{\partial (x_1 - x)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial (x_1 - x)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} \quad \text{u. ä.}$$

Bei passender Verfügung über die additiven Constanten in x_1, y_1, z_1 können wir also sofort setzen:

$$(14) \quad x_1 = x + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad y_1 = y + \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}, \quad z_1 = z + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \eta \end{vmatrix}.$$

Betrachten wir nun die durch diese Gleichungen bestimmte Fläche S_1 in ihrer Beziehung zur Fläche S, so beweisen uns die Gleichungen:

$$\xi(x_1 - x) + \eta(y_1 - y) + \zeta(z_1 - z) = 0,$$
$$\xi_1(x_1 - x) + \eta_1(y_1 - y) + \zeta_1(z_1 - z) = 0,$$

da ξ, η, ζ den Richtungscosinus der Normale von S, ξ_1, η_1, ζ_1 denjenigen der Normale von S_1 proportional sind, dass die Gerade, die zwei entsprechende Punkte F und F_1, (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1), von S und S_1 verbindet, in F die Fläche S und in F_1 die Fläche S_1 berührt. Ferner gilt der wichtige Satz: Auf den beiden Mänteln S, S_1 der Brennfläche dieses Strahlensystems entsprechen einander die Haupttangentencurven oder, was auf dasselbe hinauskommt, die conjugierten Systeme.

§ 167. W-Strahlensysteme.

Diejenigen Strahlensysteme, auf deren Brennflächenmänteln die Haupttangentencurven (oder die conjugierten Systeme) einander entsprechen, mögen W-Strahlensysteme heissen, in Analogie mit dem Falle der Normalensysteme dieser Art, wo die zu den Strahlen normalen Flächen eben die in Kap. IX als W-Flächen bezeichneten Flächen sind.

Für eine Fläche S mit positivem Krümmungsmass können wir ohne Einführung imaginärer Grössen Gleichungen ableiten, die den obigen vollkommen analog sind, wenn wir die Fläche auf ein isotherm-conjugiertes System beziehen (vgl. § 70, 71, S. 135—139).

Sind ξ, η, ζ drei Lösungen der Differentialgleichung:

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = M\vartheta,$$

so ist die Fläche S durch die Gleichungen:

$$(16) \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}$$

und die analogen in y und z bestimmt. Bedeutet R eine vierte Lösung von (15), so definieren die Gleichungen (§ 157, S. 296, (19)):

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \begin{vmatrix} R & \xi \\ \frac{\partial R}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = -\begin{vmatrix} R & \xi \\ \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial u} \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

eine unendlich kleine Verbiegung der Fläche S. Wird wieder

$$\bar{x} = R\xi_1, \quad \bar{y} = R\eta_1, \quad \bar{z} = R\zeta_1,$$

gesetzt, so ist:

$$(17) \qquad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial u}(R\xi_1) = \quad R\frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi\frac{\partial R}{\partial v}, \\ \frac{\partial}{\partial v}(R\xi_1) = -R\frac{\partial \xi}{\partial u} + \xi\frac{\partial R}{\partial u}. \end{cases}$$

Es erhellt sofort, dass die Gleichungen (14) wieder ein W-System ergeben, denn da ja hier nach dem obigen

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

ist, so entsprechen einander auf den beiden Brennflächenmänteln S und S_1 die conjugierten Systeme.

Beachten wir nun, dass infolge der Gleichungen (10) ξ, η, ζ den Componenten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ der Verschiebung, die der Punkt $F(x, y, z)$ bei der betreffenden unendlich kleinen Verbiegung von S erfährt, proportional sind, so können wir unser Ergebnis in dem folgenden Satze aussprechen: Man betrachte eine beliebige unendlich kleine Verbiegung einer Fläche S und ziehe durch jeden Punkt von S in der Tangentialebene denjenigen Strahl, welcher auf der Richtung der Verschiebung, die der Punkt erfährt, senkrecht steht; dann ist das so construierte Strahlensystem ein W-System.

Dieser Satz erleidet natürlicherweise in einem Falle eine Ausnahme, wenn nämlich die angegebene Construction anstatt eines Systems von ∞^2 Strahlen ein System von nur ∞^1 Strahlen liefert. Dieses tritt nur dann ein, wenn die Fläche S eine Linienfläche ist und die Richtung der Verschiebung eines jeden Punktes bei der betreffenden Verbiegung auf der durch den Punkt gehenden Erzeugenden senkrecht steht. Es liesse sich leicht nachweisen, dass jede Linienfläche unendlich kleine Verbiegungen dieser Art gestattet.

§ 168. Ableitung aller W-Strahlensysteme aus unendlich kleinen Verbiegungen der Brennflächen.

Guichard, von dem die obigen Formeln für die W-Systeme herrühren, hat auch bemerkt, dass sie die allgemeinsten W-Systeme

liefern. Wir wollen jetzt dieses wichtige Ergebnis beweisen, das wir auf Grund des obigen Satzes auch folgendermassen aussprechen können:

Jeder Brennflächenmantel eines W-Strahlensystems ist einer unendlich kleinen Verbiegung fähig, bei der die Verschiebung eines jeden Punktes parallel zur Normale in dem entsprechenden Punkte des anderen Mantels erfolgt.

Beim Beweise fassen wir den Fall ins Auge, in dem die Haupttangentencurven u, v auf beiden Mänteln S, S_1 reell sind, da sich der andere Fall ganz analog erledigt. Sind (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) zwei entsprechende Punkte von S, S_1, so definieren wir die beiden Flächen durch die Lelieuvre'schen Formeln:

$$(18)\qquad \frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = +\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix},$$

$$(19)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = +\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix},$$

wo ξ, η, ζ; ξ_1, η_1, ζ_1 den Richtungscosinus der Normalen von S und S_1 in den beiden entsprechenden Punkten bezüglich proportional sind.

Wird

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \varrho, \quad \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \varrho_1$$

gesetzt, so sind

$$(20)\qquad K = -\frac{1}{\varrho^2}, \quad K_1 = -\frac{1}{\varrho_1^2}$$

die Krümmungsmasse von S und S_1 (nach S. 133).

Nach Voraussetzung ist:

$$\xi(x_1 - x) + \eta(y_1 - y) + \zeta(z_1 - z) = 0,$$
$$\xi_1(x_1 - x) + \eta_1(y_1 - y) + \zeta_1(z_1 - z) = 0;$$

wir können demnach, wenn wir mit m einen geeigneten Proportionalitätsfactor bezeichnen,

$$(21)\; x_1 - x = m\begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad y_1 - y = m\begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}, \quad z_1 - z = m\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$$

setzen. Werden diese Gleichungen nach u differenziert, die so entstandenen Gleichungen der Reihe nach mit ξ, η, ζ, sodann mit ξ_1, η_1, ζ_1 multipliciert und addiert, so ergiebt sich:

$$
\text{(a)} \qquad
\begin{cases}
-\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \\
-\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial u} & \frac{\partial \eta_1}{\partial u} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial u} \end{vmatrix}.
\end{cases}
$$

Wird bezüglich v ebenso verfahren, so folgt:

$$
\text{(b)} \qquad
\begin{cases}
\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}, \\
\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial v} & \frac{\partial \eta_1}{\partial v} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} \end{vmatrix}.
\end{cases}
$$

Nun können die beiden Determinanten:

$$
\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}
$$

nicht gleichzeitig gleich Null sein, denn sonst wäre:

$$
\xi_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \eta_1 \frac{\partial y}{\partial u} + \zeta_1 \frac{\partial z}{\partial u} = 0,
$$

$$
\xi_1 \frac{\partial x}{\partial v} + \eta_1 \frac{\partial y}{\partial v} + \zeta_1 \frac{\partial z}{\partial v} = 0;
$$

es bestände demnach die Proportion:

$$
\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = \xi : \eta : \zeta,
$$

und weil die Normalen in entsprechenden Punkten von S, S_1 parallel sind, so würden die beiden Flächen zusammenfallen, was wir ausschliessen. Die Gleichungen (a) und (b) ergeben folglich:

$$
m^2 = 1,
$$

und wir können ohne weiteres

$$
m = 1
$$

setzen, indem wir entgegengesetzten Falls die Zeichen von ξ_1, η_1, ζ_1 ändern.

Wir erhalten demnach die Gleichungen:

$$(22)\quad x_1 = x + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad y_1 = y + \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}, \quad z_1 = z + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \eta \end{vmatrix},$$

die nach u und v differenziert und unter Berücksichtigung der Gleichungen (18) und (19) die folgenden Proportionen liefern:

$$\frac{\partial(\xi + \xi_1)}{\partial u} : \frac{\partial(\eta + \eta_1)}{\partial u} : \frac{\partial(\zeta + \zeta_1)}{\partial u} = \xi - \xi_1 : \eta - \eta_1 : \zeta - \zeta_1,$$

$$\frac{\partial(\xi - \xi_1)}{\partial v} : \frac{\partial(\eta - \eta_1)}{\partial v} : \frac{\partial(\zeta - \zeta_1)}{\partial v} = \xi + \xi_1 : \eta + \eta_1 : \zeta + \zeta_1.$$

Bezeichnen wir also mit α, β zwei geeignete Functionen von u und v, so können wir setzen:

$$(23)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\xi + \xi_1)}{\partial u} = \alpha(\xi - \xi_1), \quad \dfrac{\partial(\eta + \eta_1)}{\partial u} = \alpha(\eta - \eta_1), \quad \dfrac{\partial(\zeta + \zeta_1)}{\partial u} = \alpha(\zeta - \zeta_1), \\ \dfrac{\partial(\xi - \xi_1)}{\partial v} = \beta(\xi + \xi_1), \quad \dfrac{\partial(\eta - \eta_1)}{\partial v} = \beta(\eta + \eta_1), \quad \dfrac{\partial(\zeta - \zeta_1)}{\partial v} = \beta(\zeta + \zeta_1). \end{cases}$$

Wenn wir die ersten drei Gleichungen nach v, die drei letzten nach u differenzieren, darauf entsprechende Gleichungen addieren und uns erinnern, dass ξ, η, ζ Lösungen ein und derselben Laplace'schen Gleichung:

$$(24)\qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = M\vartheta$$

sind, so erhalten wir:

$$\left(2M - 2\alpha\beta - \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}\right)\xi = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}\right)\xi_1,$$

$$\left(2M - 2\alpha\beta - \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}\right)\eta = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}\right)\eta_1,$$

$$\left(2M - 2\alpha\beta - \frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}\right)\zeta = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u}\right)\zeta_1.$$

Da die Proportion:

$$\xi_1 : \eta_1 : \zeta_1 = \xi : \eta : \zeta$$

unmöglich ist, so folgt:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \frac{\partial \beta}{\partial u} = 0,$$

$$2M = 2\alpha\beta + \frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{\partial \beta}{\partial u}.$$

Bezeichnen wir also mit R eine neue Function von u und v, so können wir

$$\alpha = \frac{\partial \log R}{\partial u}, \quad \beta = \frac{\partial \log R}{\partial v}$$

setzen. Weil nun die zweite der obigen Gleichungen in

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u\, \partial v} = M\vartheta$$

übergeht, so ist hiermit bewiesen, dass R eine Lösung der Gleichung (24) ist. Nun lassen sich die Gleichungen (23) auf die Gleichungen (13) des vorigen Paragraphen zurückführen, und der Satz ist somit bewiesen.

§ 169. Verallgemeinerung des Halphen'schen Satzes.

Die obigen Gleichungen führen sofort zum Beweise des bereits in § 150, S. 281, erhaltenen Satzes, der die von Halphen für die W-Normalensysteme nachgewiesene Eigenschaft (§ 127, S. 243, Gleichung (17)) auf alle W-Systeme ausdehnt.

Bezeichnen wir nämlich mit σ den Winkel der beiden Brennebenen in einem W-System, dessen Brennflächenmäntel S und S_1 seien, so haben wir:

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = \sqrt{\varrho\varrho_1}\cos\sigma,$$

wo ϱ, ϱ_1 die durch die Gleichungen (20) gegebene Bedeutung haben. Daraus folgt wegen der Gleichungen (14):

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2 = \varrho\varrho_1 \sin^2\sigma,$$

und da nun

$$\delta = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

die Entfernung der beiden Brennpunkte und folglich

$$\frac{\delta}{\sin\sigma} = \sqrt{\varrho\varrho_1}$$

die Entfernung der Grenzpunkte angiebt, so ergiebt sich aus (20) die Gleichung:

$$KK_1 = \left(\frac{\sin\sigma}{\delta}\right)^4 \tag{24}$$

und hieraus der erwähnte Satz:

Bei jedem W-Strahlensystem ist das Product der Krümmungsmasse der beiden Brennflächenmäntel in zwei entsprechenden Punkten gleich dem reciproken Wert der vierten Potenz der Entfernung der Grenzpunkte.

Die Ergebnisse der voraufgehenden Paragraphen liefern eine einfache geometrische Deutung für den Moutard'schen Satz (S. 312, 313). Man lege nämlich eine Moutard'sche Gleichung (1) vor, von der R eine particuläre Lösung sei, mittels deren (1) nach dem angegebenen Verfahren in die neue Gleichung (1*) transformiert wird. Bezeichnen wir mit ξ, η, ζ drei particuläre Lösungen der Gleichung (1), so können wir nach den Lelieuvre'schen Formeln (9) eine zugehörige, auf ihre Haupttangentencurven u, v bezogene Fläche S construieren, für die Gleichung (1)

die Gleichung der unendlich kleinen Verbiegungen ist. Entsprechend der gewählten Lösung R haben wir, um von (1) zu (1*) zu gelangen, eine unendlich kleine Verbiegung der Fläche S, für die wir nach dem Satze auf S. 316 ein zugehöriges W-Strahlensystem construieren. Für den zweiten Brennflächenmantel S_1 ist die Gleichung der unendlich kleinen Verbiegungen gerade die nach der Moutard'schen Methode Transformierte (1*). Hieraus folgt: Für die beiden Brennflächenmäntel eines W-Strahlensystems sind die Aufgaben, ihre unendlich kleinen Verbiegungen zu bestimmen, äquivalent.

Wir bemerken nun, dass jede projective Raumtransformation ein W-System offenbar wieder in ein solches überführt, und da nun eben die Frage nach den unendlich kleinen Verbiegungen einer Fläche S mit der Bestimmung derjenigen W-Systeme, für welche S ein Brennflächenmantel ist, zusammenfällt, so ergiebt sich, dass, wenn alle unendlich kleinen Verbiegungen einer Fläche S bekannt sind, das nämliche für alle durch projective Transformation aus S hervorgehenden Flächen gilt. Dieses folgt auch aus der Bemerkung in § 159, S. 301, unten, nach der die genannte Aufgabe mit der Bestimmung der conjugierten Systeme mit gleichen Invarianten auf S zusammenfällt; es bleiben nämlich die conjugierten Systeme mit gleichen Invarianten bei projectiven Transformationen erhalten.

§ 170. Neuer Beweis des Weingarten'schen Satzes.

Wir wollen nun zeigen, wie auch der Weingarten'sche Satz über die Evolutenflächen der W-Flächen und seine Umkehrung aus dem Ribaucour'schen Satze (§ 127, S. 243) und aus der allgemeinen, in den vorhergehenden Paragraphen für die W-Strahlensysteme angegebenen Construction folgen. Hierzu schicken wir zunächst eine Untersuchung voraus, deren Ergebnisse uns sehr bald von Nutzen sein werden, indem wir uns die Frage stellen: Welche Flächen S gestatten eine unendlich kleine Verbiegung in sich?

Da die Verschiebung eines jeden Punktes von S tangential längs der Fläche erfolgt, so wählen wir als Curven u diejenigen, welche auf S von diesen Richtungen umhüllt werden, und als Curven v ihre Orthogonaltrajectorien, sodass das Quadrat des Linienelements von S durch

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

gegeben ist. Bezeichnen wir, wie in § 153, S. 287, mit

$$\varepsilon \bar{x}, \quad \varepsilon \bar{y}, \quad \varepsilon \bar{z}$$

die Componenten der Verschiebung, so haben wir nach Voraussetzung:

$$\bar{x} = \frac{\lambda}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \bar{y} = \frac{\lambda}{\sqrt{G}} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \bar{z} = \frac{\lambda}{\sqrt{G}} \frac{\partial z}{\partial v},$$

worin λ ein geeigneter Proportionalitätsfactor ist. Nun liefern die Bedingungen (S. 289):

$$\sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \sum \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) = 0$$

die Gleichungen:

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = 0, \quad \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}.$$

Aus ihnen ergiebt sich, dass

$$E = 1, \quad \lambda = \sqrt{G} = r$$

gesetzt werden kann, wo r eine Function von u allein ist. Daraus folgt: Die gesuchten Flächen sind ausschliesslich die auf Rotationsflächen abwickelbaren Flächen.

Wird ferner der Wert der charakteristischen Weingarten'schen Function (S. 289)

$$\varphi = \frac{1}{2r} \left(\sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} - \sum \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

berechnet, so ergiebt sich sofort $\varphi = -\frac{dr}{du}$ *). Also: Für jede Fläche S, die auf eine Rotationsfläche mit dem Linienelement-Quadrat

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2$$

abwickelbar ist, ist der Wert der charakteristischen Function φ, welche die Verschiebung der Fläche in sich angiebt, proportional $\frac{dr}{du}$.

Nach dieser Vorbemerkung nehmen wir an, es liege eine W-Fläche vor, deren Normalen also ein W-System bilden. Nach dem Satze in § 168, S. 317, gestattet jeder Mantel der Evolutenfläche eine unendlich kleine Verbiegung in sich und ist deshalb auf eine Rotationsfläche abwickelbar (Weingarten'scher Satz).

Umgekehrt, ist S eine auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche, so bilden die Tangenten der Biegungscurven der Meridiane nach dem Satze in § 167 ein W-(Normalen-)System, woraus die Umkehrung des Weingarten'schen Satzes folgt.

---

*) Es ergiebt sich nämlich $\varphi = -\frac{1}{r} \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial v}$ und durch Differentiation von: $G = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 = r^2$ nach u: $\sum \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \frac{\partial x}{\partial v} = r \frac{dr}{du}$.

§ 171. W-Strahlensysteme, die der Gleichung: $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0$ entsprechen.

Wir geben nun einige bemerkenswerte Beispiele von W-Strahlensystemen an, die uns zu wichtigen von Darboux*) herrührenden Ergebnissen führen.

Als Moutard'sche Fundamentalgleichung wählen wir die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0 \tag{25}$$

und construieren mittels dreier particulärer Lösungen:

$$\xi = f_1(u) + \varphi_1(v), \quad \eta = f_2(u) + \varphi_2(v), \quad \zeta = f_3(u) + \varphi_3(v) \tag{26}$$

nach den Lelieuvre'schen Formeln:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\begin{vmatrix} f_2(u) + \varphi_2(v) & f_3(u) + \varphi_3(v) \\ f_2'(u) & f_3'(u) \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} f_2(u) + \varphi_2(v) & f_3(u) + \varphi_3(v) \\ \varphi_2'(v) & \varphi_3'(v) \end{vmatrix}$$

die entsprechende Fläche S, deren Haupttangentencurven die Curven u, v sind. Auf die Gleichung (25) wenden wir die Moutard'sche Transformation mittels der particulären Lösung: $R = 1$ an, sodass die transformierte Gleichung mit (25) selbst übereinstimmt. Construieren wir nun nach den Gleichungen in § 166, S. 314, das entsprechende W-System, für das S der eine Brennflächenmantel ist, so ergiebt sich aus den Gleichungen (13) (S. 314) für den zweiten Mantel S_1:

$$\xi_1 = \varphi_1(v) - f_1(u), \quad \eta_1 = \varphi_2(v) - f_2(u), \quad \zeta_1 = \varphi_3(v) - f_3(u), \tag{26*}$$

und es ist folglich nach S. 315, (14):

$$x_1 = x + \begin{vmatrix} \varphi_2(v) - f_2(u) & \varphi_3(v) - f_3(u) \\ \varphi_2(v) + f_2(u) & \varphi_3(v) + f_3(u) \end{vmatrix} = x + 2\begin{vmatrix} \varphi_2(v) & \varphi_3(v) \\ f_2(u) & f_3(u) \end{vmatrix},$$

$$y_1 = y + \begin{vmatrix} \varphi_3(v) - f_3(u) & \varphi_1(v) - f_1(u) \\ \varphi_3(v) + f_3(u) & \varphi_1(v) + f_1(u) \end{vmatrix} = y + 2\begin{vmatrix} \varphi_3(v) & \varphi_1(v) \\ f_3(u) & f_1(u) \end{vmatrix},$$

$$z_1 = z + \begin{vmatrix} \varphi_1(v) - f_1(u) & \varphi_2(v) - f_2(u) \\ \varphi_1(v) + f_1(u) & \varphi_2(v) + f_2(u) \end{vmatrix} = z + 2\begin{vmatrix} \varphi_1(v) & \varphi_2(v) \\ f_1(u) & f_2(u) \end{vmatrix}.$$

Wir bezeichnen nun mit S_0 die Mittelfläche dieses W-Systems und mit x_0, y_0, z_0 die Coordinaten jedes Strahlenmittelpunkts. Aus den Gleichungen:

$$x_0 = \frac{x_1 + x}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z}{2}$$

*) Leçons, 3. Bd., S. 372 u. f.

und aus den vorstehenden folgt:

$$(27)\qquad \frac{\partial x_0}{\partial u} = -\begin{vmatrix} f_2(u) & f_3(u) \\ f_2'(u) & f_3'(u) \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x_0}{\partial v} = \begin{vmatrix} \varphi_2(v) & \varphi_3(v) \\ \varphi_2'(v) & \varphi_3'(v) \end{vmatrix}$$

nebst analogen Gleichungen für y_0 und z_0. Wie wir sehen, ist die Mittelfläche S_0 dieses W-Systems eine Translationsfläche, deren erzeugende Curven die Curven u, v sind (§ 59, S. 113). Ferner erhellt sofort, dass f_1, f_2, f_3 den Richtungscosinus der Binormale der Curve v auf S_0 und $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ denjenigen der Binormale der Curve u proportional sind, woraus folgt, dass jeder durch einen Punkt P von S_0 gehende Strahl des W-Systems die Schnittlinie der beiden Schmiegungsebenen der durch P gehenden Curven u, v ist.

Umgekehrt legen wir nun eine beliebige Translationsfläche S_0 vor, die durch die Gleichungen:

$$(28)\quad x_0 = F_1(u) + \Phi_1(v), \quad y_0 = F_2(u) + \Phi_2(v), \quad z_0 = F_3(u) + \Phi_3(v)$$

bestimmt sei, und wollen beweisen, dass durch passende Wahl der Functionen f_1, f_2, f_3; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Gleichungen (27) in die Gleichungen (28) übergeführt werden können. Der Einfachheit halber wählen wir als Parameter u, v auf S_0 die Bogen der Parameterlinien, d. h. wir setzen:

$$F_1'^2(u) + F_2'^2(u) + F_3'^2(u) = 1,$$
$$\Phi_1'^2(v) + \Phi_2'^2(v) + \Phi_3'^2(v) = 1.$$

Indem wir für die Curven u, v auf S_0 die üblichen Bezeichnungen aus der Curvenlehre beibehalten und den betreffenden Ausdrücken den Index u oder v beifügen, je nachdem sie sich auf die Curven $u =$ Const. oder $v =$ Const. beziehen, brauchen wir in der That nur

$$(29)\begin{cases} f_1 = \sqrt{T_v}\cos\lambda_v, & f_2 = \sqrt{T_v}\cos\mu_v, & f_3 = \sqrt{T_v}\cos\nu_v, \\ \varphi_1 = \sqrt{-T_u}\cos\lambda_u, & \varphi_2 = \sqrt{-T_u}\cos\mu_u, & \varphi_3 = \sqrt{-T_u}\cos\nu_u \end{cases}$$

zu setzen, damit die Gleichungen (28) und (29) zusammenfallen.

Wir haben demnach den Satz von Darboux: **Wird durch jeden Punkt einer Translationsfläche S_0 die Schnittgerade der beiden Schmiegungsebenen der durch diesen Punkt hindurchgehenden erzeugenden Curven gezogen, so entsteht ein W-Strahlensystem, auf dessen Brennflächenmänteln die Haupttangentencurven den erzeugenden Curven von S_0 entsprechen.**

Uebrigens sehen wir, dass, wenn diese Construction reell sein soll, die Torsionen der beiden erzeugenden Curven dem Zeichen nach entgegengesetzt sein müssen.

§ 172. W-Normalensysteme, die der Gleichung: $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0$ entsprechen.

Wir untersuchen nun, ob es unter den im Anschluss an den obigen Satz construierbaren W-Systemen Normalensysteme giebt. Hierzu ist nach S. 320 notwendig und hinreichend, dass

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = 0$$

oder nach S. 323, dass

$$f_1^2(u) + f_2^2(u) + f_3^2(u) = \varphi_1^2(v) + \varphi_2^2(v) + \varphi_3^2(v)$$

ist. Daraus ergiebt sich infolge der Gleichungen (29):

$$T_v = -T_u,$$

und da T_v eine Function von u allein, T_u eine solche von v allein ist, so haben wir das Ergebnis: Die gesuchten Translationsflächen sind diejenigen, deren erzeugende Curven gleiche und dem Zeichen nach entgegengesetzte constante Torsionen haben.

Wir wollen nun beweisen, dass die zu den Systemstrahlen orthogonalen Flächen diejenigen Weingarten'schen Flächen (§ 134, S. 252) sind, deren Hauptkrümmungsradien durch die Relation:

$$k(r_2 - r_1) = \sin[k(r_2 + r_1)] \quad (k = \text{Const.})$$

verbunden sind. Hierzu bemerken wir, dass die beiden Mäntel der Brennfläche der Moutard'schen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = 0$$

entsprechen und dass $R = 1$ diejenige Lösung derselben ist, welche die Verschiebung der Fläche in sich ergiebt. Demnach ist der zugehörige Wert der charakteristischen Weingarten'schen Function infolge der Gleichungen in § 157, S. 296, durch

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}$$

gegeben, wenn $K = -\frac{1}{\varrho^2}$ das Krümmungsmass des in Rede stehenden Mantels S ist. Bezeichnen wir andrerseits mit

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2$$

das Quadrat des auf die Biegungscurven der Meridiane und Parallelkreise bezogenen Linienelements von S, so ist infolge der Bemerkung in § 170, S. 322:

$$\varphi = k\frac{dr}{d\alpha},$$

und da nach S. 159, (13),

$$K = -\frac{1}{\varrho^2} = -\frac{1}{r}\frac{d^2 r}{d\alpha^2}$$

ist, so folgt daraus zur Bestimmung von r als Function von α die Gleichung:

$$\frac{d^2 r}{d\alpha^2} = k^4 r \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^4$$

oder:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2}\right) = -2k^4 r \frac{dr}{d\alpha},$$

demnach:

$$\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2 = \frac{1}{a^2 - k^4 r^2} \qquad (a = \text{Const.}).$$

Wir haben also:

$$ds^2 = (a^2 - k^4 r^2)\, dr^2 + r^2 d\beta^2.$$

Setzen wir:

$$k^2 r = a \sin\frac{\omega}{2},$$

so folgt hieraus:

$$ds^2 = \frac{a^4}{4k^4}\left(\cos^4\frac{\omega}{2}\, d\omega^2 + \frac{4}{a^2}\sin^2\frac{\omega}{2}\, d\beta^2\right) {*}),$$

und dieses ist gerade der Ausdruck für das Quadrat des Linienelements, den wir in § 134 (S. 253) für den einen Mantel der Evolutenflächen der angeführten W-Flächen gefunden haben.

Umgekehrt besitzt jede Fläche, auf der das Quadrat des Linienelements in die obige Form gebracht werden kann, als charakteristische Function für ihre Verschiebung in sich den Ausdruck

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}.$$

Demnach ist $R = 1$ eine Lösung der entsprechenden Moutard'schen Gleichung, die folglich die Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v} = 0$$

hat. Daraus schliessen wir, dass die vorhin angegebene Construction alle diejenigen W-Flächen liefert, für welche die sphärischen Bilder der Krümmungslinien confocale Ellipsen und Hyperbeln sind. Wir haben somit den schönen Satz von Darboux abgeleitet:

Um alle diejenigen W-Flächen zu construieren, deren Hauptkrümmungsradien durch die Relation:

$$k(r_2 - r_1) = \sin[k(r_2 + r_1)]$$

*) Die directe Ausrechnung dieser Gleichung bietet keine Schwierigkeit; wir verweisen jedoch hier in Betreff des directen Nachweises auf Darboux, a. a. O.

verbunden sind, betrachte man eine Translationsfläche S_0, deren erzeugende Curven gleiche und entgegengesetzte constante Torsionen haben. Durch jeden Punkt P von S_0 ziehe man die Schnittgerade der beiden Schmiegungsebenen der durch P gehenden erzeugenden Curven. Dieses Strahlensystem ist ein Normalensystem, und seine Orthogonalflächen sind die allgemeinsten W-Flächen der obigen Art.

§ 173. W-Normalensysteme, die der Gleichung: $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = 0$ entsprechen.

Wir setzen zweitens die Gleichung:

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = 0$$

an. Es seien ξ, η, ζ drei particuläre Integrale, mit denen wir vermöge der Gleichungen:

$$\text{(30)} \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix}$$

und der analogen in y und z eine Fläche S construieren, auf der das System u, v isotherm-conjugiert ist. Wir betrachten diejenige unendlich kleine Verbiegung dieser Fläche S, welche der Lösung $R = 1$ der Gleichung (A) entspricht, und construieren das zugehörige W-Strahlensystem. Der zweite Brennflächenmantel S_1 ist durch die Gleichungen

$$\text{(31)} \quad x_1 = x + \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \quad y_1 = y + \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}, \quad z_1 = z + \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \eta \end{vmatrix}$$

definiert, wo ξ_1, η_1, ζ_1 die zu ξ, η, ζ conjugierten Lösungen von (A) sind, die den Gleichungen (17), § 167, S. 316:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial v} = -\frac{\partial \xi}{\partial u} \text{ etc.}$$

genügen. Die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Mittelpunkts eines Strahls dieses W-Systems genügen ebenfalls der Gleichung (A).

Um W-Normalensysteme dieser Art zu erhalten, brauchen wir nur die Bedingung:

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = 0$$

aufzustellen, d. h.: Das durch die Gleichungen (30) und (31) definierte W-Strahlensystem ist ein Normalensystem, wenn die Summe der Quadrate der drei Functionen der complexen Variabeln $u + iv$:

$$\xi_1 + i\xi, \quad \eta_1 + i\eta, \quad \zeta_1 + i\zeta$$

gleich einer reellen Constanten, also

(32) $$(\xi_1 + i\xi)^2 + (\eta_1 + i\eta)^2 + (\zeta_1 + i\zeta)^2 = a$$

ist.

Ist insbesondere $a = 0$, so ergiebt sich:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

d. h.:

$$K_1 = K\text{*)},$$

wenn K, K_1 die Krümmungsmasse der beiden Brennflächenmäntel S, S_1 sind. Diese Thatsache, verbunden mit der Anmerkung zu § 128, S. 244, genügt bereits, um nachzuweisen, dass im Falle $a = 0$ das *W*-System von den Normalen einer Minimalfläche gebildet wird, welche die Mittelfläche S_0 des Systems ist, und dass die Flächen S, S_1 nichts anderes sind, als die Mäntel der Evolutenfläche der Minimalfläche S_0 **).

Um für einen beliebigen Wert der Constanten a auf der rechten Seite der Gleichung (32) zu untersuchen, auf welche Rotationsfläche S und analog S_1 abwickelbar ist, brauchen wir nur wie im vorigen Paragraphen zu verfahren, indem wir berücksichtigen, dass für unsere Fläche S der Wert der charakteristischen Function, welche die Verschiebung der Fläche in sich angiebt,

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}$$

ist, wenn $K = \frac{1}{\varrho^2}$ das Krümmungsmass ist. Zur Bestimmung von r als Function von α (§ 172, S. 326) haben wir also hier die Gleichung:

$$\frac{d^2r}{d\alpha^2} = -k^4 r \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^4 \quad (k = \text{Const.}),$$

demnach:

$$\frac{1}{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2} = b + k^4 r^2 \quad (b = \text{Const.}),$$

*) Wir sehen übrigens, dass, wenn wir, anstatt die Constante a auf der rechten Seite der Gleichung (32) gleich Null zu setzen, sie in dem entsprechenden *W*-System rein imaginär annähmen, die Mäntel der Brennfläche immer noch gleiches Krümmungsmass haben würden.

**) Bei dieser Gelegenheit dürfte die Bemerkung am Platze sein, dass jedem Orthogonalsystem auf der Evolventenfläche S_0 auf den Mänteln S, S_1 der Evolutenfläche ein conjugiertes System, insbesondere jedem Isothermensystem auf S_0 ein isotherm-conjugiertes System auf S, S_1 entspricht. Diese Eigenschaft kommt, wie aus den Gleichungen in § 127 leicht ersichtlich ist, allen Flächen mit constanter mittlerer Krümmung zu.

und somit für das Quadrat des Linienelements von S:

(33) $$ds^2 = (b + k^4 r^2) dr^2 + r^2 d\beta^2.$$

Umgekehrt ist für jede Fläche S, auf der das Quadrat des Linienelements in diese Form gebracht werden kann, der entsprechende Wert der charakteristischen Function φ gleich $\frac{1}{\sqrt{\varrho}}$, und da die zugehörige Moutard'sche Gleichung die Lösung $R = 1$ besitzt, so lautet sie:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = 0.$$

Wir sehen somit, dass unsere W-Strahlensysteme in ihren Brennflächen alle Flächen mit dem gegebenen Linienelement (33) liefern.

§ 174. **Bestimmung aller auf das Rotationsparaboloid abwickelbarer Flächen.**

Um nun über die Gestalt der Rotationsfläche, auf die S abwickelbar ist, klar zu werden, müssen wir, je nach dem Vorzeichen von b in der Gleichung (33), das, was wir sofort sehen werden, dem von $-a$ in der Gleichung (32) entspricht, verschiedene Fälle unterscheiden.

1) Ist $b = 0$, so wird das Quadrat des Linienelements (33)

$$ds^2 = du^2 + u d\beta^2$$

und gehört zu den Evolutenflächen der Minimalflächen (§ 134, S. 252, Anmerkung). Es ist dieses derjenige Fall, welcher, wie wir bereits vorhin gesehen haben, durch den Wert $a = 0$ der Constanten in der Gleichung (32) charakterisiert wird.

2) Sei $b > 0$. Dann können wir unbeschadet der Allgemeinheit

$$b = 1, \quad ds^2 = (1 + k^4 r^2) dr^2 + r^2 d\beta^2$$

setzen, und die zugehörige Rotationsfläche ist das Rotationsparaboloid (vgl. S. 78):

$$z = \psi(r) = \frac{k^2 r^2}{2}.$$

Setzen wir ferner unter Einführung einer Hilfsfunction ω

$$k^2 r = \sinh \frac{\omega}{2},$$

so folgt:

(34) $$ds^2 = c^2 \left(\cosh^4 \frac{\omega}{2} d\omega^2 + \sinh^2 \frac{\omega}{2} dv^2\right) \quad \left(c = \frac{1}{2k^2}\right).$$

Berechnen wir nun die Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 der Evolventenfläche, so finden wir nach den Formeln in § 133, S. 251, ohne Schwierigkeit:

(35) $$r_2 = c\,\frac{\omega - \sinh\omega}{2}, \quad r_1 = c\,\frac{\omega + \sinh\omega}{2},$$

demnach (vgl. S. 247) für den zweiten Mantel S_1 den Ausdruck:

(34*) $$ds_1^2 = c^2\left(\sinh^4\frac{\omega}{2}\,d\omega^2 + \cosh^2\frac{\omega}{2}\,dv^2\right),$$

der, wie sofort einleuchtet, dem Ausdruck (33) für das Quadrat des Linienelements mit negativem b entspricht.

Ferner ergeben sich für die zu (34), (34*) gehörigen Krümmungen K, K_1 nach S. 243, (16), die Ausdrücke:

$$K = \frac{1}{4c^2\cosh^4\frac{\omega}{2}}, \quad K_1 = \frac{1}{4c^2\sinh^4\frac{\omega}{2}}.$$

Es ist also:

$$\varrho = 2c\cosh^2\frac{\omega}{2}, \quad \varrho_1 = 2c\sinh^2\frac{\omega}{2},$$

$$\varrho - \varrho_1 = 2c > 0.$$

Daher hat die Constante in der Gleichung (32), nämlich

$$a = (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \varrho_1 - \varrho,$$

einen negativen Wert.

Hieraus ist ersichtlich, dass der Fall $b < 0$, welcher der Wahl eines positiven a in der Gleichung (32) entspricht, nicht betrachtet zu werden braucht, und wir können das Ergebnis von Darboux in der folgenden Fassung aussprechen:

Sind $\xi_1 + i\xi$, $\eta_1 + i\eta$, $\zeta_1 + i\zeta$ drei solche beliebige Functionen der complexen Veränderlichen $u + iv$, die durch die Gleichung:

(B) $$(\xi_1 + i\xi)^2 + (\eta_1 + i\eta)^2 + (\zeta_1 + i\zeta)^2 = \text{Const.}$$

verbunden sind, so liefern die Gleichungen (30) mittels Quadraturen die allgemeinsten auf das Rotationsparaboloid abwickelbaren Flächen, wenn die reelle Constante auf der rechten Seite von (B) negativ ist, andernfalls ihre Ergänzungsflächen. Ist ferner diese Constante gleich Null, so ergeben sich aus den Gleichungen (30) alle Evolutenflächen der Minimalflächen.

Schliesslich bemerken wir, dass das Quadrat des Linienelements der Kugel, bezogen auf die sphärischen Bilder der Krümmungslinien der Evolventenfläche, die charakteristische Form (§ 133, S. 250):

(36) $$ds'^2 = \frac{du^2}{\sinh^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dv^2}{\cosh^2\frac{\omega}{2}}$$



annimmt. Wir sehen also, dass sich die Aufgabe, das Quadrat des Linienelements der Kugel auf diese Form zu bringen, mittels Quadraturen lösen lässt.

§ 175. *W*-Strahlensysteme, deren Brennflächen in entsprechenden Punkten gleiche Krümmung haben.

Wir betrachten noch eine zweite Klasse von *W*-Strahlensystemen, von denen die pseudosphärischen (§ 151, S. 282) ein besonderer Fall sind. Zu diesem Zwecke stellen wir uns die Aufgabe, diejenigen *W*-Systeme zu bestimmen, deren Brennflächenmäntel in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmass besitzen, wobei wir uns übrigens auf den Fall beschränken, in dem die Haupttangentencurven auf der Brennfläche reell sind.

Wir wählen die Haupttangentencurven als Parameterlinien u, v und bedienen uns bei der Untersuchung der Gleichungen in § 166, S. 314. Da nach Voraussetzung

$$K = K_1$$

ist, so ist nach S. 317:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \varrho, \tag{37}$$

ferner, wenn σ den Winkel zwischen den Brennebenen bedeutet, nach S. 320:

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = \varrho\cos\sigma. \tag{38}$$

Nun multiplicieren wir die drei ersten Gleichungen (13), S. 314, der Reihe nach mit ξ, η, ζ, ebenso mit ξ_1, η_1, ζ_1 und addieren sie jedes Mal. So erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen (37), (38):

$$\varrho(1-\cos\sigma)\frac{\partial R}{\partial u} = R\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\varrho}{\partial u} + \sum \xi\,\frac{\partial\xi_1}{\partial u}\right],$$

$$-\varrho(1-\cos\sigma)\frac{\partial R}{\partial u} = R\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\varrho}{\partial u} + \sum \xi_1\frac{\partial\xi}{\partial u}\right]$$

und hieraus durch Addition:

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial u} = -(1+\cos\sigma)\frac{\partial\log\varrho}{\partial u}. \tag{39}$$

Verfahren wir ebenso mit den drei letzten Gleichungen (13), S. 314, so erhalten wir:

$$\frac{\partial\cos\sigma}{\partial v} = (1-\cos\sigma)\frac{\partial\log\varrho}{\partial v}\,{}^{*}). \tag{39*}$$

*) Werden $\frac{\partial\log\varrho}{\partial u}$, $\frac{\partial\log\varrho}{\partial v}$ durch die Symbole $\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}'$, die sich auf das Quadrat des Linienelements der Kugel beziehen, ausgedrückt, so lauten diese Gleichungen (vgl. S. 125):

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[(1+\cos\sigma)\frac{\partial \log \varrho}{\partial u}\right]+\frac{\partial}{\partial u}\left[1-\cos\sigma)\frac{\partial \log\varrho}{\partial v}\right]=0$$

oder wegen der Gleichungen (39), (39*) selbst:

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial u\,\partial v}=0,$$

demnach:

$$K=-\frac{1}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}, \tag{40}$$

wenn mit $\varphi(u)$ eine Function von u allein, mit $\psi(v)$ eine Function von v allein bezeichnet wird. Also: Wenn bei einem W-System die beiden Brennflächenmäntel in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmass besitzen, so nimmt dieses Krümmungsmass, durch die Parameter u, v der Haupttangentencurven ausgedrückt, die charakteristische Form (40) an.

Im nächsten Paragraphen werden wir beweisen, dass die hier als notwendig nachgewiesene Bedingung auch hinreichend ist, genauer ausgedrückt, dass jede Fläche der Klasse (40) als erster Brennflächenmantel zu ∞^2 W-Systemen der gesuchten Art gehört, deren Bestimmung von der Integration einer Riccati'schen Gleichung abhängt.

Wir bemerken hier noch, dass die durch die Gleichung (40) charakterisierten Flächen als besonderen Fall die pseudosphärischen Flächen umfassen, die in dem Falle, dass $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ beide constant sind, hervorgehen.

Ist nur eine der beiden Functionen $\varphi(u)$, $\psi(v)$, z. B. $\psi(v)$, constant, so sind die Curven gleicher Krümmung $K=$ Const. die Haupttangentencurven u, von denen also jede (nach dem Enneper'schen Satze, S. 121) eine Curve constanter Torsion ist. Umgekehrt gehören alle Flächen, deren Haupttangentencurven des einen Systems Curven constanter Torsion sind, zu dieser Klasse. Das einfachste Beispiel einer solchen Fläche ist die Minimal-Schraubenfläche.

$$\text{(a)}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial\cos\sigma}{\partial u}=2(1+\cos\sigma)\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}',\\[2ex] \dfrac{\partial\cos\sigma}{\partial v}=-2(1-\cos\sigma)\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}',\end{cases}$$

und zwischen den Werten von $\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'$ besteht die Identität:

$$\text{(b)}\qquad \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'=2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'.$$

Endlich bemerken wir, dass zu der allgemeinen Klasse (40) alle geraden Conoidflächen (§ 68, S. 134) gehören.

§ 176. Zurückführung ihrer Bestimmung auf eine Riccati'sche Gleichung.

Zum Beweise des angeführten Satzes nehmen wir eine Fläche S der Klasse (40) und bestimmen den Winkel σ durch die Gleichungen (39), (39*), die integriert

$$\operatorname{tang}\frac{\sigma}{2}=\sqrt{\frac{\varphi(u)+k}{\psi(v)-k}}, \tag{41}$$

wo k eine willkürliche Constante ist, geben. Wir erteilen in dieser Gleichung k einen festen Wert und wollen dann beweisen, dass ∞^1 solche W-Systeme construiert werden können, deren einer Brennflächenmantel S ist und deren zweiter Brennflächenmantel $\bar{S}$ in jedem entsprechenden Punkte dasselbe Krümmungsmass wie S hat.

Bei diesen Strahlensystemen ist infolge der Gleichung (24), S. 320, die Entfernung der Brennpunkte

$$\delta=\varrho\sin\sigma.$$

Wir betrachten nun in jedem Punkte von S die Richtungen der Krümmungslinien, deren Richtungscosinus wir mit X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 bezeichnen. Auf der Bildkugel sind nach S. 120 diese beiden Richtungen die Halbierungslinien der Winkel zwischen den Parameterlinien u, v; es gelten daher die in § 149 (S. 278) abgeleiteten Formeln, die wir der grösseren Klarheit halber hier nochmals zusammenstellen*):

$$\tag{42}\begin{cases}\dfrac{\partial X}{\partial u}=\sqrt{e}\left(\sin\dfrac{\Omega}{2}X_1+\cos\dfrac{\Omega}{2}X_2\right), & \dfrac{\partial X}{\partial v}=\sqrt{g}\left(-\sin\dfrac{\Omega}{2}X_1+\cos\dfrac{\Omega}{2}X_2\right),\\[2mm] \dfrac{\partial X_1}{\partial u}=-AX_2-\sqrt{e}\sin\dfrac{\Omega}{2}X, & \dfrac{\partial X_1}{\partial v}=\quad BX_2+\sqrt{g}\sin\dfrac{\Omega}{2}X,\\[2mm] \dfrac{\partial X_2}{\partial u}=\quad AX_1-\sqrt{e}\cos\dfrac{\Omega}{2}X, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v}=-BX_1-\sqrt{g}\cos\dfrac{\Omega}{2}X;\end{cases}$$

---

*) Die obigen und die umstehenden Formeln beziehen sich auf das Quadrat des Linienelements der Bildkugel

$$ds'^2=edu^2+2\cos\Omega\sqrt{eg}\,du\,dv+gdv^2,$$

und mit $\dfrac{1}{\varrho_u}$, $\dfrac{1}{\varrho_v}$ sind die geodätischen Krümmungen der sphärischen Curven u, v bezeichnet.

$$(43)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{e}{g}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\sin\Omega = -\frac{\sqrt{e}}{\varrho_v} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}, \\ B = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{g}{e}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\sin\Omega = -\frac{\sqrt{g}}{\varrho_u} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}. \end{cases}$$

Für die Coordinaten x, y, z eines Punktes F von S geben dann die Gleichungen (13), § 64, S. 126:

$$(44)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \quad \varrho\sqrt{e}\left(\cos\frac{\Omega}{2}X_1 - \sin\frac{\Omega}{2}X_2\right), \\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\varrho\sqrt{g}\left(\cos\frac{\Omega}{2}X_1 + \sin\frac{\Omega}{2}X_2\right) \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit φ den unbekannten Neigungswinkel des Focalabstands FF' gegen die von F auf S ausgehende Richtung (X_1, Y_1, Z_1), so erhalten wir für die Coordinaten x', y', z' von F' offenbar die Ausdrücke:

$$(45)\quad \begin{cases} x' = x + \varrho\sin\sigma(\cos\varphi X_1 + \sin\varphi X_2), \\ y' = y + \varrho\sin\sigma(\cos\varphi Y_1 + \sin\varphi Y_2), \\ z' = z + \varrho\sin\sigma(\cos\varphi Z_1 + \sin\varphi Z_2). \end{cases}$$

Nun müssen wir φ den Bedingungen unserer Aufgabe unterwerfen. Hierzu beweisen wir zunächst, dass φ so bestimmt werden kann, dass die in F' zur Fläche S', der Ortsfläche des durch die Gleichungen (45) bestimmten Punktes $F'(x', y', z')$, gezogene Normale die Richtungscosinus

$$(46)\quad \begin{cases} X' = \cos\sigma X + \sin\sigma(\cos\varphi X_2 - \sin\varphi X_1), \\ Y' = \cos\sigma Y + \sin\sigma(\cos\varphi Y_2 - \sin\varphi Y_1), \\ Z' = \cos\sigma Z + \sin\sigma(\cos\varphi Z_2 - \sin\varphi Z_1) \end{cases}$$

hat; ist dieses bewiesen, so ist die Fläche S' offenbar der zweite Brennflächenmantel des so construierten Strahlensystems. Bilden wir nun die beiden Gleichungen:

$$\sum X'\frac{\partial x'}{\partial u} = 0,$$
$$\sum X'\frac{\partial x'}{\partial v} = 0,$$

die eben besagen, dass die Richtung (X', Y', Z') zur Fläche S' normal ist, so finden wir unter Benutzung der früheren Gleichungen:

$$(47)\quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \quad A + \sqrt{e}\frac{1+\cos\sigma}{\sin\sigma}\sin\left(\varphi + \frac{\Omega}{2}\right), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -B - \sqrt{g}\frac{1-\cos\sigma}{\sin\sigma}\sin\left(\varphi - \frac{\Omega}{2}\right). \end{cases}$$



Wird nun die Identität:

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = -\sqrt{eg} \sin \Omega$$

berücksichtigt, die aus der Liouville'schen Formel für das Krümmungsmass (§ 77, S. 151), sowie auch die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{g}\,\frac{1-\cos\sigma}{\sin\sigma}\right) = \sqrt{e}\cos\Omega\,\frac{1-\cos\sigma}{\sin\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' - \sqrt{g}\,\frac{1+\cos\sigma}{\sin\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}',$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{e}\,\frac{1+\cos\sigma}{\sin\sigma}\right) = \sqrt{g}\cos\Omega\,\frac{1+\cos\sigma}{\sin\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' - \sqrt{e}\,\frac{1-\cos\sigma}{\sin\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'$$

benutzt, die sich ohne Schwierigkeit aus den Gleichungen (a) (S. 332) ergeben, so stellt sich heraus, dass die Integrabilitätsbedingung für die Gleichungen (47) identisch erfüllt ist.

Die Gleichungen (47), die durch eine totale Differentialgleichung für $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ vom Riccati'schen Typus ersetzt werden können, besitzen also eine Lösung φ mit einer willkürlichen Constanten.

Es erübrigt nun noch nachzuweisen, dass für einen beliebigen von den Werten φ, die diesen Gleichungen genügen, das construierte Strahlensystem zur W-Klasse gehört, denn dann folgt aus dem Satz S. 320 unmittelbar, dass das Krümmungsmass von S' gleich demjenigen von S ist. Es braucht also nur nachgewiesen zu werden, dass auch auf der Fläche S' die Curven u, v Haupttangentencurven sind, d. h. dass die beiden Gleichungen:

$$\sum \frac{\partial X'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial X'}{\partial v}\frac{\partial x'}{\partial v} = 0$$

bestehen. Wird die Rechnung ausgeführt, so ergiebt sich, dass die Gleichungen genau in die beiden Gleichungen (a), S. 332, die σ bestimmen, übergehen.

Wir bemerken schliesslich, dass wir wegen der bekannten Eigenschaften der Riccati'schen Differentialgleichung nur eine particuläre Lösung der Gleichungen (47) zu kennen brauchen, um die allgemeine Lösung mittels Quadraturen zu finden. Hiernach gilt für die neu abgeleiteten Flächen der Klasse (40) dasselbe, wie für die Ausgangsfläche, und es sind nur Quadraturen erforderlich, um das Verfahren unbegrenzt oft anzuwenden. Können wir ferner für die Ausgangsfläche alle unendlich kleinen Verbiegungen bestimmen, so gilt nach dem Satze von Moutard das nämliche für alle abgeleiteten Flächen. Dieses ist nun eben der Fall, wenn wir als Ausgangsfläche S die Pseudosphäre, die Minimal-Schraubenregelfläche oder das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid,

die Vertreter der drei vorhin betrachteten Typen von Flächen (40), wählen *).

§ 177. Sätze von Cosserat.

Die associierten Flächen der in den beiden voraufgehenden Paragraphen betrachteten Flächen besitzen eine bemerkenswerte charakteristische Eigenschaft, die von Cosserat entdeckt worden ist **). Um dieselbe zu finden, stellen wir uns die Frage: Welche Flächen können so verbogen werden, dass ein ursprünglich conjugiertes System (u, v) conjugiert bleibt? Als Parameterlinien auf der gesuchten Fläche S wählen wir das conjugierte System (u, v). Da $D' = 0$ ist, lauten die Codazzi'schen Gleichungen (S. 91, (IV)):

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D = 0, \\ \dfrac{\partial D''}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} D - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' = 0. \end{cases}$$

Nach der Verbiegung ist D' immer noch gleich Null, und da das Product DD'' ungeändert bleiben soll, so können wir die neuen Werte von D und D'' mit

$$\lambda D, \quad \frac{D''}{\lambda}$$

bezeichnen. Setzen wir sie in die Gleichungen (48) ein und berücksichtigen wir diese mit, so finden wir für die unbekannte Function λ die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{D}{D''}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{D''}{D}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Statt λ führen wir mittels der Substitution: $\lambda^2 = 1 + \frac{1}{\nu}$ eine andere unbekannte Function ν ein. Wenn wir uns dabei der Gleichungen (25), S. 135:

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{D}{D''} = -\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}', \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{D''}{D} = -\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}',$$

in denen die Symbole rechts für das Quadrat des Linienelements der Kugel gebildet sind, erinnern, so erhalten wir:

$$(49)\qquad \frac{\partial \nu}{\partial u} = 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'(\nu + 1), \quad \frac{\partial \nu}{\partial v} = 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'\nu.$$

*) Hinsichtlich der weiteren Ausführung vergleiche man die Abhandlung des Verfassers in den Annali di Matematica, 2. Serie, 18. Bd. (1890).

**) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, 12. u. 19. October 1891.

Jede Lösung ν dieser Gleichungen liefert eine Lösung der Aufgabe; da nun aber diese Gleichungen in ν linear sind, so können sie nicht mehr als eine Lösung haben, wofern sie nicht unbeschränkt integrierbar sind und dann unendlich viele Lösungen haben. Damit letzterer Fall zutrifft, ist es notwendig und hinreichend, dass

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' = 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' \tag{50}$$

ist, d. h. die Fläche S muss nach S. 332 die Associierte einer Fläche der im vorigen Paragraphen betrachteten Klasse sein. Wir haben also gefunden:

Wenn eine Fläche S mehr als eine solche Verbiegung gestattet, bei der ein ursprünglich conjugiertes System conjugiert bleibt, so gestattet sie eine stetige Aufeinanderfolge solcher Verbiegungen. Diese Flächen S sind sämtlich und ausschliesslich die Associierten derjenigen Flächen, deren Krümmungsmass K, ausgedrückt durch die Parameter der Haupttangentencurven, die Form (40)

$$K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}$$

hat.

Nach den Entwickelungen der voraufgehenden Paragraphen sind wir im Stande, lediglich durch Quadraturen beliebig viele Flächen zu finden, die der hier betrachteten Verbiegungen fähig sind.

§ 178. Beispiele.

Diese allgemeinen Ergebnisse wollen wir auf drei Beispiele anwenden.

1) Das auf der Kugel von den Meridianen und den Parallelkreisen gebildete System genügt den Bedingungen (50). Daher gestatten alle Gesimsflächen mit cylindrischer Abwickelung (§ 74, S. 144) eine stetige Aufeinanderfolge von Verbiegungen, bei denen ihre Krümmungslinien beständig Krümmungslinien bleiben. Umgekehrt lässt sich unter Benutzung der Gleichungen (50) leicht nachweisen, dass dieses die einzigen Flächen sind, die solcher Verbiegungen fähig sind. Diejenige Fläche, der sie associiert sind, ist die Rotationsminimalfläche, d. h. das Catenoid.

2) Wir betrachten das gleichseitige hyperbolische Paraboloid, das zur Klasse (40) gehört.

Da die sphärischen Bilder seiner Erzeugenden grösste (geodätische) Kreise sind, so ist

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}' = 0, \quad \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}' = 0,$$

demnach für die dem Paraboloid associierten Flächen (§ 69, S. 135, Formeln (25)):

$$\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}=0,\quad \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}=0.$$

Dieselben sind also nach S. 137, oben, Translationsflächen, deren erzeugende Curven, wie leicht ersichtlich, eben sind und in lotrechten Ebenen liegen. Umgekehrt ist jede Translationsfläche dieser Art eine Associierte des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids. Es gehört demnach zu jeder solchen Translationsfläche eine einfach unendliche Schar von Flächen derselben Klasse, die auf einander abwickelbar sind.

3) Schliesslich betrachten wir eine beliebige pseudosphärische Fläche S. Ihre Associierten sind Voss'sche Flächen, auf denen die Bilder der Haupttangentencurven von S ein conjugiertes System geodätischer Linien bilden. Jede Voss'sche Fläche kann somit in stetiger Weise so verbogen werden, dass das conjugierte geodätische System conjugiert bleibt. In diesem Falle ist die im voraufgehenden Paragraphen mit λ bezeichnete Function eine Constante, woraus erhellt, dass sich bei der Verbiegung die erste und die zweite Krümmung der geodätischen Linien bei dem einen System mit einer Constanten, bei dem anderen mit dem reciproken Wert derselben multiplicieren.

Kapitel XIII.

Die normalen Kreissysteme.

Bedingung dafür, dass eine Schar von ∞^2 Curven eine Schar Orthogonalflächen hat. — Normale Kreissysteme oder Cykelsysteme. — Grundlegende Sätze von Ribaucour. — Dreifaches Orthogonalsystem von Flächen, das zu einem normalen Kreissystem gehört. — Cyklische Strahlensysteme, die von den Axen eines normalen Kreissystems gebildet werden. — Bedingungen dafür, dass ein Strahlensystem cyklisch ist. — Strahlensysteme, die auf unendlich viele Weisen cyklisch sind. — Das Cykelsystem, in dem alle Kreise gleich gross sind. — Ausdruck für das Linienelement des Raumes, bezogen auf ein normales Kreissystem. — Bestimmung der sphärischen Bilder der Abwickelbaren eines cyklischen Strahlensystems.

---

§ 179. Bedingung dafür, dass eine Schar von ∞^2 Curven eine Schar Orthogonalflächen hat.

In engem Zusammenhange mit der Lehre von den geradlinigen Strahlensystemen und den unendlich kleinen Verbiegungen der Flächen steht die Theorie, die wir in dem vorliegenden Kapitel behandeln wollen und die sich auf Scharen von ∞^2 Kreisen bezieht, die eine Schar Orthogonalflächen besitzen.

Eine solche Kreisschar werde kurz ein normales Kreissystem oder auch nach der Bezeichnung Ribaucours, von dem diese Theorie entwickelt worden ist, ein Cykelsystem genannt.

Wir schicken unserer Untersuchung die Ableitung der Bedingung voraus, der eine Schar von ∞^2 Curven im Raume, eine sogenannte Curvencongruenz, genügen muss, damit es eine Schar von Flächen gebe, die zu diesen Curven orthogonal sind*). Wir schreiben die Gleichungen der Congruenzcurven in der Form:

$$(1) \qquad \xi = \xi(u, v, t), \quad \eta = \eta(u, v, t), \quad \zeta = \zeta(u, v, t),$$

*) Vgl. Beltrami, Ricerche di analisi applicata alla geometria. Giornale di Matematiche, 2. Bd.

$$\xi_1 + i\xi, \quad \eta_1 + i\eta, \quad \zeta_1 + i\zeta$$

gleich einer reellen Constanten, also

(32) $$(\xi_1 + i\xi)^2 + (\eta_1 + i\eta)^2 + (\zeta_1 + i\zeta)^2 = a$$

ist.

Ist insbesondere $a = 0$, so ergiebt sich:

$$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

d. h.:

$$K_1 = K\text{*)},$$

wenn K, K_1 die Krümmungsmasse der beiden Brennflächenmäntel S, S_1 sind. Diese Thatsache, verbunden mit der Anmerkung zu § 128, S. 244, genügt bereits, um nachzuweisen, dass im Falle $a = 0$ das *W*-System von den Normalen einer Minimalfläche gebildet wird, welche die Mittelfläche S_0 des Systems ist, und dass die Flächen S, S_1 nichts anderes sind, als die Mäntel der Evolutenfläche der Minimalfläche S_0**).

Um für einen beliebigen Wert der Constanten a auf der rechten Seite der Gleichung (32) zu untersuchen, auf welche Rotationsfläche S und analog S_1 abwickelbar ist, brauchen wir nur wie im vorigen Paragraphen zu verfahren, indem wir berücksichtigen, dass für unsere Fläche S der Wert der charakteristischen Function, welche die Verschiebung der Fläche in sich angiebt,

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\varrho}}$$

ist, wenn $K = \frac{1}{\varrho^2}$ das Krümmungsmass ist. Zur Bestimmung von r als Function von α (§ 172, S. 326) haben wir also hier die Gleichung:

$$\frac{d^2 r}{d\alpha^2} = -k^4 r \left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^4 \quad (k = \text{Const.}),$$

demnach:

$$\frac{1}{\left(\frac{dr}{d\alpha}\right)^2} = b + k^4 r^2 \quad (b = \text{Const.}),$$

---

*) Wir sehen übrigens, dass, wenn wir, anstatt die Constante a auf der rechten Seite der Gleichung (32) gleich Null zu setzen, sie in dem entsprechenden *W*-System rein imaginär annähmen, die Mäntel der Brennfläche immer noch gleiches Krümmungsmass haben würden.

**) Bei dieser Gelegenheit dürfte die Bemerkung am Platze sein, dass jedem Orthogonalsystem auf der Evolventenfläche S_0 auf den Mänteln S, S_1 der Evolutenfläche ein conjugiertes System, insbesondere jedem Isothermensystem auf S_0 ein isotherm-conjugiertes System auf S, S_1 entspricht. Diese Eigenschaft kommt, wie aus den Gleichungen in § 127 leicht ersichtlich ist, allen Flächen mit constanter mittlerer Krümmung zu.

und somit für das Quadrat des Linienelements von S:

(33) $$ds^2 = (b + k^4 r^2) dr^2 + r^2 d\beta^2.$$

Umgekehrt ist für jede Fläche S, auf der das Quadrat des Linienelements in diese Form gebracht werden kann, der entsprechende Wert der charakteristischen Function φ gleich $\frac{1}{\sqrt{\varrho}}$, und da die zugehörige Moutard'sche Gleichung die Lösung $R = 1$ besitzt, so lautet sie:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = 0.$$

Wir sehen somit, dass unsere W-Strahlensysteme in ihren Brennflächen alle Flächen mit dem gegebenen Linienelement (33) liefern.

§ 174. Bestimmung aller auf das Rotationsparaboloid abwickelbarer Flächen.

Um nun über die Gestalt der Rotationsfläche, auf die S abwickelbar ist, klar zu werden, müssen wir, je nach dem Vorzeichen von b in der Gleichung (33), das, was wir sofort sehen werden, dem von $-a$ in der Gleichung (32) entspricht, verschiedene Fälle unterscheiden.

1) Ist $b = 0$, so wird das Quadrat des Linienelements (33)

$$ds^2 = du^2 + u d\beta^2$$

und gehört zu den Evolutenflächen der Minimalflächen (§ 134, S. 252, Anmerkung). Es ist dieses derjenige Fall, welcher, wie wir bereits vorhin gesehen haben, durch den Wert $a = 0$ der Constanten in der Gleichung (32) charakterisiert wird.

2) Sei $b > 0$. Dann können wir unbeschadet der Allgemeinheit

$$b = 1, \quad ds^2 = (1 + k^4 r^2) dr^2 + r^2 d\beta^2$$

setzen, und die zugehörige Rotationsfläche ist das **Rotationsparaboloid** (vgl. S. 78):

$$z = \psi(r) = \frac{k^2 r^2}{2}.$$

Setzen wir ferner unter Einführung einer Hilfsfunction ω

$$k^2 r = \sinh \frac{\omega}{2},$$

so folgt:

(34) $$ds^2 = c^2 \left(\cosh^4 \frac{\omega}{2} d\omega^2 + \sinh^2 \frac{\omega}{2} dv^2\right) \quad \left(c = \frac{1}{2k^2}\right).$$

Berechnen wir nun die Hauptkrümmungsradien r_1, r_2 der Evolventenfläche, so finden wir nach den Formeln in § 133, S. 251, ohne Schwierigkeit:

(35) $$r_2 = c\,\frac{\omega - \sinh\omega}{2}, \quad r_1 = c\,\frac{\omega + \sinh\omega}{2},$$

demnach (vgl. S. 247) für den zweiten Mantel S_1 den Ausdruck:

(34*) $$ds_1^2 = c^2\left(\sinh^4\frac{\omega}{2}\,d\omega^2 + \cosh^2\frac{\omega}{2}\,dv^2\right),$$

der, wie sofort einleuchtet, dem Ausdruck (33) für das Quadrat des Linienelements mit negativem b entspricht.

Ferner ergeben sich für die zu (34), (34*) gehörigen Krümmungen K, K_1 nach S. 243, (16), die Ausdrücke:

$$K = \frac{1}{4c^2\cosh^4\frac{\omega}{2}}, \quad K_1 = \frac{1}{4c^2\sinh^4\frac{\omega}{2}}.$$

Es ist also:

$$\varrho = 2c\cosh^2\frac{\omega}{2}, \quad \varrho_1 = 2c\sinh^2\frac{\omega}{2},$$

$$\varrho - \varrho_1 = 2c > 0.$$

Daher hat die Constante in der Gleichung (32), nämlich

$$a = (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \varrho_1 - \varrho,$$

einen negativen Wert.

Hieraus ist ersichtlich, dass der Fall $b < 0$, welcher der Wahl eines positiven a in der Gleichung (32) entspricht, nicht betrachtet zu werden braucht, und wir können das Ergebnis von Darboux in der folgenden Fassung aussprechen:

Sind $\xi_1 + i\xi$, $\eta_1 + i\eta$, $\zeta_1 + i\zeta$ drei solche beliebige Functionen der complexen Veränderlichen $u + iv$, die durch die Gleichung:

(B) $$(\xi_1 + i\xi)^2 + (\eta_1 + i\eta)^2 + (\zeta_1 + i\zeta)^2 = \text{Const.}$$

verbunden sind, so liefern die Gleichungen (30) mittels Quadraturen die allgemeinsten auf das Rotationsparaboloid abwickelbaren Flächen, wenn die reelle Constante auf der rechten Seite von (B) negativ ist, andernfalls ihre Ergänzungsflächen. Ist ferner diese Constante gleich Null, so ergeben sich aus den Gleichungen (30) alle Evolutenflächen der Minimalflächen.

Schliesslich bemerken wir, dass das Quadrat des Linienelements der Kugel, bezogen auf die sphärischen Bilder der Krümmungslinien der Evolventenfläche, die charakteristische Form (§ 133, S. 250):

(36) $$ds'^2 = \frac{du^2}{\sinh^2\frac{\omega}{2}} + \frac{dv^2}{\cosh^2\frac{\omega}{2}}$$

annimmt. Wir sehen also, dass sich die Aufgabe, das Quadrat des Linienelements der Kugel auf diese Form zu bringen, mittels Quadraturen lösen lässt.

§ 175. W-Strahlensysteme, deren Brennflächen in entsprechenden Punkten gleiche Krümmung haben.

Wir betrachten noch eine zweite Klasse von W-Strahlensystemen, von denen die pseudosphärischen (§ 151, S. 282) ein besonderer Fall sind. Zu diesem Zwecke stellen wir uns die Aufgabe, diejenigen W-Systeme zu bestimmen, deren Brennflächenmäntel in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmass besitzen, wobei wir uns übrigens auf den Fall beschränken, in dem die Haupttangentencurven auf der Brennfläche reell sind.

Wir wählen die Haupttangentencurven als Parameterlinien u, v und bedienen uns bei der Untersuchung der Gleichungen in § 166, S. 314. Da nach Voraussetzung

$$K = K_1$$

ist, so ist nach S. 317:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 = \varrho, \tag{37}$$

ferner, wenn σ den Winkel zwischen den Brennebenen bedeutet, nach S. 320:

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 = \varrho \cos\sigma. \tag{38}$$

Nun multiplicieren wir die drei ersten Gleichungen (13), S. 314, der Reihe nach mit ξ, η, ζ, ebenso mit ξ_1, η_1, ζ_1 und addieren sie jedes Mal. So erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen (37), (38):

$$\varrho(1 - \cos\sigma)\frac{\partial R}{\partial u} = R\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \sum \xi\,\frac{\partial \xi_1}{\partial u}\right],$$

$$-\varrho(1 - \cos\sigma)\frac{\partial R}{\partial u} = R\left[\frac{1}{2}\frac{\partial \varrho}{\partial u} + \sum \xi_1\,\frac{\partial \xi}{\partial u}\right]$$

und hieraus durch Addition:

$$\frac{\partial \cos\sigma}{\partial u} = -(1 + \cos\sigma)\frac{\partial \log \varrho}{\partial u}. \tag{39}$$

Verfahren wir ebenso mit den drei letzten Gleichungen (13), S. 314, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \cos\sigma}{\partial v} = (1 - \cos\sigma)\frac{\partial \log \varrho}{\partial v}\ *). \tag{39*}$$

*) Werden $\frac{\partial \log \varrho}{\partial u}$, $\frac{\partial \log \varrho}{\partial v}$ durch die Symbole $\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}'$, die sich auf das Quadrat des Linienelements der Kugel beziehen, ausgedrückt, so lauten diese Gleichungen (vgl. S. 125):

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[(1+\cos\sigma)\frac{\partial \log\varrho}{\partial u}\right]+\frac{\partial}{\partial u}\left[1-\cos\sigma)\frac{\partial \log\varrho}{\partial v}\right]=0$$

oder wegen der Gleichungen (39), (39*) selbst:

$$\frac{\partial^2\varrho}{\partial u\,\partial v}=0,$$

demnach:

(40) $$K=-\frac{1}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2},$$

wenn mit $\varphi(u)$ eine Function von u allein, mit $\psi(v)$ eine Function von v allein bezeichnet wird. Also: **Wenn bei einem W-System die beiden Brennflächenmäntel in entsprechenden Punkten gleiches Krümmungsmass besitzen, so nimmt dieses Krümmungsmass, durch die Parameter u, v der Haupttangentencurven ausgedrückt, die charakteristische Form (40) an.**

Im nächsten Paragraphen werden wir beweisen, dass die hier als notwendig nachgewiesene Bedingung auch hinreichend ist, genauer ausgedrückt, dass **jede Fläche der Klasse (40) als erster Brennflächenmantel zu ∞^2 W-Systemen der gesuchten Art gehört, deren Bestimmung von der Integration einer Riccati'schen Gleichung abhängt.**

Wir bemerken hier noch, dass die durch die Gleichung (40) charakterisierten Flächen als besonderen Fall die pseudosphärischen Flächen umfassen, die in dem Falle, dass $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ beide constant sind, hervorgehen.

Ist nur eine der beiden Functionen $\varphi(u)$, $\psi(v)$, z. B. $\psi(v)$, constant, so sind die **Curven gleicher Krümmung** $K=$ Const. die Haupttangentencurven u, von denen also jede (nach dem Enneper'schen Satze, S. 121) eine Curve constanter Torsion ist. Umgekehrt gehören alle Flächen, deren Haupttangentencurven des einen Systems Curven constanter Torsion sind, zu dieser Klasse. Das einfachste Beispiel einer solchen Fläche ist die Minimal-Schraubenfläche.

(a) $$\begin{cases}\dfrac{\partial\cos\sigma}{\partial u}= \quad 2(1+\cos\sigma)\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}',\\[2ex] \dfrac{\partial\cos\sigma}{\partial v}=-2(1-\cos\sigma)\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}',\end{cases}$$

und zwischen den Werten von $\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'$, $\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'$ besteht die Identität:

(b) $$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'=2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'.$$

Endlich bemerken wir, dass zu der allgemeinen Klasse (40) alle geraden Conoidflächen (§ 68, S. 134) gehören.

§ 176. Zurückführung ihrer Bestimmung auf eine Riccati'sche Gleichung.

Zum Beweise des angeführten Satzes nehmen wir eine Fläche S der Klasse (40) und bestimmen den Winkel σ durch die Gleichungen (39), (39*), die integriert

$$\tag{41} \operatorname{tang}\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{\varphi(u)+k}{\psi(v)-k}},$$

wo k eine willkürliche Constante ist, geben. Wir erteilen in dieser Gleichung k einen festen Wert und wollen dann beweisen, dass ∞^1 solche W-Systeme construiert werden können, deren einer Brennflächenmantel S ist und deren zweiter Brennflächenmantel $\bar{S}$ in jedem entsprechenden Punkte dasselbe Krümmungsmass wie S hat.

Bei diesen Strahlensystemen ist infolge der Gleichung (24), S. 320, die Entfernung der Brennpunkte

$$\delta = \varrho \sin\sigma .$$

Wir betrachten nun in jedem Punkte von S die Richtungen der Krümmungslinien, deren Richtungscosinus wir mit X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 bezeichnen. Auf der Bildkugel sind nach S. 120 diese beiden Richtungen die Halbierungslinien der Winkel zwischen den Parameterlinien u, v; es gelten daher die in § 149 (S. 278) abgeleiteten Formeln, die wir der grösseren Klarheit halber hier nochmals zusammenstellen*):

$$\tag{42} \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \sqrt{e}\left(\sin\dfrac{\Omega}{2}X_1 + \cos\dfrac{\Omega}{2}X_2\right), & \dfrac{\partial X}{\partial v} = \sqrt{g}\left(-\sin\dfrac{\Omega}{2}X_1 + \cos\dfrac{\Omega}{2}X_2\right), \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -AX_2 - \sqrt{e}\sin\dfrac{\Omega}{2}X, & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \quad BX_2 + \sqrt{g}\sin\dfrac{\Omega}{2}X, \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \quad AX_1 - \sqrt{e}\cos\dfrac{\Omega}{2}X, & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -BX_1 - \sqrt{g}\cos\dfrac{\Omega}{2}X; \end{cases}$$

*) Die obigen und die umstehenden Formeln beziehen sich auf das Quadrat des Linienelements der Bildkugel

$$ds'^2 = e\,du^2 + 2\cos\Omega\sqrt{eg}\,du\,dv + g\,dv^2,$$

und mit $\dfrac{1}{\varrho_u}$, $\dfrac{1}{\varrho_v}$ sind die geodätischen Krümmungen der sphärischen Curven u, v bezeichnet.

$$(43)\quad \begin{cases} A = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{e}{g}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\sin\Omega = -\frac{\sqrt{e}}{\varrho_v} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}, \\ B = \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{g}{e}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'\sin\Omega = -\frac{\sqrt{g}}{\varrho_u} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}. \end{cases}$$

Für die Coordinaten x, y, z eines Punktes F von S geben dann die Gleichungen (13), § 64, S. 126:

$$(44)\quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \quad \varrho\sqrt{e}\left(\cos\frac{\Omega}{2}X_1 - \sin\frac{\Omega}{2}X_2\right), \\ \frac{\partial x}{\partial v} = -\varrho\sqrt{g}\left(\cos\frac{\Omega}{2}X_1 + \sin\frac{\Omega}{2}X_2\right) \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit φ den unbekannten Neigungswinkel des Focalabstands FF' gegen die von F auf S ausgehende Richtung (X_1, Y_1, Z_1), so erhalten wir für die Coordinaten x', y', z' von F' offenbar die Ausdrücke:

$$(45)\quad \begin{cases} x' = x + \varrho\sin\sigma(\cos\varphi X_1 + \sin\varphi X_2), \\ y' = y + \varrho\sin\sigma(\cos\varphi Y_1 + \sin\varphi Y_2), \\ z' = z + \varrho\sin\sigma(\cos\varphi Z_1 + \sin\varphi Z_2). \end{cases}$$

Nun müssen wir φ den Bedingungen unserer Aufgabe unterwerfen. Hierzu beweisen wir zunächst, dass φ so bestimmt werden kann, dass die in F' zur Fläche S', der Ortsfläche des durch die Gleichungen (45) bestimmten Punktes $F'(x', y', z')$, gezogene Normale die Richtungscosinus

$$(46)\quad \begin{cases} X' = \cos\sigma X + \sin\sigma(\cos\varphi X_2 - \sin\varphi X_1), \\ Y' = \cos\sigma Y + \sin\sigma(\cos\varphi Y_2 - \sin\varphi Y_1), \\ Z' = \cos\sigma Z + \sin\sigma(\cos\varphi Z_2 - \sin\varphi Z_1) \end{cases}$$

hat; ist dieses bewiesen, so ist die Fläche S' offenbar der zweite Brennflächenmantel des so construierten Strahlensystems. Bilden wir nun die beiden Gleichungen:

$$\sum X'\frac{\partial x'}{\partial u} = 0,$$
$$\sum X'\frac{\partial x'}{\partial v} = 0,$$

die eben besagen, dass die Richtung (X', Y', Z') zur Fläche S' normal ist, so finden wir unter Benutzung der früheren Gleichungen:

$$(47)\quad \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial u} = \quad A + \sqrt{e}\,\frac{1+\cos\sigma}{\sin\sigma}\sin\left(\varphi + \frac{\Omega}{2}\right), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} = -B - \sqrt{g}\,\frac{1-\cos\sigma}{\sin\sigma}\sin\left(\varphi - \frac{\Omega}{2}\right). \end{cases}$$

Wird nun die Identität:

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = -\sqrt{eg}\sin\Omega$$

berücksichtigt, die aus der Liouville'schen Formel für das Krümmungsmass (§ 77, S. 151), sowie auch die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{g}\,\frac{1-\cos\sigma}{\sin\sigma}\right) = \sqrt{e}\cos\Omega\,\frac{1-\cos\sigma}{\sin\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' - \sqrt{g}\,\frac{1+\cos\sigma}{\sin\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}',$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{e}\,\frac{1+\cos\sigma}{\sin\sigma}\right) = \sqrt{g}\cos\Omega\,\frac{1+\cos\sigma}{\sin\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' - \sqrt{e}\,\frac{1-\cos\sigma}{\sin\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'$$

benutzt, die sich ohne Schwierigkeit aus den Gleichungen (a) (S. 332) ergeben, so stellt sich heraus, dass die Integrabilitätsbedingung für die Gleichungen (47) identisch erfüllt ist.

Die Gleichungen (47), die durch eine totale Differentialgleichung für $\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}$ vom Riccati'schen Typus ersetzt werden können, besitzen also eine Lösung φ mit einer willkürlichen Constanten.

Es erübrigt nun noch nachzuweisen, dass für einen beliebigen von den Werten φ, die diesen Gleichungen genügen, das construierte Strahlensystem zur W-Klasse gehört, denn dann folgt aus dem Satz S. 320 unmittelbar, dass das Krümmungsmass von S' gleich demjenigen von S ist. Es braucht also nur nachgewiesen zu werden, dass auch auf der Fläche S' die Curven u, v Haupttangentencurven sind, d. h. dass die beiden Gleichungen:

$$\sum \frac{\partial X'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial X'}{\partial v}\frac{\partial x'}{\partial v} = 0$$

bestehen. Wird die Rechnung ausgeführt, so ergiebt sich, dass die Gleichungen genau in die beiden Gleichungen (a), S. 332, die σ bestimmen, übergehen.

Wir bemerken schliesslich, dass wir wegen der bekannten Eigenschaften der Riccati'schen Differentialgleichung nur eine particuläre Lösung der Gleichungen (47) zu kennen brauchen, um die allgemeine Lösung mittels Quadraturen zu finden. Hiernach gilt für die neu abgeleiteten Flächen der Klasse (40) dasselbe, wie für die Ausgangsfläche, und es sind nur Quadraturen erforderlich, um das Verfahren unbegrenzt oft anzuwenden. Können wir ferner für die Ausgangsfläche alle unendlich kleinen Verbiegungen bestimmen, so gilt nach dem Satze von Moutard das nämliche für alle abgeleiteten Flächen. Dieses ist nun eben der Fall, wenn wir als Ausgangsfläche S die Pseudosphäre, die Minimal-Schraubenregelfläche oder das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid,

die Vertreter der drei vorhin betrachteten Typen von Flächen (40), wählen *).

§ 177. Sätze von Cosserat.

Die associierten Flächen der in den beiden voraufgehenden Paragraphen betrachteten Flächen besitzen eine bemerkenswerte charakteristische Eigenschaft, die von Cosserat entdeckt worden ist **). Um dieselbe zu finden, stellen wir uns die Frage: Welche Flächen können so verbogen werden, dass ein ursprünglich conjugiertes System (u, v) conjugiert bleibt? Als Parameterlinien auf der gesuchten Fläche S wählen wir das conjugierte System (u, v). Da $D' = 0$ ist, lauten die Codazzi'schen Gleichungen (S. 91, (IV)):

$$(48)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D = 0, \\ \dfrac{\partial D''}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} D - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' = 0. \end{cases}$$

Nach der Verbiegung ist D' immer noch gleich Null, und da das Product DD'' ungeändert bleiben soll, so können wir die neuen Werte von D und D'' mit

$$\lambda D, \quad \frac{D''}{\lambda}$$

bezeichnen. Setzen wir sie in die Gleichungen (48) ein und berücksichtigen wir diese mit, so finden wir für die unbekannte Function λ die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{D}{D''}\left(\frac{1}{\lambda} - \lambda\right), \quad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{D''}{D}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Statt λ führen wir mittels der Substitution: $\lambda^2 = 1 + \frac{1}{\nu}$ eine andere unbekannte Function ν ein. Wenn wir uns dabei der Gleichungen (25), S. 135:

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{D}{D''} = -\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}', \quad \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{D''}{D} = -\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}',$$

in denen die Symbole rechts für das Quadrat des Linienelements der Kugel gebildet sind, erinnern, so erhalten wir:

$$(49)\qquad \frac{\partial \nu}{\partial u} = 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'(\nu + 1), \quad \frac{\partial \nu}{\partial v} = 2\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}'\nu.$$

*) Hinsichtlich der weiteren Ausführung vergleiche man die Abhandlung des Verfassers in den Annali di Matematica, 2. Serie, 18. Bd. (1890).

**) Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences, 12. u. 19. October 1891.

Jede Lösung ν dieser Gleichungen liefert eine Lösung der Aufgabe; da nun aber diese Gleichungen in ν linear sind, so können sie nicht mehr als eine Lösung haben, wofern sie nicht unbeschränkt integrierbar sind und dann unendlich viele Lösungen haben. Damit letzterer Fall zutrifft, ist es notwendig und hinreichend, dass

$$(50) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}' = 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}'$$

ist, d. h. die Fläche S muss nach S. 332 die Associierte einer Fläche der im vorigen Paragraphen betrachteten Klasse sein. Wir haben also gefunden:

Wenn eine Fläche S mehr als eine solche Verbiegung gestattet, bei der ein ursprünglich conjugiertes System conjugiert bleibt, so gestattet sie eine stetige Aufeinanderfolge solcher Verbiegungen. Diese Flächen S sind sämtlich und ausschliesslich die Associierten derjenigen Flächen, deren Krümmungsmass K, ausgedrückt durch die Parameter der Haupttangentencurven, die Form (40)

$$K = -\frac{1}{[\varphi(u)+\psi(v)]^2}$$

hat.

Nach den Entwickelungen der voraufgehenden Paragraphen sind wir im Stande, lediglich durch Quadraturen beliebig viele Flächen zu finden, die der hier betrachteten Verbiegungen fähig sind.

§ 178. Beispiele.

Diese allgemeinen Ergebnisse wollen wir auf drei Beispiele anwenden.

1) Das auf der Kugel von den Meridianen und den Parallelkreisen gebildete System genügt den Bedingungen (50). Daher gestatten alle Gesimsflächen mit cylindrischer Abwickelung (§ 74, S. 144) eine stetige Aufeinanderfolge von Verbiegungen, bei denen ihre Krümmungslinien beständig Krümmungslinien bleiben. Umgekehrt lässt sich unter Benutzung der Gleichungen (50) leicht nachweisen, dass dieses die einzigen Flächen sind, die solcher Verbiegungen fähig sind. Diejenige Fläche, der sie associiert sind, ist die Rotationsminimalfläche, d. h. das Catenoid.

2) Wir betrachten das gleichseitige hyperbolische Paraboloid, das zur Klasse (40) gehört.

Da die sphärischen Bilder seiner Erzeugenden grösste (geodätische) Kreise sind, so ist

$$\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}' = 0, \quad \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}' = 0,$$

demnach für die dem Paraboloid associierten Flächen (§ 69, S. 135, Formeln (25)):

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0.$$

Dieselben sind also nach S. 137, oben, Translationsflächen, deren erzeugende Curven, wie leicht ersichtlich, eben sind und in lotrechten Ebenen liegen. Umgekehrt ist jede Translationsfläche dieser Art eine Associierte des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids. Es gehört demnach zu jeder solchen Translationsfläche eine einfach unendliche Schar von Flächen derselben Klasse, die auf einander abwickelbar sind.

3) Schliesslich betrachten wir eine beliebige pseudosphärische Fläche S. Ihre Associierten sind Voss'sche Flächen, auf denen die Bilder der Haupttangentencurven von S ein conjugiertes System geodätischer Linien bilden. Jede Voss'sche Fläche kann somit in stetiger Weise so verbogen werden, dass das conjugierte geodätische System conjugiert bleibt. In diesem Falle ist die im voraufgehenden Paragraphen mit λ bezeichnete Function eine Constante, woraus erhellt, dass sich bei der Verbiegung die erste und die zweite Krümmung der geodätischen Linien bei dem einen System mit einer Constanten, bei dem anderen mit dem reciproken Wert derselben multiplicieren.

Kapitel XIII.

Die normalen Kreissysteme.

Bedingung dafür, dass eine Schar von ∞^2 Curven eine Schar Orthogonalflächen hat. — Normale Kreissysteme oder Cykelsysteme. — Grundlegende Sätze von Ribaucour. — Dreifaches Orthogonalsystem von Flächen, das zu einem normalen Kreissystem gehört. — Cyklische Strahlensysteme, die von den Axen eines normalen Kreissystems gebildet werden. — Bedingungen dafür, dass ein Strahlensystem cyklisch ist. — Strahlensysteme, die auf unendlich viele Weisen cyklisch sind. — Das Cykelsystem, in dem alle Kreise gleich gross sind. — Ausdruck für das Linienelement des Raumes, bezogen auf ein normales Kreissystem. — Bestimmung der sphärischen Bilder der Abwickelbaren eines cyklischen Strahlensystems.

---

§ 179. Bedingung dafür, dass eine Schar von ∞^2 Curven eine Schar Orthogonalflächen hat.

In engem Zusammenhange mit der Lehre von den geradlinigen Strahlensystemen und den unendlich kleinen Verbiegungen der Flächen steht die Theorie, die wir in dem vorliegenden Kapitel behandeln wollen und die sich auf Scharen von ∞^2 Kreisen bezieht, die eine Schar Orthogonalflächen besitzen.

Eine solche Kreisschar werde kurz ein normales Kreissystem oder auch nach der Bezeichnung Ribaucours, von dem diese Theorie entwickelt worden ist, ein Cykelsystem genannt.

Wir schicken unserer Untersuchung die Ableitung der Bedingung voraus, der eine Schar von ∞^2 Curven im Raume, eine sogenannte Curvencongruenz, genügen muss, damit es eine Schar von Flächen gebe, die zu diesen Curven orthogonal sind*). Wir schreiben die Gleichungen der Congruenzcurven in der Form:

(1) $$\xi = \xi(u, v, t), \quad \eta = \eta(u, v, t), \quad \zeta = \zeta(u, v, t),$$

---

*) Vgl. Beltrami, Ricerche di analisi applicata alla geometria. Giornale di Matematiche, 2. Bd.

wo u, v zwei willkürliche Parameter sind, deren einzelne Werte u_0, v_0 eine Curve C_0 der Schar eindeutig bestimmen, während die Variable t dann die Punkte der Curve festlegt.

Wir wollen nun annehmen, dass es eine zu den Curven orthogonale Fläche Σ gebe, und es sei

(2) $$t = t(u, v)$$

diejenige Function von u, v, die wir, um Σ zu erhalten, in die Gleichungen (1) einsetzen müssen. Durch einen Punkt (ξ, η, ζ) dieser Fläche, der den Werten $u = u_0$, $v = v_0$ entspricht, geht die Curve der Schar

$$\xi = \xi(u_0, v_0, t), \quad \eta = \eta(u_0, v_0, t), \quad \zeta = \zeta(u_0, v_0, t),$$

und die Richtungscosinus ihrer Tangente sind proportional

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Nach der Voraussetzung muss also

(3) $$\frac{\partial \xi}{\partial t} d\xi + \frac{\partial \eta}{\partial t} d\eta + \frac{\partial \zeta}{\partial t} d\zeta = 0$$

sein, worin $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ aus den Gleichungen (1) zu berechnen sind und für t der Wert (2) einzusetzen ist. Nun setzen wir:

$$T = \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2, \quad U = \sum \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial u}, \quad V = \sum \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Dann nimmt die Gleichung (3) die Gestalt an:

(4) $$T dt + U du + V dv = 0.$$

Der gesuchte Wert t muss als Function von u, v dieser totalen Differentialgleichung genügen. Damit es also eine Schar von Flächen Σ gebe, die zu den Curven orthogonal sind, ist es notwendig und hinreichend, dass die Gleichung (4) unbeschränkt integrierbar sei, d. h. dass für alle Werte von t, u, v ihre Integrabilitätsbedingung:

(5) $$T\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) + U\left(\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial T}{\partial v}\right) + V\left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial t}\right) = 0$$

erfüllt sei. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so kann es nur einzelne Flächen geben, die zu den Curven orthogonal sind; dieses ist dann der Fall, wenn die Gleichung (5) für t einen oder mehrere Werte liefert, die der Differentialgleichung (4) genügen.

§ 180. Normale Kreissysteme und Sätze von Ribaucour.

Wir nehmen nun an, die Congruenz (1) werde von Kreisen gebildet. Um sie analytisch zu definieren, brauchen wir nur die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Kreismittelpunkts, den Radius R und die

Lage der Kreisebene, d. h. die Richtungscosinus des auf sie errichteten Lotes, die wir mit α, β, γ bezeichnen wollen, als Functionen von u, v anzugeben. Wird dieses Lot im Mittelpunkt des Kreises errichtet, so nennen wir es die Axe des Kreises, und wie sich bald herausstellen wird, müssen wir mit der Betrachtung des normalen Kreissystems diejenige des von den Kreisaxen gebildeten Strahlensystems verbinden.

In der Ebene des Kreises (u, v) ziehen wir zwei auf einander senkrechte, im übrigen willkürliche Durchmesser und bezeichnen ihre Richtungscosinus bezüglich mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$. Bezeichnen wir noch mit t den Winkel zwischen einem Radius des Kreises (u, v) und der Richtung $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, so lauten die Gleichungen (1) in unserem Falle:

$$(6)\qquad \begin{cases} \xi = x_1 + R(\alpha_1 \cos t + \alpha_2 \sin t), \\ \eta = y_1 + R(\beta_1 \cos t + \beta_2 \sin t), \\ \zeta = z_1 + R(\gamma_1 \cos t + \gamma_2 \sin t). \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der Relationen:

$$\sum \alpha_1^2 = 1, \quad \sum \alpha_2^2 = 1, \quad \sum \alpha_1 \alpha_2 = 0$$

erhalten wir als totale Differentialgleichung (4):

$$(7)\quad R\,dt + \left[\cos t \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} - \sin t \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + R \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u}\right] du + \\ + \left[\cos t \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} - \sin t \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + R \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\right] dv = 0.$$

Die Integrabilitätsbedingung nimmt hier die Gestalt:

$$(8)\qquad A + B \sin t + C \cos t = 0$$

an, wo A, B, C Functionen von u und v allein sind. Es giebt also nur dann eine Schar von ∞^1 Flächen, die zu den Kreisen orthogonal sind, wenn identisch

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

ist. Entwickelt liefern diese Bedingungen die folgenden drei Grundgleichungen:

$$(\mathrm{I})\quad R^2 \left[\frac{\partial}{\partial v} \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v}\right] + \\ + \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} - \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} \cdot \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0,$$

$$(\mathrm{II})\quad R \left[\sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} \cdot \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} - \sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} \cdot \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u} \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial v} \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u}\right] + \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial R}{\partial v} - \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial R}{\partial u} = 0,$$

$$(\mathrm{III})\quad R\left[\sum\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}\cdot\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial u}-\sum\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}\cdot\sum\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial v}+\frac{\partial}{\partial v}\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial u}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial}{\partial u}\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial v}\right]-\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}+\sum\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u}=0\ ^{*}).$$

Wenn sie nicht identisch erfüllt sind, so liefert die Gleichung (8) höchstens zwei Flächen, die zu den Kreisen orthogonal sind, woraus sich der Satz von Ribaucour ergiebt:

Sind die Kreise einer Schar von ∞^2 Kreisen zu drei verschiedenen Flächen normal, so sind sie es zu einer ganzen Schar von ∞^1 Flächen.

Es dürfte ferner hervorzuheben sein, dass die Gleichung (7), wenn

$$A=\operatorname{tang}\frac{t}{2}$$

als Unbekannte eingeführt wird, die Riccati'sche Form:

$$dA=(aA^2+bA+c)du+(a'A^2+b'A+c')dv$$

annimmt, wo a, b, c; a', b', c' bekannte Functionen von u, v sind. Man braucht also nur eine der zu den Kreisen orthogonalen Flächen zu kennen, um alle übrigen mittels Quadraturen zu finden.

Die Eigenschaft der Riccati'schen Gleichung, dass das Doppelverhältnis von vier particulären Lösungen A_1, A_2, A_3, A_4 constant (unabhängig von u, v) ist, findet hier die entsprechende geometrische Deutung in dem Satz von Ribaucour:

Vier Flächen aus der zu einem Kreissystem orthogonalen Schar bestimmen auf allen Kreisen des Systems je vier Punkte, deren Doppelverhältnis constant ist**).

§ 181. Formeln für normale Kreissysteme.

Wir betrachten ein normales Kreissystem und wählen als Ausgangsfläche S eine der Orthogonalflächen. Diese Fläche S beziehen wir auf ihre Krümmungslinien, indem wir unter Beibehaltung unserer üblichen Bezeichnungen (§ 49, S. 94)

$$X_1=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u},\quad X_2=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\quad \text{u. s. w.}$$

*) Durch Auflösung der letzten beiden Gleichungen nach $\frac{\partial R}{\partial u}$ und $\frac{\partial R}{\partial v}$ könnten diese drei Gleichungen leicht in eine Form gebracht werden, in der nur die Richtungscosinus α, β, γ der Kreisaxe anstatt α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2 auftreten würden.

**) Es ist nämlich $A=\operatorname{tang}\frac{t}{2}$ der Parameter des Büschels, das vom Endpunkt des Radius (α_1, β_1, γ_1) aus die Punkte des Kreises projiciert.

setzen. Wir haben dann nach (4), S. 95, und (14), S. 102, die Gleichungen:

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{r_2} X_1, & \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \dfrac{\sqrt{E}}{r_2} X, \\ & \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_1; \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{G}}{r_1} X_2, & \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_2, \\ & \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} X_1 - \dfrac{\sqrt{G}}{r_1} X. \end{cases}$$

Durch jeden Punkt P von S geht ein Kreis (u, v) des Systems normal zu S hindurch. Um ihn zu bestimmen, brauchen wir nur seinen Radius R und den Winkel φ anzugeben, den die Spur seiner Ebene in der Tangentialebene mit der Richtung (X_1, Y_1, Z_1) bildet.

Für die Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Mittelpunktes haben wir dann:

$$(10)\quad \begin{cases} x_1 = x + R(\cos\varphi X_1 + \sin\varphi X_2), \\ y_1 = y + R(\cos\varphi Y_1 + \sin\varphi Y_2), \\ z_1 = z + R(\cos\varphi Z_1 + \sin\varphi Z_2). \end{cases}$$

Als die oben benutzte Richtung $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ wählen wir die der erwähnten Spur und demnach als Richtung $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ die der Normale (X, Y, Z) von S. Dann haben wir:

$$(11)\quad \alpha_1 = \cos\varphi X_1 + \sin\varphi X_2, \quad \alpha_2 = X.$$

Berechnen wir mittels (11) und (9) die Summen in der totalen Differentialgleichung (7), so finden wir wegen (13), S. 102:

$$\sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = \sqrt{E}\cos\varphi + \frac{\partial R}{\partial u}, \quad \sum \alpha_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} = \sqrt{G}\sin\varphi + \frac{\partial R}{\partial v},$$

$$\sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} = -\frac{R\sqrt{E}}{r_2}\cos\varphi, \quad \sum \alpha_2 \frac{\partial x_1}{\partial v} = -\frac{R\sqrt{G}}{r_1}\sin\varphi,$$

$$\sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = -\sum \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u} = -\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{r_2},$$

$$\sum \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = -\sum \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial v} = -\frac{\sqrt{G}\sin\varphi}{r_2}.$$

Also lautet die totale Differentialgleichung (7) wie folgt:

$$(12)\quad dt = \left[\sin t\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\right) + \frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{r_2}(1 + \cos t)\right] du + \\ + \left[\sin t\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial v} + \frac{\sqrt{G}\sin\varphi}{R}\right) + \frac{\sqrt{G}\sin\varphi}{r_1}(1 + \cos t)\right] dv,$$

und die Integrabilitätsbedingungen (I), (II), (III) reducieren sich auf die beiden folgenden:

$$(\mathrm{IV})\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\sqrt{G}\sin\varphi}{R}\right)-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\right)=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\sqrt{G}\sin\varphi}{R}\cdot\dfrac{1}{r_1}\right)-\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\cdot\dfrac{1}{r_2}\right)+\\ \qquad\qquad +\dfrac{\sqrt{EG}}{R^2}\sin\varphi\cos\varphi\left(\dfrac{1}{r_2}-\dfrac{1}{r_1}\right)=0. \end{cases}$$

§ 182. Laplace'sche Gleichung, von der die normalen Kreissysteme abhängen.

Ist die Fläche S eine Kugel, so sind die beiden Gleichungen (IV) genau dieselben, und die entsprechenden Kreissysteme ergeben sich leicht auf Grund des Satzes in § 180, wenn noch eine Fläche S' willkürlich angenommen und diejenige Schar von ∞^2 Kreisen construiert wird, die gleichzeitig zur Kugel S und zur Fläche S' normal sind. Denn da die Kugel zweimal als zu den Kreisen normale Fläche zählt, so besitzt dieses System drei Orthogonalflächen und ist daher nach S. 342 stets ein normales System. Dieselbe Betrachtung gilt insbesondere auch für den Fall, dass an Stelle der Kugel S eine Ebene tritt, wie sich auch aus der Anwendung einer Transformation mittels reciproker Radienvectoren ergiebt.

Wir setzen nun voraus, dass die Fläche S keine Kugel sei, und lösen unter Zuhilfenahme der Gleichungen (§ 123, S. 234, (1)):

$$(\mathrm{a})\qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{r_1}\right)=\frac{1}{r_2}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u},\qquad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)=\frac{1}{r_1}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$$

die Gleichungen (IV) nach $\dfrac{\partial R}{\partial u}$ und $\dfrac{\partial R}{\partial v}$ auf. Dann erhalten wir:

$$(\mathrm{IV}^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial u}= \quad R\cot\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}-\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)-\sqrt{E}\cos\varphi,\\ \dfrac{\partial R}{\partial v}=-R\operatorname{tang}\varphi\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}+\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)-\sqrt{G}\sin\varphi. \end{cases}$$

Infolge der ersten der Gleichungen (IV) muss der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}\,du+\frac{\sqrt{G}\sin\varphi}{R}\,dv$$

ein vollständiges Differential sein. Wenn wir noch mit ψ eine unbekannte Hilfsfunction bezeichnen, können wir demnach

$$\frac{\sqrt{E}\cos\varphi}{R}=-\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u},\qquad \frac{\sqrt{G}\sin\varphi}{R}=-\frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial v}$$

setzen. Dann liefert die zweite der Gleichungen (IV) unter Berücksichtigung der eben angeführten Gleichungen (a) für ψ die Laplace'sche Gleichung:

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

Ist umgekehrt ψ eine Lösung dieser Gleichung, so ergiebt sich ein entsprechendes Cykelsystem aus den folgenden Gleichungen:

$$(13) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{R^2} = \dfrac{1}{E}\left(\dfrac{\partial \log \psi}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{1}{G}\left(\dfrac{\partial \log \psi}{\partial v}\right)^2 = \Delta_1 \log \psi, \\ \cos\varphi = -\dfrac{R}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \log \psi}{\partial u}, \quad \sin\varphi = -\dfrac{R}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \log \psi}{\partial v}. \end{cases}$$

Wird die Function ψ eingesetzt und $\tang \frac{t}{2}$ wie oben gleich $\varLambda$ gesetzt, so geht die totale Differentialgleichung (12) in:

$$d\varLambda = \left(\varLambda \frac{\partial}{\partial u} \log\left(\frac{R}{\psi}\right) - \frac{R}{r_2} \frac{\partial \log \psi}{\partial u}\right) du + \left(\varLambda \frac{\partial}{\partial v} \log\left(\frac{R}{\psi}\right) - \frac{R}{r_1} \frac{\partial \log \psi}{\partial v}\right) dv$$

über und ergiebt mittels einer Quadratur:

$$\text{(VI)} \qquad \tang \frac{t}{2} = \frac{R}{\psi}\left\{C - \int\left(\frac{1}{r_2} \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial v} dv\right)\right\}$$

(C eine willkürliche Constante).

Von der Laplace'schen Gleichung (V) hängt auch die Bestimmung derjenigen Flächen ab, welche dieselben sphärischen Bilder der Krümmungslinien haben, wie die Fläche S. Daraus geht hervor, dass **die Aufgabe, die zu einer bestimmten Fläche S normalen Kreissysteme zu finden, mit der Bestimmung derjenigen Flächen gleichbedeutend ist, welche mit S die sphärischen Bilder der Krümmungslinien gemein haben***). Offenbar sind

$$x, \; y, \; z, \quad x^2 + y^2 + z^2 + c$$

particuläre Lösungen der Gleichung (V); die entsprechenden Kreisysteme sind die vorhin betrachteten, die von den zur Fläche S und einer festen Ebene (Coordinatenebene) oder einer Kugel normalen Kreisen gebildet werden. Die Kugel selbst wird reell oder imaginär, je nachdem die Constante $c < 0$ oder > 0 ist. Ist $c = 0$, so gehen alle Kreise durch einen Punkt.

---

*) Die Gleichung, auf deren Integration wir die Aufgabe, die Flächen mit gegebenen sphärischen Bildern der Krümmungslinien zu bestimmen, zurückgeführt haben, ist eigentlich die folgende (s. S. 141, unten):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E'}}{\partial v} \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial \log \sqrt{G'}}{\partial u} \frac{\partial W}{\partial v},$$

worin E', G' die Coefficienten beim Linienelement der Kugel sind; aber die Lösungen dieser Gleichung sind mit denjenigen der Gleichung (V) des Textes durch die einfachen Beziehungen verbunden:

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{1}{r_2} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial W}{\partial v} = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \psi}{\partial v}.$$

§ 183. Dreifaches Orthogonalsystem von Flächen, das zu einem normalen Kreissystem gehört.

Ist P ein Punkt einer Fläche S, die zu einem normalen Kreissystem orthogonal ist, so ziehen wir an die Krümmungslinien $v = \text{Const.}$, $u = \text{Const.}$ die Tangenten PA und PB. Es seien dabei A und B die Punkte, in denen die Tangenten die Axe des durch P gehenden Kreises C schneiden. Bezeichnen wir mit $\xi_1, \eta_1, \zeta_1; \xi_2, \eta_2, \zeta_2$ die Coordinaten von A bez. B, so finden wir unmittelbar:

$$\xi_1 = x + \frac{R}{\cos\varphi} X_1, \quad \eta_1 = y + \frac{R}{\cos\varphi} Y_1, \quad \zeta_1 = z + \frac{R}{\cos\varphi} Z_1,$$

$$\xi_2 = x + \frac{R}{\sin\varphi} X_2, \quad \eta_2 = y + \frac{R}{\sin\varphi} Y_2, \quad \zeta_2 = z + \frac{R}{\sin\varphi} Z_2.$$

Durch Differentiation der ersten Gleichungen nach v, der zweiten nach u und unter Berücksichtigung der Gleichungen (9) und (IV*) ergiebt sich:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial v} : \frac{\partial \eta_1}{\partial v} : \frac{\partial \zeta_1}{\partial v} = \frac{\partial \xi_2}{\partial u} : \frac{\partial \eta_2}{\partial u} : \frac{\partial \zeta_2}{\partial u} = (\cos\varphi X_2 - \sin\varphi X_1) : (\cos\varphi Y_2 - \sin\varphi Y_1) : (\cos\varphi Z_2 - \sin\varphi Z_1).$$

Da die drei letzten Ausdrücke die Richtungscosinus der Kreisaxe sind, so erhellt nach S. 264, dass die beiden Punkte A, B die Brennpunkte dieser Axe in dem von den Kreisaxen gebildeten Strahlensystem sind; die Developpabeln des Strahlensystems sind folglich reell und gehören zu den Krümmungslinien der Fläche S.

Wir betrachten nun alle Flächen Σ, die zu den Kreisen orthogonal sind, und die beiden Scharen von Ortsflächen der Kreise

$$u = \text{Const.} \quad \text{und} \quad v = \text{Const.},$$

welche wir mit Σ_1, Σ_2 bezeichnen. Dann können wir leicht den Satz von Ribaucour beweisen: Die drei Flächenscharen Σ, Σ_1, Σ_2 bilden ein dreifaches Orthogonalsystem.

In der That, betrachten wir eine Fläche Σ_1 ($u = \text{Const.}$). Sie schneidet alle Flächen Σ orthogonal längs Krümmungslinien von Σ, die folglich nach S. 97 auch für Σ_1 Krümmungslinien sind. Daraus folgt, dass auf Σ_1 die Krümmungslinien die Kreise C und deren Orthogonaltrajectorien sind. Die Normale der Fläche Σ_1 in P ist also die Tangente PA der Krümmungslinie v von Σ, und ebenso ist die Normale von Σ_2 die Tangente PB der Curve u auf Σ, woraus sich die Richtigkeit des Satzes ergiebt.

Ferner sehen wir, dass, wenn wir mit 2ϱ die Entfernung AB der

Brennpunkte bezeichnen, zwischen dem Abstand δ des Kreismittelpunkts vom Mittelpunkt der Axe und dem Kreisradius R die Beziehung:

$$R^2 + \delta^2 = \varrho^2$$

besteht, sodass wir, unter σ einen reellen Winkel verstehend,

$$\delta = \varrho \cos\sigma, \quad R = \varrho \sin\sigma$$

setzen können.

§ 184. Cyklische Strahlensysteme.

Nach dem Obigen besitzt das von den Axen eines normalen Kreissystems gebildete Strahlensystem stets reelle Developpabeln, und es gehören zu diesen die Krümmungslinien der zu den Kreisen orthogonalen Flächen. Wir bezeichnen ein Strahlensystem als cyklisch, wenn es ein normales Kreissystem giebt, dessen Axen die Strahlen des Strahlensystems sind. Wir wollen nun die Bedingung dafür aufstellen, dass ein gegebenes Strahlensystem cyklisch ist. Wie wir sehen werden, hängt diese Bedingung nur von den sphärischen Bildern der Developpabeln des Strahlensystems ab, und wir wollen hier, wo wir nur den allgemeinen Fall betrachten, annehmen, dass diese Bilder zwei verschiedene Scharen von Curven u, v seien.

Indem wir auf die Guichard'schen Gleichungen (§ 148 ff., S. 274) zurückgehen, aus denen sich die Strahlensysteme mit gegebenen sphärischen Bildern der Developpabeln:

$$(14) \qquad ds'^2 = E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2$$

ergeben, erinnern wir daran, dass ϱ, die halbe Entfernung der Brennpunkte, der Laplace'schen Gleichung (S. 276):

$$(15) \quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + F \right] \varrho = 0$$

genügt, und dass umgekehrt jeder Lösung ϱ dieser Gleichung ein Strahlensystem der verlangten Art entspricht, für das die Coordinaten x, y, z des Mittelpunkts eines Strahls mittels Quadraturen durch die Gleichungen (32), S. 279:

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial \varrho}{\partial u} + 2 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \varrho \right] X - \sqrt{E} \sin \dfrac{\Omega}{2}\, \varrho X_1 - \sqrt{E} \cos \dfrac{\Omega}{2}\, \varrho X_2, \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + 2 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \varrho \right] X - \sqrt{G} \sin \dfrac{\Omega}{2}\, \varrho X_1 + \sqrt{G} \cos \dfrac{\Omega}{2}\, \varrho X_2 \end{cases}$$

gegeben sind. Bezeichnen wir, wie vorhin, mit

$$\delta = \varrho \cos\sigma, \quad R = \varrho \sin\sigma$$

die Entfernung des Kreismittelpunkts (x_1, y_1, z_1) vom Strahlmittelpunkt (x, y, z) und den Radius, so müssen wir in unseren allgemeinen Gleichungen (S. 341)

$$x_1 = x + \varrho X \cos\sigma, \quad y_1 = y + \varrho Y \cos\sigma, \quad z_1 = z + \varrho Z \cos\sigma$$

setzen, können also ohne weiteres

$$\alpha_1 = X_1, \quad \beta_1 = Y_1, \quad \gamma_1 = Z_1,$$
$$\alpha_2 = X_2, \quad \beta_2 = Y_2, \quad \gamma_2 = Z_2$$

annehmen. Unter Benutzung der Gleichungen (30), S. 278, erhalten wir nun zunächst:

$$(17) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial}{\partial u}\{\varrho(1+\cos\sigma)\} + 2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\right]X - \\ \qquad - \sqrt{E}\sin\dfrac{\Omega}{2}\varrho(1-\cos\sigma)X_1 - \sqrt{E}\cos\dfrac{\Omega}{2}\varrho(1-\cos\sigma)X_2, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial}{\partial v}\{\varrho(1-\cos\sigma)\} + 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\right]X - \\ \qquad - \sqrt{G}\sin\dfrac{\Omega}{2}\varrho(1+\cos\sigma)X_1 + \sqrt{G}\cos\dfrac{\Omega}{2}\varrho(1+\cos\sigma)X_2, \end{cases}$$

demnach als totale Differentialgleichung (7), S. 341, die folgende:

$$(18) \qquad dt = \left[\sqrt{E}\,\mathrm{tang}\frac{\sigma}{2}\cos\left(t+\frac{\Omega}{2}\right) + A\right]du - \\ - \left[\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(t-\frac{\Omega}{2}\right) + B\right]dv,$$

worin nach (31) und (31*) auf S. 278

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\sin\Omega = -\frac{\sqrt{E}}{\varrho_v} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u},$$
$$B = \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\sin\Omega = -\frac{\sqrt{G}}{\varrho_u} - \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$

ist. Diese totale Differentialgleichung besitzt die bemerkenswerte Eigentümlichkeit, dass sie lediglich von den sphärischen Bildern der Developpabeln des Strahlensystems abhängt. Daraus folgt: **Alle Strahlensysteme, die mit einem cyklischen Strahlensystem die sphärischen Bilder der Developpabeln gemein haben, sind gleichfalls cyklisch.**

Wenn wir nun die Integrabilitätsbedingungen für die Gleichung (18) ansetzen und dabei berücksichtigen, dass

$$\frac{\partial A}{\partial v} + \frac{\partial B}{\partial u} = -\sqrt{EG}\sin\Omega$$

ist (vgl. S. 335), so finden wir als Bedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\right) = \sqrt{E}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2}\cos\Omega - \sqrt{G}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\right) = \sqrt{G}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\Omega - \sqrt{E}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2}.$$

Wenn die Differentialquotienten der Coefficienten durch die Christoffel'schen Symbole ausgedrückt werden, so lauten diese Bedingungen so:

$$(19)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\cos\sigma}{\partial u} = 2(\cos\sigma - 1)\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}, \\[2ex] \dfrac{\partial\cos\sigma}{\partial v} = 2(\cos\sigma + 1)\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}. \end{cases}$$

Aus diesen Bedingungen folgt weiterhin die Gleichung:

$$(20)\quad \left(\frac{\partial\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}}{\partial v} - \frac{\partial\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}}{\partial u}\right)\cos\sigma = \frac{\partial\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}}{\partial u} + \frac{\partial\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}}{\partial v} - 4\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix},$$

aus der wir (wofern sie keine Identität ist) für $\cos\sigma$ einen eindeutig bestimmten Wert erhalten; und die Congruenz ist cyklisch (reell), wenn dieser Wert für $\cos\sigma$ dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist und den Gleichungen (19) genügt. Also: Einem cyklischen Strahlensystem kann im allgemeinen nur ein normales Kreissystem zugeordnet werden, dessen Axen die Strahlen sind.

§ 185. Strahlensysteme, die auf unendlich viele Weisen cyklisch sind.

Das soeben gewonnene Ergebnis erleidet eine sehr bemerkenswerte Ausnahme, wenn die Gleichung (20) eine Identität ist, d. h. wenn

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}$$

ist. Diese Bedingungen charakterisieren die sphärischen Curven u, v als Bilder der in den §§ 175 ff., Kap. XII, untersuchten Flächen, deren Krümmungsmass durch den Ausdruck

$$(\text{A})\qquad K = -\frac{1}{[\varphi(u) + \psi(v)]^2}$$

gegeben ist. Wir sehen also, dass die einzigen Strahlensysteme, die in mehr als einer Weise und daher auf unendlich viele Weisen cyklisch sind, diejenigen Ribaucour'schen Congruenzen sind, deren erzeugende Flächen Flächen der Klasse (A) sind.

Aus der Gleichung (20) folgt ferner, dass dieses die einzigen cyklischen Ribaucour'schen Strahlensysteme sind. Unter diesen cyklischen Strahlensystemen sind die bemerkenswertesten die Guichard'schen, deren erzeugende Flächen pseudosphärische Flächen sind und deren Developpabeln folglich die beiden Brennflächen längs Krümmungslinien schneiden (§ 152, S. 284). Da für diese Strahlensysteme $\left\{ {12 \atop 1} \right\}$ und $\left\{ {12 \atop 2} \right\}$ gleich Null ist, so kann der Winkel σ eine beliebige constante Grösse haben*). Wird insbesondere σ gleich $\frac{\pi}{2}$ gesetzt, so liegt der Mittelpunkt jedes Kreises des Systems im Mittelpunkt der Axe, und sein Radius ist gleich der halben Entfernung der Brennpunkte.

Eine weitere Eigenschaft dieser Strahlensysteme folgt aus dem allgemeinen Satze von Ribaucour:

Auf der Fläche, welche die Ebenen der Kreise eines normalen Kreissystems umhüllt, entspricht den Developpabeln des Strahlensystems der Axen ein conjugiertes System.

Mit Hilfe der allgemeinen Gleichungen der voraufgehenden Paragraphen ist dieser Satz leicht zu beweisen. Bezeichnen wir nämlich mit W den Abstand der Ebenen des Kreises (u, v) vom Anfangspunkt, so haben wir:

$$W = \sum Xx + \rho \cos \sigma,$$

und wenn wir die angeführten Gleichungen berücksichtigen, so bestätigt es sich in der That, dass W der Laplace'schen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = \left\{ {12 \atop 1} \right\} \frac{\partial W}{\partial u} + \left\{ {12 \atop 2} \right\} \frac{\partial W}{\partial v} - FW$$

genügt, woraus nach § 73, S. 141, die vorhin angegebene Eigenschaft folgt.

Insbesondere sind bei den unendlich vielen normalen Kreissystemen, die sich aus einem Ribaucour'schen Strahlensystem, dessen erzeugende Flächen zur Klasse (A) gehören, ableiten lassen, die Enveloppen der Kreisebenen die Associierten der in § 177 betrachteten Flächen S. Ist noch specieller die Fläche S pseudosphärisch, so sind die entsprechenden Enveloppen Voss'sche Flächen.

---

*) In Betreff der Eigenschaften der zu den Kreisen orthogonalen Flächen vergleiche man die Abhandlung des Verfassers in den Annali di Matematica, 2. Serie, 18. Bd.

§ 186. **Die normalen Kreissysteme gleich grosser Kreise.**

Eine andere sehr bemerkenswerte Klasse von normalen Kreissystemen ist die von Ribaucour entdeckte, bei der die Radien der Kreise alle einander gleich sind. Um solche Systeme zu construieren, nehmen wir eine pseudosphärische Fläche S vom Radius R und beschreiben in jeder ihrer Tangentialebenen um den Berührungspunkt als Mittelpunkt einen Kreis mit dem Radius R. Aus den Eigenschaften der Evolutenflächen folgt, dass die ∞^1 pseudosphärischen Flächen, welche die Ortsflächen der Mittelpunkte der geodätischen Krümmung für die Scharen von parallelen Grenzkreisen auf S sind (vgl. § 135, S. 254), in der That Orthogonaltrajectorien dieser Kreise sind, sodass die Kreise ein Cykelsystem bilden.

Wollen wir umgekehrt untersuchen, ob dieses die allgemeinsten normalen Kreissysteme mit constantem Radius sind, so brauchen wir nur auf die Gleichungen (IV*), S. 344, zurückzugehen und dabei in ihnen R gleich Const. zu setzen. Lassen wir den Fall, dass φ gleich 0 oder $\frac{\pi}{2}$ ist*), unberücksichtigt, so ergiebt sich aus ihnen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\sqrt{E}\sin\varphi}{R} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\sqrt{G}\cos\varphi}{R} - \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u},$$

und als Integrabilitätsbedingung erhalten wir:

$$-\frac{1}{R^2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\},$$

woraus wir nach (V), S. 94, folgern, dass die zu den Kreisen normalen Flächen pseudosphärische Flächen mit dem Radius R sind. Die Untersuchung lässt sich nun leicht zu Ende führen durch den Nachweis, dass die Enveloppe der Kreisebenen wieder eine pseudosphärische Fläche ist und dass die Kreismittelpunkte die Berührungspunkte sind. In der That folgen aus diesen Gleichungen und den Gleichungen (9), (10), (S. 343), sofort die Beziehungen:

---

*) Die Cykelsysteme mit constantem Radius, die diesem Falle, dessen Erörterung wir hier übergehen, entsprechen, ergeben sich folgendermassen: In einer Ebene zeichne man eine Schar von ∞^1 congruenten Kreisen und lasse dann die Ebene auf einer abwickelbaren Fläche rollen. Das entstehende Kreissystem ist das gesuchte. (Vgl. die beiden Bemerkungen des Verfassers über Cykelsysteme im Giornale di Matematiche, 21. u. 22. Bd.)

$$\sum (\cos\varphi X_2 - \sin\varphi X_1)\frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \quad \sum (\cos\varphi X_2 - \sin\varphi X_1)\frac{\partial x_1}{\partial v} = 0.$$

Demnach hat die Ortsfläche der Kreismittelpunkte die Kreisaxe zur Normale und stellt somit mit jeder pseudosphärischen Fläche des Orthogonalsystems die vollständige Evolutenfläche einer Normalencongruenz vor, bei der die Entfernung der Brennpunkte constant, gleich R, ist. Daher ist sie selbst eine pseudosphärische Fläche mit dem Radius R (vgl. S. 244). Aus dem Gesagten ergiebt sich nun, dass die Normalen einer pseudosphärischen Fläche ein cyklisches Strahlensystem bilden. Hieraus folgt nach dem allgemeinen Satze in § 184, S. 348, dass bei jeder Fläche, die dieselben sphärischen Bilder der Krümmungslinien hat wie eine pseudosphärische Fläche, das von den Normalen gebildete Strahlensystem cyklisch ist. Es ist leicht einzusehen, dass dieses die einzigen cyklischen Normalencongruenzen sind. Setzen wir nämlich in den allgemeinen Gleichungen für A und B, S. 348,

$$\Omega = \frac{\pi}{2},$$

so ergiebt sich wegen (1) und (1*), S. 148:

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}, \quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}.$$

Daher lauten die Gleichungen (19):

$$\frac{\partial \log\sin\frac{\sigma}{2}}{\partial u} = \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log\cos\frac{\sigma}{2}}{\partial v} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}.$$

Es kann also durch Einführung neuer Parameter u, v ohne weiteres

$$\sqrt{E} = \cos\frac{\sigma}{2}, \quad \sqrt{G} = \sin\frac{\sigma}{2}$$

gesetzt werden. Nun sind die Curven u, v, für die das Quadrat des Linienelements der Kugel die Form:

$$ds'^2 = \cos^2\frac{\sigma}{2}\,du^2 + \sin^2\frac{\sigma}{2}\,dv^2$$

annimmt, gerade die Bilder der Krümmungslinien einer pseudosphärischen Fläche, wie sich aus dem Satze C), § 133, S. 250, ergiebt. Also: Die Flächen, deren Normalen eine cyklische Congruenz bilden, sind sämtlich und ausschliesslich diejenigen, welche mit den pseudosphärischen Flächen die Bilder der Krümmungslinien gemein haben.

Wir sehen ferner, dass sowohl die zu den Kreisen orthogonalen

Flächen als auch die Enveloppe der Ebenen dieser Kreise wieder zu derselben Klasse gehören.

§ 187. Ausdruck für das Linienelement des Raumes, bezogen auf ein normales Kreissystem.

Wir kehren nun zu den allgemeinen normalen Kreissystemen (§ 183) zurück. Ist t eine beliebige Lösung der Gleichung (18), so ergeben sich die zu den Kreisen orthogonalen Flächen aus den Gleichungen:

$$(21)\quad \begin{cases} \xi = x + \varrho X \cos\sigma + \varrho \sin\sigma (X_1 \cos t + X_2 \sin t), \\ \eta = y + \varrho Y \cos\sigma + \varrho \sin\sigma (Y_1 \cos t + Y_2 \sin t), \\ \zeta = z + \varrho Z \cos\sigma + \varrho \sin\sigma (Z_1 \cos t + Z_2 \sin t). \end{cases}$$

Nun bezeichnen wir mit w die in t enthaltene willkürliche Constante und betrachten die Coordinaten ξ, η, ζ eines Raumpunkts als Functionen der drei Veränderlichen u, v, w. Durch Differentiation der Gleichungen (21) und unter Berücksichtigung der Gleichungen auf S. 278 finden wir Gleichungen von der Form:

$$(21^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = AX + BX_1 + CX_2, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = A'X + B'X_1 + C'X_2, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial w} = \alpha X_1 + \beta X_2. \end{cases}$$

Wird

$$(22)\quad \begin{cases} L = \dfrac{\partial \varrho}{\partial u} - \sqrt{E} \operatorname{tang} \dfrac{\sigma}{2} \sin\left(t + \dfrac{\Omega}{2}\right) \cdot \varrho + \dfrac{2\cos\sigma}{1 + \cos\sigma} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \varrho, \\ M = \dfrac{\partial \varrho}{\partial v} + \sqrt{G} \cot \dfrac{\sigma}{2} \sin\left(t - \dfrac{\Omega}{2}\right) \cdot \varrho - \dfrac{2\cos\sigma}{1 - \cos\sigma} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \varrho \end{cases}$$

gesetzt, so ist dabei:

$$A = (\cos\sigma + 1)L, \quad B = \cos t \sin\sigma L, \quad C = \sin t \sin\sigma L,$$
$$A' = (\cos\sigma - 1)M, \quad B' = \cos t \sin\sigma M, \quad C' = \sin t \sin\sigma M,$$
$$\alpha = -\varrho \sin t \sin\sigma \frac{\partial t}{\partial w}, \quad \beta = \varrho \cos t \sin\sigma \frac{\partial t}{\partial w}.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich die weiteren:

$$\sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)^2 = 4L^2 \cos^2 \frac{\sigma}{2}, \quad \sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)^2 = 4M^2 \sin^2 \frac{\sigma}{2},$$
$$\sum \left(\frac{\partial \xi}{\partial w}\right)^2 = \varrho^2 \sin^2\sigma \left(\frac{\partial t}{\partial w}\right)^2,$$

$$\sum \frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \sum \frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial w} = 0, \quad \sum \frac{\partial \xi}{\partial w}\frac{\partial \xi}{\partial u} = 0.$$

Daraus folgt wieder der Satz von Ribaucour:

Die Flächen $u = \text{Const.}$, $v = \text{Const.}$, $w = \text{Const.}$ bilden ein dreifaches Orthogonalsystem.

Ferner erhalten wir für das Quadrat des Linienelements des Raumes, $ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$, den Ausdruck

$$(23)\qquad ds^2 = 4\cos^2\frac{\sigma}{2}\, L^2 du^2 + 4\sin^2\frac{\sigma}{2}\, M^2 dv^2 + \varrho^2 \sin^2\sigma \left(\frac{\partial t}{\partial w}\right)^2 dw^2.$$

§ 188. Bestimmung der sphärischen Bilder der Abwickelbaren eines cyklischen Strahlensystems.

Die Aufgabe, die Cykelsysteme zu bestimmen, lässt sich in zwei nach einander zu lösende Aufgaben zerlegen, nämlich:

1) alle Systeme von sphärischen Curven u, v zu bestimmen, welche die Bilder der Developpabeln eines cyklischen Strahlensystems sind;

2) die Strahlensysteme mit gegebenen sphärischen Bildern der Developpabeln zu construieren.

Die zweite Aufgabe ist bereits in § 148, Kap. X, behandelt worden; sie kommt, wie wir gesehen haben, auf die Integration der Laplace'schen Gleichung (15) auf S. 347 hinaus.

Was die erste Aufgabe anbetrifft, so können wir sie vollständig lösen, wenn wir den folgenden Satz benutzen:

Unter den cyklischen Strahlensystemen, die ein und dieselben sphärischen Bilder der Developpabeln haben, können stets unendlich viele von der Beschaffenheit ausgewählt werden, dass die ihnen entsprechenden Kreise durch einen festen Punkt des Raumes gehen.

Sind nämlich die sphärischen Curven u, v fest bestimmt, so bezeichnen wir mit t_0 eine beliebige particuläre Lösung der Gleichung (18), die dem Werte $w = w_0$ zugehöre. Wir bestimmen ϱ aus den beiden simultanen Gleichungen:

$$L = 0, \quad M = 0,$$

d. h. aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial u} = \sqrt{E}\, \operatorname{tang}\frac{\sigma}{2} \sin\left(t_0 + \frac{\Omega}{2}\right) - \frac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial v} = -\sqrt{G}\, \cot\frac{\sigma}{2} \sin\left(t_0 - \frac{\Omega}{2}\right) + \frac{2\cos\sigma}{1-\cos\sigma} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

die infolge der Gleichungen in § 184 (S. 349) der Integrabilitätsbedingung Genüge leisten und eine Lösung ϱ der Gleichung (15) liefern. In dem entsprechenden Cykelsystem haben wir wegen der Gleichungen (21*):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial \xi}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial u} = 0, \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0 \end{array}\right\} \text{ für } w = w_0.$$

Demnach reduciert sich die Fläche $w = w_0$ auf einen Punkt (ξ_0, η_0, ζ_0), durch den alle Kreise des Cykelsystems hindurchgehen.

Für die sphärischen Bilder der Developpabeln aller cyklischen Strahlensysteme erhalten wir also die folgende Construction:

Man nehme eine beliebige Fläche S und ziehe durch einen festen Raumpunkt O die zu S normalen Kreise. Dieselben bilden ein normales Kreissystem*), und die sphärischen Bilder der Developpabeln des von ihren Axen gebildeten Strahlensystems sind die allgemeinsten Curven von der verlangten Art.

*) Durch eine Transformation mittels reciproker Radienvectoren bezüglich des festen Punktes O geht dieses Kreissystem in das Normalensystem der transformierten Fläche über.

Kapitel XIV.

Die Minimalflächen.

Geschichtlicher Überblick. — Formeln von Weierstrass. — Algebraische Minimalflächen. — Doppelflächen. — Verbiegungen der Minimalflächen, wobei sie Minimalflächen bleiben. — Associierte Minimalflächen. — Auf einander abwickelbare conjugierte Flächen. — Minimalflächen mit ebenen Krümmungslinien. — Minimalflächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind. — Minimal-Schraubenflächen. — Formeln von Schwarz. — Lösung der Aufgabe, eine Minimalfläche zu construieren, von der ein Streifen gegeben ist. — Besondere Fälle. — Kennzeichen, ob eine Fläche durch Verbiegung in eine Minimalfläche übergeführt werden kann.

---

§ 189. Geschichtlicher Überblick bis auf Meusnier.

Die Theorie der Minimalflächen ist heute eins der vollständigsten und ausgedehntesten Kapitel der Differentialgeometrie. Ihre vielfachen Beziehungen zur Theorie der Functionen einer complexen Veränderlichen und zur Variationsrechnung verleihen den Untersuchungen auf diesem Gebiet ein hohes Interesse. Die dem vorliegenden Buche gesteckten Grenzen gestatten uns nur, die Hauptergebnisse dieser Theorie zu entwickeln; Leser, die sich in den Gegenstand weiter zu vertiefen wünschen, finden eine erschöpfende Behandlung in den schönen Vorlesungen von Darboux. Daselbst sowie in der Abhandlung von Beltrami*) finden sie auch geschichtliche Angaben bezüglich der allmählichen Entwickelung dieser Theorie. Für unseren Zweck schliessen wir uns speciell an die kurze Darstellung an, die Schwarz in seinen „Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen“ gegeben hat.

Die Anfänge der Theorie der Minimalflächen reichen bis auf die berühmte Abhandlung von Lagrange zurück, in der die Grundlagen der Variationsrechnung**) entwickelt worden sind. Wir betrachten

---

*) Sulle proprietà generali delle superficie ad area minima. Memorie dell' Accademia di Bologna, 7. Bd., 1868.

**) Miscellanea Taurinensia, 2. Bd., 1760—61.

eine geschlossene Curve C und eine von dieser Curve begrenzte Fläche S. Diese Fläche wird eine Minimalfläche genannt, wenn sie im Vergleich zu allen unendlich benachbarten, von der Curve C begrenzten Flächen den kleinsten Flächeninhalt hat.

Ist die Gleichung der Fläche S in der gewöhnlichen Form:

$$z = z(x, y),$$

gegeben, so ist der Flächeninhalt von S durch das Doppelintegral

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

dargestellt, und man braucht nur die Principien der Variationsrechnung anzuwenden, um für z die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right) = 0$$

oder:

(1) $$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$$

zu erhalten.

Die geometrische Deutung der Gleichung (1) ist 1776 von Meusnier gegeben worden, der bemerkte, dass sie der Ausdruck der Eigenschaft der Fläche S ist, in jedem Punkte gleiche, aber entgegengesetzte Hauptkrümmungsradien zu haben (vgl. (d), S. 114). Alle Flächen nun, die dieser letzteren Bedingung genügen, werden Minimalflächen genannt. Diese Bezeichnung ist in der That dadurch gerechtfertigt, dass jeder solchen Fläche bei passend gewählter Begrenzung die Eigenschaft des Minimums, von der wir ausgegangen sind, zukommt.

Von Meusnier rührt auch die Entdeckung der beiden zuerst bekannt gewordenen Minimalflächen her, nämlich des Catenoids und der Schraubenregelfläche. Diese ergeben sich unmittelbar, wenn man Lösungen der Gleichung (1) von der Form:

$$z = f(x^2 + y^2) \quad \text{oder} \quad z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

sucht.

§ 190. Neuere Untersuchungen über Minimalflächen.

Monge war der erste, der (1784) die vollständige Lösung der Gleichung (1) angab; aber die für die Anwendungen wenig geeignete Form, in der die Integralgleichungen angegeben waren, liess es lange Zeit zur Entdeckung anderer reeller Minimalflächen als der beiden

angeführten, von Meusnier gefundenen, nicht kommen. 1834 fand Scherk die Minimal-Schraubenflächen und die Translationsfläche*):

$$z = \frac{1}{a}\left[\log\cos(ax) - \log\cos(ay)\right].$$

Die wichtigsten Fortschritte unserer Theorie beginnen mit dem Erscheinen der Arbeiten von Ossian Bonnet (1853—60), der eine fundamentale Eigenschaft der Minimalflächen, nämlich die, dass ihre sphärische Abbildung conform ist, erkannte und die Integralgleichungen in eine Form brachte, die alle reellen und unendlich viele algebraische Minimalflächen abzuleiten gestattete.

1866 erschienen die wichtigen Arbeiten von Weierstrass, in denen die Monge'schen Formeln in eine einfache und elegante Form gebracht sind, welche die Lösung verschiedener grundlegender Fragen gestattet. In diesen Abhandlungen sind auch wichtige Ergebnisse bezüglich des sogenannten Plateau'schen Problems (s. nächstes Kapitel) angegeben. Dieses berühmte Problem ist auch in einer nachgelassenen Abhandlung Riemanns und in einer Reihe sehr wichtiger Arbeiten von Schwarz behandelt, die nun im ersten Bande der Werke dieses Mathematikers gesammelt sind.

Von Untersuchungen nach einer anderen Richtung sind von uns noch unter den wichtigsten Veröffentlichungen über diesen Gegenstand diejenigen von Lie**) (1877—78) zu erwähnen, der sich besonders mit den algebraischen Minimalflächen beschäftigt hat.

§ 191. Formeln von Weierstrass.

Wir leiten zunächst die Weierstrass'schen Formeln ab, indem wir uns auf das Ergebnis in § 134, S. 252, stützen, nach dem jeder isothermen Form des Linienelements der Kugel eine Minimalfläche entspricht, die sich mittels Quadraturen ergiebt.

Es sei u, v ein Isothermensystem auf der Kugel, und wir bezeichnen mit

$$ds'^2 = \frac{1}{r_2}(du^2 + dv^2) \tag{2}$$

den Ausdruck für das Quadrat des Linienelements. Sind die Coordi-

*) Diese merkwürdige Minimalfläche ergiebt sich sofort, wenn man Lösungen der Gleichung (1) von der Form:

$$z = f(x) + \varphi(y)$$

sucht.

**) Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, 2. u. 3. Bd. Mathematische Annalen, 14. Bd.

naten X, Y, Z eines Punktes der Kugel als Functionen von u, v bekannt, so ergeben sich die Coordinaten x, y, z des entsprechenden Punktes der Minimalfläche S nach S. 251 und 102, (13), mittels Quadraturen aus den Gleichungen:

$$(3)\qquad \begin{cases} dx = r_2\left(\frac{\partial X}{\partial u}\,du - \frac{\partial X}{\partial v}\,dv\right), \\ dy = r_2\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\,du - \frac{\partial Y}{\partial v}\,dv\right), \\ dz = r_2\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\,du - \frac{\partial Z}{\partial v}\,dv\right). \end{cases}$$

Also ist für das Linienelement von S:

$$(4)\qquad ds^2 = r_2(du^2 + dv^2),$$

und die Hauptkrümmungsradien von S sind

$$r_2, \quad r_1 = -r_2.$$

Wir beziehen nun die Kugel in der üblichen Weise auf die Meridiane und Parallelkreise, indem wir

$$X = \sin\vartheta\cos\omega, \quad Y = \sin\vartheta\sin\omega, \quad Z = \cos\vartheta$$

setzen, und führen die complexe Veränderliche τ auf der Kugel (oder in der Ebene des Aequators):

$$\tau = \cot\frac{\vartheta}{2}\,e^{i\omega}$$

samt ihrer Conjugierten

$$\tau_0 = \cot\frac{\vartheta}{2}\,e^{-i\omega}$$

ein (vgl. § 43, S. 80). Drücken wir X, Y, Z durch τ und τ_0 aus, so erhalten wir:

$$(5)\qquad X = \frac{\tau + \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad Y = \frac{1}{i}\,\frac{\tau - \tau_0}{\tau\tau_0 + 1}, \quad Z = \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}$$

und für das Quadrat des Linienelements der Kugel ds':

$$(6)\qquad ds'^2 = \frac{4\,d\tau\,d\tau_0}{(\tau\tau_0 + 1)^2}.$$

Nach § 41, S. 77, ist nun die complexe Veränderliche

$$\sigma = u + iv$$

eine Function von τ oder der Conjugierten τ_0; doch ist der eine Fall von dem andern nicht wesentlich verschieden, und wir können also σ als Function von τ, demnach σ_0 als Function von τ_0 annehmen. Die Gleichung (2) oder:

$$ds'^2 = \frac{1}{r_2}\,\frac{d\sigma}{d\tau}\,\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\,d\tau\,d\tau_0$$

giebt demnach, mit der Gleichung (6) verglichen:

$$r_2 = \frac{(\tau\tau_0 + 1)^2}{4} \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\sigma_0}{d\tau_0},$$

und die Gleichung (4) wird:

$$ds^2 = \frac{(\tau\tau_0 + 1)^2}{4} \left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 \left(\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau\, d\tau_0.$$

Nun führen wir in den Gleichungen (3) τ und τ_0 ein, wobei wir berücksichtigen, dass für eine beliebige, als Function von τ und τ_0 aufgefasste Function $\Phi(u, v)$ die folgenden Gleichungen gelten:

$$\frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\sigma_0}{d\tau_0} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{i}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = \frac{d\sigma}{d\tau} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau_0},$$
$$\frac{d\sigma}{d\tau} \frac{d\sigma_0}{d\tau_0} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{i}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right) = \frac{d\sigma_0}{d\tau_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau},$$

und erhalten:

$$(6^*) \quad \begin{cases} dx = \frac{1}{4}(1 - \tau^2)\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau + \frac{1}{4}(1 - \tau_0^2)\left(\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau_0, \\ dy = \frac{i}{4}(1 + \tau^2)\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau - \frac{i}{4}(1 + \tau_0^2)\left(\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau_0, \\ dz = \frac{\tau}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 d\tau + \frac{\tau_0}{2}\left(\frac{d\sigma_0}{d\tau_0}\right)^2 d\tau_0. \end{cases}$$

Setzen wir nun

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = F(\tau)$$

und führen wir zur Bezeichnung des reellen Teils einer complexen Grösse ψ das Zeichen $\Re\psi$ ein, so erhalten wir die Formeln:

$$(7) \quad x = \Re\int(1 - \tau^2)F(\tau)\,d\tau, \quad y = \Re\int i(1 + \tau^2)F(\tau)\,d\tau,$$
$$z = \Re\int 2\tau F(\tau)\,d\tau,$$

in denen die Integrale rechts längs ein und desselben krummlinigen Weges in der complexen τ-Ebene erstreckt zu denken sind.

Dieses sind die Formeln von Weierstrass. Umgekehrt leuchtet sofort ein, dass, wenn für $F(\tau)$ irgend eine Function der complexen Variabeln τ genommen wird, die Formeln (7) mittels Quadraturen eine zugehörige Minimalfläche S liefern. Das Linienelement und der (positive) Hauptkrümmungsradius von S sind durch die Gleichungen:

$$(8) \quad ds^2 = (\tau\tau_0 + 1)^2 F(\tau) F_0(\tau_0)\, d\tau\, d\tau_0$$

und

$$(9) \quad r_2 = \frac{(\tau\tau_0 + 1)^2}{2} \sqrt{F(\tau) F_0(\tau_0)}$$

gegeben. Die Krümmungslinien u, v ergeben sich, wenn von dem Integral

$$\sigma = \int \sqrt{2F(\tau)}\, d\tau$$

der reelle Teil und der Coefficient des imaginären Teils gleich Constanten gesetzt werden; ihre Gleichungen sind demnach:

$$(10)\qquad \Re\int\sqrt{2F(\tau)}\,d\tau = \text{Const.},\qquad \Re\int i\sqrt{2F(\tau)}\,d\tau = \text{Const.}$$

§ 192. **Algebraische Minimalflächen.**

Die Weierstrass'schen Formeln (7) lassen sich in eine besonders für die Bestimmung der algebraischen Minimalflächen sehr vorteilhafte Form bringen. Wir betrachten zu diesem Zwecke $F(\tau)$ als den dritten Differentialquotienten $\varphi'''(\tau)$ einer Function $\varphi(\tau)$, die selbst willkürlich bleibt. Werden dann aus den Gleichungen (7) die Integralzeichen weggeschafft, so lauten sie:

$$(11)\qquad \begin{cases} x = \Re\left[(1-\tau^2)\varphi''(\tau) + 2\tau\varphi'(\tau) - 2\varphi(\tau)\right], \\ y = \Re\left[i(1+\tau^2)\varphi''(\tau) - 2i\tau\varphi'(\tau) + 2i\varphi(\tau)\right], \\ z = \Re\left[2\tau\varphi''(\tau) - 2\varphi'(\tau)\right]. \end{cases}$$

Wird nun vorausgesetzt, dass $\varphi(\tau)$ eine algebraische Function von τ sei, so ist klar, dass uns diese Formeln eine algebraische Minimalfläche definieren. Es ist aber wichtig, dass sich umgekehrt jede algebraische Minimalfläche auf diese Weise ergiebt. Weierstrass beweist dieses wie folgt: Es sei

$$w = u + iv = f(x+iy)$$

eine Function der complexen Veränderlichen $x+iy$; wenn dann in einem bestimmten Gebiet zwischen x, y und dem reellen Teil u von w eine algebraische Beziehung besteht, so ist w eine algebraische Function von $x+iy$.

In der Umgebung eines Punktes, den wir der Einfachheit halber in den Punkt $x=0,\ y=0$ verlegen, sei nämlich w in eine Taylor'sche Reihe:

$$w = a_0 + ib_0 + (a_1+ib_1)(x+iy) + (a_2+ib_2)(x+iy)^2 + \cdots$$

entwickelt, worin die a und b reelle Constanten sind, und es sei r der Radius des Convergenzkreises. Dann gilt für u folgende Entwickelung nach Potenzen von x und y:

$$(12)\qquad \begin{aligned} u = a_0 &+ \tfrac{1}{2}(a_1+ib_1)(x+iy) + \tfrac{1}{2}(a_2+ib_2)(x+iy)^2 + \cdots \\ &+ \tfrac{1}{2}(a_1-ib_1)(x-iy) + \tfrac{1}{2}(a_2-ib_2)(x-iy)^2 + \cdots. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung ist

$$(13)\qquad G(u, x, y) = 0,$$

wo G eine ganze rationale Function von u, x, y ist. Setzen wir hierin für u die Reihe (12) ein und entwickeln wir dann nach Potenzen von

x und y, so sind die Coefficienten jedes einzelnen Gliedes identisch gleich Null und bleiben auch gleich Null, wenn wir an Stelle von x, y complexe Grössen $\bar{x}$, $\bar{y}$ setzen, wofern nur die Entwickelung auch nach dem Einsetzen convergent bleibt. Nun ist dieses zufolge der Art der Convergenz der Potenzreihen sicher mit der aus (12) hervorgehenden Reihe für $\bar{u}$ der Fall, wenn die absoluten Beträge von $\bar{x}$ und $\bar{y}$ kleiner als $\frac{r}{2}$ bleiben. Setzen wir also

$$\bar{x} = \frac{x + iy}{2}, \quad \bar{y} = \frac{x + iy}{2i},$$

so giebt Gleichung (12):

$$\bar{u} = a_0 + \tfrac{1}{2}(w - w_0),$$

wobei $w_0 = a_0 + ib_0$ ist, und Gleichung (13) geht in eine algebraische Relation zwischen w und $x + iy$ über, w. z. b. w.

Wird nunmehr angenommen, dass die durch die Gleichungen (11) definierte Minimalfläche algebraisch sei, so bestehen zwischen den Grössen

$$\frac{X}{1 - Z} = \frac{\tau + \tau_0}{2}, \quad \frac{Y}{1 - Z} = \frac{\tau - \tau_0}{2i}$$

und jeder der Grössen x, y, z algebraische Relationen. Es ist daher nach dem soeben bewiesenen Satze jede der drei Functionen:

$$f_1(\tau) = (1 - \tau^2)\varphi''(\tau) + 2\tau\varphi'(\tau) - 2\varphi(\tau),$$
$$f_2(\tau) = i(1 + \tau^2)\varphi''(\tau) - 2i\tau\varphi'(\tau) + 2i\varphi(\tau),$$
$$f_3(\tau) = 2\tau\varphi''(\tau) - 2\varphi'(\tau),$$

also auch

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{4}(\tau^2 - 1)f_1(\tau) - \frac{i}{4}(\tau^2 + 1)f_2(\tau) - \frac{1}{2}\tau f_3(\tau)$$

eine algebraische Function von τ.

Wir haben somit das Ergebnis:

Alle algebraischen Minimalflächen ergeben sich aus den Gleichungen (11), wenn in diesen Gleichungen für $\varphi(\tau)$ eine algebraische Function von τ eingesetzt wird.

§ 193. **Minimal-Doppelflächen.**

Die Weierstrass'schen Formeln (7) oder (11) bringen in der einfachsten Weise den Zusammenhang zwischen den Functionen einer complexen Veränderlichen und den Minimalflächen zum Ausdruck, da sie beweisen, dass zu jeder Function $F(\tau)$ einer complexen Veränderlichen eine bis auf eine Translation im Raume bestimmte Minimalfläche gehört. Wie wir aber sogleich sehen werden, entsprechen ein und der-



selben Minimalfläche im allgemeinen zwei verschiedene Ausdrücke für die Function $F(\tau)$.

Vorher geben wir noch einen einfachen Satz an, der sich unmittelbar aus der linearen Beschaffenheit der Gleichungen (7) bezüglich $F(\tau)$ ergiebt. In den Gleichungen (7) setzen wir für $F(\tau)$ der Reihe nach zwei Functionen $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ und dann die Function

$$\frac{m\varphi_2(\tau) + n\varphi_1(\tau)}{m+n} \quad (m,\ n \text{ constant})$$

ein. Dadurch erhalten wir den von Weierstrass bemerkten Satz:

Wenn zwischen den Punkten zweier Minimalflächen S, S' eine Correspondenz nach der Gaussischen Methode mittels paralleler Normalen in zwei entsprechenden Punkten P, P' hergestellt und auf jeder Strecke PP' ein Punkt M so gewählt wird, dass er sie in dem constanten Verhältnis $m:n$ teilt, so ist der Ort des Punktes M wieder eine Minimalfläche, die den Flächen S, S' durch Parallelismus der Normalen entspricht.

Wir wollen nun die oben aufgeworfene Frage untersuchen, ob ein und derselben Minimalfläche einer oder mehrere Ausdrücke für die Function $F(\tau)$ entsprechen. Es seien $F(\tau)$, $f(\tau)$ zwei Functionen von τ, die auf ein und dieselbe Minimalfläche führen, und τ, τ' die Werte der Argumente für F, f, die ein und demselben Flächenpunkt entsprechen. Die Richtung der τ entsprechenden Normale fällt entweder mit derjenigen der τ' entsprechenden Normale oder mit der entgegengesetzten Richtung zusammen, folglich ist im ersten Falle

$$\tau' = \tau$$

und im zweiten Falle

$$\tau' = -\frac{1}{\tau_0},$$

wie auch sofort daraus hervorgeht, dass X, Y, Z infolge der Gleichungen (5) nur dann ihre Zeichen ändern, wenn τ durch $-\frac{1}{\tau_0}$ ersetzt wird. Unter der ersten Voraussetzung ergiebt sich aus den Weierstrass'schen Formeln (7)

$$f(\tau) = F(\tau),$$

unter der zweiten

$$F(\tau) = -\frac{1}{\tau^4} f_0\left(-\frac{1}{\tau}\right) \text{*)}$$

*) Ist $f(\tau)$ eine analytische Function von τ, die ursprünglich durch eine innerhalb eines gewissen Kreises convergente Potenzreihe definiert ist, so bezeichnen wir mit $f_0(\tau)$ die analytische Function, die durch diejenige Reihe definiert ist, welche sich ergiebt, wenn in der ursprünglichen die Coefficienten durch ihre

oder

$$f(\tau) = -\frac{1}{\tau^4} F_0\left(-\frac{1}{\tau}\right).$$

Wir sehen also, dass die beiden im allgemeinen von einander verschiedenen Functionen

$$F(\tau), \quad -\frac{1}{\tau^4} F_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

in den Weierstrass'schen Formeln eingesetzt ein und dieselbe Minimalfläche liefern, da die Coordinatendifferentiale in beiden Fällen dieselben sind.

Besonders interessant ist der Fall, in dem die beiden Functionen

$$F(\tau), \quad -\frac{1}{\tau_4} F_0\left(-\frac{1}{\tau}\right)$$

genau dieselben sind. Dann lässt sich nach dem Obigen das Gebiet der Minimalfläche in der Umgebung des Punktes $-\frac{1}{\tau_0}$ entweder durch Verschiebung mit demjenigen um τ zur Deckung bringen oder es fällt mit ihm direct zusammen. Da im ersten Falle die Fläche eine Verschiebung in sich gestattet, so ist sie mit Notwendigkeit periodisch, also transcendent. Dieses ist von vornherein ausgeschlossen, wenn z. B. die Fläche algebraisch ist. Beschreiben wir im zweiten Falle auf der Bildkugel einen Weg, der vom Punkte τ nach dem diametral gegenüberliegenden $-\frac{1}{\tau_0}$ führt, so geht der entsprechende Weg auf der Fläche von einem Punkte P aus und kehrt zu demselben wieder zurück; aber bei der Rückkehr hat sich der Sinn der Normale stetig in den entgegengesetzten verwandelt. Man kann also auf der Fläche stetig von ihrer einen Seite auf die andere gelangen; die Fläche hat demnach nur eine einzige Seite oder sie ist nach der Bezeichnung von Lie eine Minimal-Doppelfläche.

Als Beispiel führen wir die Henneberg'sche Minimalfläche an, die dem Wert

$$F(\tau) = 1 - \frac{1}{\tau^4}$$

entspricht und offenbar eine algebraische Doppelfläche ist.

Es ist dieses die einfachste Minimal-Doppelfläche; sie ist von der 5. Klasse und der 15. Ordnung.

---

conjugierten Werte ersetzt werden, und die also denselben Convergenzkreis hat. Die Beziehung zwischen $f(\tau)$ und $f_0(\tau)$ ist von der ursprünglich gewählten Reihe unabhängig.

§ 194. Verbiegung der Minimalflächen, wobei sie beständig Minimalflächen bleiben.

Jede Minimalfläche kann einer solchen stetigen Verbiegung unterworfen werden, bei der sie eine Minimalfläche bleibt. Um diese interessanten Verbiegungen zu finden, stellen wir die folgenden Überlegungen an: Es seien S, S' zwei auf einander abwickelbare Minimalflächen; in entsprechenden Punkten sind die Krümmungsmasse beider Flächen und also auch die absoluten Grössen der zugehörigen Hauptkrümmungsradien einander gleich. Daraus folgt, dass die beiden sphärischen Bilder von S und S' congruent oder symmetrisch sind. Der zweite Fall kommt jedoch auf den ersten hinaus, wenn die positive Richtung der Normale einer von den beiden Flächen geändert wird, und ist andrerseits ausgeschlossen, wenn wir auf stetige Weise durch Verbiegung von der Figur S zur Figur S' gelangen. Wir können demnach eine der beiden Flächen, z. B. S', in eine solche neue Lage im Raume bringen, dass sich die beiden sphärischen Bilder decken und also entsprechende Punkte von S und S' durch ein und denselben Wert von τ bestimmt sind. Nach dieser Vorbemerkung seien $F(\tau)$, $f(\tau)$ die entsprechenden Werte der Function F in den Weierstrass'schen Formeln. Da die Linienelemente der beiden Flächen einander gleich sein müssen, so folgt aus der Gleichung (8):

$$F(\tau)F_0(\tau_0) = f(\tau)f_0(\tau_0),$$

d. h.

$$\left|\frac{f(\tau)}{F(\tau)}\right| = 1.$$

Es ist daher $\frac{f(\tau)}{F(\tau)}$ eine Constante, deren absoluter Betrag gleich Eins ist. Wir haben demnach:

$$f(\tau) = e^{i\alpha}F(\tau),$$

wo α eine reelle Constante bedeutet. Da uns ferner die Gleichung (8) umgekehrt beweist, dass das Linienelement ungeändert bleibt, wenn $F(\tau)$ durch $e^{i\alpha}F(\tau)$ ersetzt wird, welcher Wert auch der reellen Constanten α erteilt werden mag, so haben wir das Ergebnis:

Die allgemeinste Verbiegung einer Minimalfläche, bei der sie beständig eine Minimalfläche bleibt, ergiebt sich, wenn $F(\tau)$ in den Weierstrass'schen Formeln (7) durch $e^{i\alpha}F(\tau)$ ersetzt wird, wo α eine beliebige reelle Constante ist.

Auf diese Weise erhält man aus einer Minimalfläche durch stetige Verbiegung eine Schar von ∞^1 Minimalflächen; diese Flächen werden als associierte Minimalflächen bezeichnet.

§ 195. **Associierte Minimalflächen. Conjugierte Minimalflächen.**

Wir wollen nun die Eigenschaften dieser Verbiegungen näher untersuchen. Die Gleichungen der Krümmungslinien der Fläche S sind:

$$u = \text{Const.}, \quad v = \text{Const.},$$

wenn man

$$\sigma = u + iv = \int \sqrt{2F(\tau)}\,d\tau$$

setzt (§ 191, S. 360).

Die Krümmungslinien der dem Werte α des Parameters entsprechenden associierten Minimalfläche S_α haben demnach die Gleichungen:

$$\mathfrak{R}\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\sigma\right) = \text{Const.}, \quad \mathfrak{R}\left(ie^{\frac{i\alpha}{2}}\sigma\right) = \text{Const.}$$

oder:

$$u\cos\frac{\alpha}{2} - v\sin\frac{\alpha}{2} = \text{Const.}, \quad u\sin\frac{\alpha}{2} + v\cos\frac{\alpha}{2} = \text{Const.}$$

Also folgt: *Den Krümmungslinien der S associierten Minimalfläche S_α entsprechen auf S die isogonalen Trajectorien der alten Krümmungslinien für den Winkel $\frac{\alpha}{2}$.*

Besonders interessant ist der Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$; dann gehen die Krümmungslinien von S in die Haupttangentencurven von $S_{\frac{\pi}{2}}$ und umgekehrt die Haupttangentencurven von S in die Krümmungslinien von $S_{\frac{\pi}{2}}$ über. Zwei solche associierte Minimalflächen werden nach Bonnet, der sich mit diesen Verbiegungen zuerst beschäftigte, als *conjugierte* Minimalflächen bezeichnet.

Werden die Coordinaten eines Punktes der zu S conjugierten Fläche mit x_0, y_0, z_0 bezeichnet, so erhalten wir aus den Gleichungen (7), da dann $F(\tau)$ durch $iF(\tau)$ ersetzt wird:

$$(14) \qquad x_0 = \mathfrak{R}\int i(1-\tau^2)F(\tau)\,d\tau, \quad y_0 = -\mathfrak{R}\int(1+\tau^2)F(\tau)\,d\tau,$$
$$z_0 = \mathfrak{R}\int 2i\tau F(\tau)\,d\tau.$$

Lassen wir α sich stetig ändern, so verbiegt sich die Fläche stetig. Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes (x, y, z) nach der Verbiegung mit x_α, y_α, z_α, so haben wir offenbar:

$$(15) \qquad x_\alpha = x\cos\alpha + x_0\sin\alpha, \quad y_\alpha = y\cos\alpha + y_0\sin\alpha,$$
$$z_\alpha = z\cos\alpha + z_0\sin\alpha.$$

Werden die Integrale in den Gleichungen (7) und (14) zwischen denselben Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ genommen, so bleiben der Flächenpunkt

(0, 0, 0) und die Tangentialebene in ihm während der Verbiegung fest; jeder Punkt (x, y, z) beschreibt während der Verbiegung eine Ellipse, deren Mittelpunkt der feste Punkt ist.

Bringen wir mittels der Gleichungen (15) die Gleichheit der Linienelemente von S und S_α zum Ausdruck, so erhalten wir die Beziehung:

$$dx\,dx_0 + dy\,dy_0 + dz\,dz_0 = 0, \tag{16}$$

die sich auch leicht direct beweisen lässt. Sie besagt, dass sich zwei conjugierte Minimalflächen auch durch Orthogonalität der Elemente entsprechen (S. 287).

Gleichzeitig sind die beiden Flächen associiert im Sinne des Kap. XI (S. 293). Wir sehen, dass sich, entsprechend dieser zweifachen Beziehung, in der die Minimalfläche S und ihre Conjugierte zu einander stehen, für S zwei unendlich kleine Verbiegungen ergeben: bei der ersten derselben bleiben die Hauptkrümmungsradien und bei der zweiten die Krümmungslinien ungeändert (Kap. XI, S. 299).

Endlich sei bemerkt, dass der von zwei entsprechenden Linienelementen der Minimalfläche S und der associierten Fläche S_α gebildete Winkel constant, gleich α, ist.

§ 196. Sätze über associierte Minimalflächen.

Zwei associierte Minimalflächen sind auf einander abwickelbar und besitzen ferner folgende zwei Eigenschaften: erstens haben sie in entsprechenden Punkten parallele Normalen, und zweitens bilden zwei entsprechende Linienelemente einen constanten Winkel mit einander. Wir wollen nun umgekehrt beweisen, dass, wenn für zwei auf einander abwickelbare Flächen die eine oder die andere der genannten Eigenschaften zutrifft, dieselben notwendiger Weise associierte Minimalflächen sind*).

Um diesen Satz unter der ersten Voraussetzung zu beweisen, gehen wir auf die allgemeinen Formeln für die sphärische Abbildung (Kap. V) zurück. Indem wir die beiden auf einander abwickelbaren Flächen mit S, S_0 bezeichnen, berücksichtigen wir, dass zunächst der ersten Voraussetzung zufolge S und S_0 dasselbe sphärische Bild haben sollen. Also ist wegen der Gleichung (2), S. 119:

$$H(D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2) = H_0(D_0\,du^2 + 2D_0'\,du\,dv + D_0''\,dv^2),$$

wenn durch den Index 0 die auf S_0 bezüglichen Grössen unterschieden werden. Daraus folgt entweder sofort, dass

*) Darboux, 1. Bd., S. 326 u. f.

$$H = H_0 = 0$$

ist, d. h. dass S, S_0 associierte Minimalflächen sind, oder aber es ergiebt sich:

$$D_0 = \lambda D, \quad D_0' = \lambda D', \quad D_0'' = \lambda D'', \quad \lambda = \frac{H}{H_0}.$$

Die Bedingung $K = K_0$ jedoch giebt unmittelbar (mit Ausschluss des Falles der auf die Ebene abwickelbaren Flächen, der sich leicht direct erledigen lässt):

$$\lambda = \pm 1.$$

Daher sind S und S_0 congruent oder symmetrisch.

Um den obigen Satz auch unter der zweiten Voraussetzung zu beweisen, zeigen wir vorerst, dass zwei auf einander abwickelbare Flächen, die sich auch durch Orthogonalität der Elemente entsprechen, conjugierte Minimalflächen sind. Hierzu gehen wir auf die Formeln des § 157 zurück. Haben S und S_0 negatives Krümmungsmass, so beziehen wir sie auf ihre Haupttangentencurven und berücksichtigen die Gleichungen (13), S. 295. Da S und S_0 dasselbe Linienelement haben, so folgt daraus:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = (1 - \varphi^2)e, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = (1 - \varphi^2)f, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 = (1 - \varphi^2)g,$$

also $\varphi = \pm 1$; demnach ist S infolge der Gleichung (12), S. 295, eine Minimalfläche, also S_0 ihre Conjugierte. Der Fall, dass die Flächen S und S_0 positives Krümmungsmass haben, ist durch die Gleichungen in § 157, S. 296, von vornherein ausgeschlossen, weil daraus

$$\varphi = \pm 1, \quad e + g = 0$$

folgen würde.

Nachdem nun der Satz für diese besonderen Fälle bewiesen ist, ist er es auch für den allgemeinen Fall. Wird nämlich

$$dx_0^2 + dy_0^2 + dz_0^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$dx_0\,dx + dy_0\,dy + dz_0\,dz = \cos\alpha\,(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (\alpha = \text{Const.})$$

angenommen und

$$\bar{x} = \frac{x_0 - x\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \bar{y} = \frac{y_0 - y\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \bar{z} = \frac{z_0 - z\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

gesetzt, so ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$\overline{dx}^2 + \overline{dy}^2 + \overline{dz}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$
$$\overline{dx}\,dx + \overline{dy}\,dy + \overline{dz}\,dz = 0.$$

§ 197. Minimalflächen mit ebenen Krümmungslinien.

Wir wollen nun einige besondere Klassen von Minimalflächen untersuchen, zunächst solche mit ebenen Krümmungslinien. Wir gehen davon aus, dass jede ebene Krümmungslinie einer Fläche zum sphärischen Bilde einen Kreis hat, und umgekehrt (nach S. 97). Um also Minimalflächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien zu finden, haben wir also nur auf der Kugel eine Schar von ∞^1 Kreisen zu wählen und diejenigen Flächen zu bestimmen, welche diese Kreise und ihre Orthogonaltrajectorien zu sphärischen Bildern der Krümmungslinien haben. In der entsprechenden Laplace'schen Gleichung (37), § 73, S. 141, ist dann eine der Invarianten gleich Null, und es lässt sich die Gleichung vollständig integrieren. Da aber in dem besonderen Falle der Minimalflächen das Curvensystem auf der Bildkugel nach § 61, S. 120, isotherm sein muss, so besteht auch die zweite Schar aus Kreisen (§ 91, S. 177).

Daraus folgt, dass auch die Krümmungslinien der zweiten Schar notwendig eben sind. Infolge des Ergebnisses in § 44, S. 81, erhält man die doppelten orthogonalen Kreissysteme auf der Kugel, wenn die Kugel durch zwei Ebenenbüschel geschnitten wird, die zwei bezüglich der Kugel reciproke Polaren zu Axen haben. Wir beschäftigen uns vorerst mit dem Grenzfall, in dem diese beiden Geraden conjugierte (auf einander senkrechte) Tangenten der Kugel sind. Nehmen wir wieder unsere Formeln (5), S. 359, und setzen wir

$$\tau = \alpha + i\beta,$$

also

$$X = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \quad Y = \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}, \quad Z = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{\alpha^2 + \beta^2 + 1},$$

so sehen wir, dass die Curven α, β gerade die Schnittkreise der Kugel mit den Ebenen der beiden Büschel:

$$x + \alpha(z - 1) = 0,$$
$$y + \beta(z - 1) = 0$$

sind, deren Axen die durch den Punkt (0, 0, 1) parallel zur y- und zur x-Axe gezogenen Kugeltangenten sind. Um zu der entsprechenden Minimalfläche zu gelangen, müssen wir also $F(\tau)$ in den Weierstrass'schen Formeln (7) gleich einer reellen Constanten setzen. Der Wert dieser Constanten beeinflusst nur die Grössenverhältnisse der Fläche. Wenn wir daher etwa

$$F(\tau) = 3$$

setzen, so erhalten wir für die entsprechende Fläche:

$$(17)\qquad \begin{cases} x = 3\alpha + 3\alpha\beta^2 - \alpha^3, \\ y = \beta^3 - 3\beta - 3\alpha^2\beta, \\ z = 3(\alpha^2 - \beta^2). \end{cases}$$

Diese merkwürdige Fläche ist von Enneper gefunden worden. Sie ist von der 9. Ordnung; ihre Krümmungslinien sind ebene Curven vom Geschlecht Null, und ihre Haupttangentencurven:

$$\alpha + \beta = \text{Const.}, \quad \alpha - \beta = \text{Const.}$$

Raumcurven dritter Ordnung.

§ 198. Enneper'sche Minimalfläche.

Das Quadrat des Linienelements der Enneper'schen Fläche ist durch

$$ds^2 = 9(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

gegeben, und es ergiebt sich sofort, dass die Curven constanter Krümmung:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \text{Const.}$$

geodätisch parallel sind und constante geodätische Krümmung besitzen, sodass die Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist (S. 195). Ferner lässt sich nachweisen, dass alle associierten Flächen der Enneper'schen Fläche der Gestalt nach mit ihr übereinstimmen und sich aus ihr ergeben, wenn sie um die z-Axe gedreht wird. Diese Eigenschaften ergeben sich übrigens als besondere Fälle allgemeinerer Eigenschaften, die im folgenden Paragraphen entwickelt werden.

Darboux*) hat eine merkwürdige Erzeugung der Enneper'schen Fläche als Ebenenenveloppe gefunden, die wir kurz angeben wollen. Der Abstand der Tangentialebene der Enneper'schen Fläche (17) vom Anfangspunkt ist durch

$$W = Xx + Yy + Zz = \frac{\alpha^4 - \beta^4 + 3(\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2 + \beta^2 + 1}$$

gegeben, und es lautet demnach die Gleichung dieser Ebene:

$$(18)\qquad 2\alpha x + 2\beta y + (\alpha^2 + \beta^2 - 1)z + 3(\beta^2 - \alpha^2) + \beta^4 - \alpha^4 = 0.$$

Wir betrachten nun die beiden durch die Gleichungen:

$$x = 4\alpha, \quad y = 0, \quad z = 2\alpha^2 - 1,$$
$$x = 0, \quad y = -4\beta, \quad z = -2\beta^2 + 1$$

definierten Parabeln, von denen jede die Focalparabel der anderen ist. Verbinden wir einen beliebigen Punkt der einen mit einem beliebigen

*) Darboux, 1. Bd., S. 318.

Punkte der anderen und legen wir durch den Mittelpunkt der Verbindungslinie die zu ihr senkrechte Ebene, so erhalten wir gerade die Ebene (18). Daraus folgt:

Die Enneper'sche Fläche ist die Enveloppe der Mittelsenkrechtenebenen derjenigen Sehnen, welche die Punkte einer Parabel mit den Punkten der Focalparabel verbinden.

§ 199. Bestimmung aller Minimalflächen mit ebenen Krümmungslinien.

Wir haben nun noch die Gleichungen derjenigen Minimalflächen mit ebenen Krümmungslinien aufzustellen, welche zu Bildern dieser Curven auf der Kugel zwei Kreisbüschel haben, deren Axen zwei die Kugel nicht berührende reciproke Polaren r, r' sind.

Der Einfachheit halber wählen wir diejenige Gerade, welche gleichzeitig auf r und r' senkrecht steht, zur z-Axe und die x- und y-Axe parallel r bezw. r'. Um die Ideen zu fixieren, setzen wir noch voraus, dass r ausserhalb der Kugel liege, r' also die Kugel schneide. Dann sind die Coordinaten derjenigen Punkte, in denen r bezw. r' die z-Axe schneiden,

$$0,\ 0,\ \frac{1}{a} \quad \text{bez.} \quad 0,\ 0,\ a \quad (a = \text{Const.} < 1).$$

Die Gleichungen der beiden Kreisbüschel lauten dann:

$$x = \lambda(z - a),$$

$$y = \mu\left(z - \frac{1}{a}\right),$$

wenn λ, μ die Parameter der beiden Büschel sind. Nun führen wir mittels der Gleichungen:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{tang} u, \quad \mu = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{tangh} v$$

zwei neue Parameter ein und erhalten so für X, Y, Z als Functionen von u, v die Ausdrücke:

$$X = \frac{\sqrt{1-a^2}\sin u}{\cosh v + a\cos u}, \quad Y = -\frac{\sqrt{1-a^2}\sinh v}{\cosh v + a\cos u}, \tag{19}$$

$$Z = \frac{\cos u + a\cosh v}{\cosh v + a\cos u}.$$

Das Quadrat des Linienelements der Kugel,

$$ds'^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

nimmt, durch die Parameter u, v ausgedrückt, die Form:

$$ds'^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(\cosh v + a\cos u)^2}$$

an. Wenn wir nun aus den Gleichungen (3), § 191, S. 359, mittels Quadraturen die zugehörige Minimalfläche berechnen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$(21)\qquad \begin{cases} x = au + \sin u \cosh v, \\ y = \ \ v \ + a \cos u \cosh v, \\ z = \sqrt{1-a^2} \cos u \cosh v. \end{cases}$$

Ist a gleich Null, so ergiebt sich das Catenoid; ist a verschieden von Null, so besteht der Schnitt der Fläche mit den zur xy-Ebene parallelen Ebenen aus unendlich vielen congruenten Kettenlinien, deren Leitlinien der y-Axe parallel sind.

§ 200. **Die auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen.**

Wir lösen nun die Aufgabe, alle Minimalflächen zu bestimmen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind. Dazu stellen wir die folgenden von Schwarz herrührenden Überlegungen an: Es sei S eine auf eine Rotationsfläche abwickelbare Minimalfläche. Sie gestattet eine stetige Verbiegung in sich, insbesondere eine unendlich kleine Verbiegung, bei der sich die Biegungscurven L der Parallelkreise in sich verschieben. Das sphärische Bild von S bleibt bei der Verbiegung sich selbst congruent (S. 365) und erfährt nur eine unendlich kleine Drehung um einen Kugeldurchmesser. Daraus schliessen wir, dass die sphärischen Bilder der Curven L die Kreise in den zur Rotationsaxe senkrechten Ebenen sind und dass auch bei einer endlichen Verbiegung der Fläche S in sich ihr sphärisches Bild um dieselbe Axe gedreht wird*). Diese Axe nehmen wir zur z-Axe. Eine Drehung um diese Axe ist gleichbedeutend damit, dass τ durch $e^{i\alpha}\tau$ ersetzt wird, wenn α die Amplitude der Drehung ist. Da sich nun

$$ds^2 = (\tau\tau_0 + 1)^2 F(\tau) F_0(\tau_0) d\tau\, d\tau_0$$

bei dieser Substitution nicht ändern darf, so ergiebt sich:

---

*) Sollte noch irgend ein Zweifel an der Richtigkeit dieser Folgerung bestehen, so betrachte man eine endliche Verbiegung von S in sich, und es sei α die Amplitude der entsprechenden Drehung auf der Kugel. Die Amplitude α ändert sich stetig, wenn die Verbiegung stetig erfolgt, und wir können daher eine solche Verbiegung wählen, dass α und 2π incommensurabel sind. Man verfahre dann wie im Texte. Dann ergiebt sich die Gleichung (b), S. 373, in der α eine bestimmte, zu 2π in keinem rationalen Verhältnis stehende Grösse hat. Wäre die Function $\tau \frac{F'(\tau)}{F(\tau)}$ nicht constant, so würde sie demnach in der Umgebung jedes Punktes der Ebene unendlich oft denselben Wert annehmen, was keinen Sinn hat.

$$|F(\tau)| = |F(\tau e^{i\alpha})|,$$

d. h.

(a) $$F(\tau e^{i\alpha}) = e^{i\beta} F(\tau),$$

wo β eine reelle Constante bedeutet. Durch logarithmische Differentiation folgt:

(b) $$\tau e^{i\alpha} \frac{F'(\tau e^{i\alpha})}{F(\tau e^{i\alpha})} = \tau \frac{F'(\tau)}{F(\tau)}.$$

Da also die Function $\tau \frac{F'(\tau)}{F(\tau)}$ längs jedes Kreises in der complexen τ-Ebene, dessen Mittelpunkt in $\tau = 0$ liegt, constant ist, so ist sie mit Notwendigkeit überhaupt eine Constante.

Es ist also:

$$\frac{F'(\tau)}{F(\tau)} = \frac{k}{\tau}, \quad F(\tau) = C\tau^k,$$

wo C und k zwei Constanten sind, von denen die zweite wegen der Gleichung (a) reell ist. Daraus schliessen wir:

Die auf Rotationsflächen abwickelbaren Minimalflächen ergeben sich aus den Weierstrass'schen Formeln (7), wenn darin

$$F(\tau) = C\tau^k$$

gesetzt wird, wo k eine beliebige reelle und C eine beliebige complexe Constante ist.

§ 201. Die Minimal-Schraubenflächen.

Daraus, dass nach S. 360 für die soeben gefundenen Flächen

$$\sigma = \sqrt{2C} \int \tau^{\frac{k}{2}} d\tau$$

ist, ergiebt sich, dass mit Ausnahme des Falles $k = -2$

$$\sigma = u + iv = \sqrt{2C} \frac{\tau^{\frac{k}{2}+1}}{\frac{k}{2}+1},$$

also das Quadrat des Linienelements

(b) $$ds^2 = f(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2)$$

ist. Erwägen wir nun, dass

$$u \cos\frac{\alpha}{2} - v \sin\frac{\alpha}{2} = \text{Const.},$$

$$u \sin\frac{\alpha}{2} + v \cos\frac{\alpha}{2} = \text{Const.}$$

die Krümmungslinien der associierten Flächen sind, während sich bei den Substitutionen:

$$u' = u\cos\frac{\alpha}{2} - v\sin\frac{\alpha}{2},$$
$$v' = v\sin\frac{\alpha}{2} + v\cos\frac{\alpha}{2}$$

das Quadrat des Linienelements (b) nicht ändert, so sehen wir, dass die betreffenden Flächen der Gestalt nach mit ihren associierten Flächen identisch sind. Wie leicht ersichtlich, ergeben sich diese, wenn die ursprüngliche Fläche um die Axe gedreht wird.

In dem Ausnahmefall $k = -2$ ergiebt sich nach (7), S. 360:

$$x = \Re\left[C\left(\frac{1}{\tau} + \tau\right)\right], \quad y = \Re\left[iC\left(\frac{1}{\tau} - \tau\right)\right], \quad z = -\Re\left[2C\log\tau\right],$$

und da, wenn τ durch $\tau e^{i\alpha}$ ersetzt wird, z um eine Constante wächst und x, y in

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha, \quad x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

übergehen, so erhellt, dass diese Flächen Schraubenflächen sind, deren Axe die z-Richtung ist. Aus unseren Betrachtungen folgt auch, dass dieses die einzigen Minimal-Schraubenflächen sind, da eine solche Fläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist und der Gestalt nach mit ihren associierten Flächen nicht übereinstimmt*). Also: Die Minimal-Schraubenflächen ergeben sich, wenn in den Weierstrass'schen Formeln

$$F(\tau) = \frac{C}{\tau^2}$$

gesetzt wird.

Um die Gleichungen für die Minimal-Schraubenflächen in expliciter Form anzugeben, setzen wir:

$$C = \frac{m}{2}e^{i\beta}, \quad \tau = e^{-v+i\omega},$$

indem wir mit $\frac{m}{2}$, e^{-v} die absoluten Beträge und mit β, ω die Amplituden von C und τ bezeichnen, und erhalten so:

$$(22) \qquad \begin{cases} x = m(\cos\beta\cosh v\cos\omega + \sin\beta\sinh v\sin\omega), \\ y = m(\cos\beta\cosh v\sin\omega - \sin\beta\sinh v\cos\omega), \\ z = m(v\cos\beta + \omega\sin\beta). \end{cases}$$

Die $\beta = 0$ entsprechende Fläche ist das Catenoid, und seine

*) Andernfalls würden bei einer Verbiegung der Fläche die Krümmungslinien ungeändert bleiben.

Conjugierte, welche $\beta = \frac{\pi}{2}$ entspricht, die Minimal-Schraubenregelfläche (vgl. § 105, S. 201):

$$z = m \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Endlich fügen wir noch hinzu, dass die einzige Linienfläche, die zugleich Minimalfläche ist, diese Schraubenfläche ist (Satz von Catalan). Bei einer Linienfläche nämlich sind die orthogonalen Trajectorien der Erzeugenden Haupttangentencurven, und es fallen demnach ihre Hauptnormalen mit den Erzeugenden selbst zusammen. Diese Eigenschaft ist nun, wie wir in § 19, S. 32, gesehen haben, eben für die von den Hauptnormalen der gewöhnlichen Schraubenlinie gebildete Fläche charakteristisch.

§ 202. Andere Gestalt der Formeln von Weierstrass.

Die Weierstrass'schen Formeln (7) (S. 360) können in eine andere bemerkenswerte Form gebracht werden. Setzen wir:

$$u = \int (1 - \tau^2) F(\tau)\, d\tau, \quad v = i \int (1 + \tau^2) F(\tau)\, d\tau, \quad w = \int 2\tau F(\tau)\, d\tau$$

und führen wir statt der complexen Veränderlichen τ mittels der Gleichung: $\tau = \varphi(t)$ eine neue Veränderliche t ein, so sind u, v, w Functionen von t, die durch die Relation:

$$(23) \qquad \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = 0$$

verbunden sind, und die Weierstrass'schen Formeln gehen über in:

$$(24) \qquad x = \Re(u), \quad y = \Re(v), \quad z = \Re(w).$$

Umgekehrt: Sind u, v, w solche Functionen der complexen Veränderlichen t, die durch die Relation (23) verbunden sind, so ergiebt sich aus den Gleichungen (24) eine Minimalfläche*).

Durch eine passend gewählte Transformation der Veränderlichen t kommen wir nämlich wieder zu den Weierstrass'schen Formeln zurück

Dieses geht übrigens sofort aus den folgenden Überlegungen her-

---

*) Diese Gleichungen können wie folgt geschrieben werden:

$$x = \frac{u + u_0}{2}, \quad y = \frac{v + v_0}{2}, \quad z = \frac{w + w_0}{2},$$

und die Minimalfläche kann daher als eine Translationsfläche angesehen werden, welche die imaginäre Curve:

$$x = \tfrac{1}{2} u(t), \quad y = \tfrac{1}{2} v(t), \quad z = \tfrac{1}{2} w(t)$$

und deren Conjugierte zu erzeugenden Curven hat. Dieses ist die Eigenschaft, die den auf S 358 angeführten Arbeiten von Lie als Grundlage dient.

vor, die umgekehrt zu einer directen Ableitung der obigen Gleichungen dienen können:

Zerlegen wir t, u, v, w in ihre reellen und imaginären Bestandteile, indem wir

$$t=\alpha+i\beta,\quad u=x+ix_1,\quad v=y+iy_1,\quad w=z+iz_1$$

setzen, und berücksichtigen wir die Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial\alpha}=\frac{\partial x_1}{\partial\beta},\quad \frac{\partial x}{\partial\beta}=-\frac{\partial x_1}{\partial\beta},$$

aus denen sich infolge der Gleichungen (23) die Beziehungen:

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)^2,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial\alpha}\frac{\partial x}{\partial\beta}=0$$

ergeben, so folgt:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\lambda(d\alpha^2+d\beta^2),\quad \lambda=\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2.$$

Die Beltrami'sche Gleichung (A), § 60, S. 116, zeigt dann, dass die Fläche (24) eine Minimalfläche ist.

Wir bemerken, dass sich die für die Minimalflächen charakteristische Eigenschaft, die durch die eben genannte Gleichung ausgedrückt wird, folgendermassen aussprechen lässt: Bei jeder Minimalfläche gehören ihre Schnitte mit einer Schar paralleler Ebenen einem Isothermensystem an; der Abstand einer veränderlichen Ebene der Schar von einer festen Ebene ist der Parameter der Isometrie.

In jeder der complexen Ebenen u, v, w haben wir eine conforme Abbildung der Minimalfläche (24), und da nun

$$ds^2=\tfrac{1}{2}(du\,du_0+dv\,dv_0+dw\,dw_0)$$

ist, wenn u_0, v_0, w_0 die zu u, v, w conjugierten Functionen sind, so ist klar, dass das Quadrat des Linienelements der Fläche gleich der halben Summe der Quadrate der entsprechenden Linienelemente in den Ebenen u, v, w ist. Riemann hat daraus eine interessante Folgerung gezogen, indem er in Betracht zog, dass sich bei einer conformen Abbildung die Flächenelemente wie die Quadrate der Linienelemente verhalten. Daraus ergiebt sich nämlich der Satz:

Der Flächeninhalt eines Minimalflächenstücks (24) ist gleich der halben Summe der entsprechenden Flächenräume in den complexen Ebenen u, v, w.

§ 203. Formeln von Schwarz.

Aus den Gleichungen des vorstehenden Paragraphen hat Schwarz in der nachstehend angegebenen Weise andere wichtige Gleichungen abgeleitet. Wird wie vorhin

$$u = x + ix_1, \quad v = y + iy_1, \quad w = z + iz_1$$

gesetzt, so ist:

$$dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0,$$

ferner:

$$X dx_1 + Y dy_1 + Z dz_1 = 0,$$

demnach:

$$dx_1 : dy_1 : dz_1 = (Zdy - Ydz) : (Xdz - Zdx) : (Ydx - Xdy).$$

Da ferner

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

ist, so folgt daraus:

$$dx_1 = \pm (Zdy - Ydz), \quad dy_1 = \pm (Xdz - Zdx),$$
$$dz_1 = \pm (Ydx - Xdy).$$

Die Zweideutigkeit des Vorzeichens fällt fort, wenn wir auf die Ausdrücke für u, v, w als Functionen von τ und auf die Gleichungen (5) in § 191 zurückgehen; es ist nämlich:

$$du = (1 - \tau^2)F(\tau)\,d\tau, \quad dv = i(1 + \tau^2)F(\tau)d\tau, \quad dw = 2\tau F(\tau)d\tau,$$

$$dx = \frac{1}{2}(du_0 + du), \qquad dy = \frac{1}{2}(dv_0 + dv), \qquad dz = \frac{1}{2}(dw_0 + dw),$$

$$dx_1 = \frac{i}{2}(du_0 - du), \qquad dy_1 = \frac{i}{2}(dv_0 - dv), \qquad dz_1 = \frac{i}{2}(dw_0 - dw).$$

Wenn nun z. B. der Ausdruck $Ydx - Xdy$ gebildet wird, so ergiebt sich, dass er mit dem für dz_1 übereinstimmt. Wir haben also die Gleichungen:

$$dx_1 = Zdy - Ydz, \quad dy_1 = Xdz - Zdx, \quad dz_1 = Ydx - Xdy\,^*),$$

infolge deren wir die Werte von u, v, w so schreiben können:

$$(25) \qquad \begin{cases} u = x + i\int (Zdy - Ydz), \\ v = y + i\int (Xdz - Zdx), \\ w = z + i\int (Ydx - Xdy). \end{cases}$$

Dieses sind die Schwarz'schen Formeln, die sich in der elegantesten Weise auf die Lösung folgender Aufgabe anwenden lassen: Die Minimal-

*) Stellen wir die Bedingung dafür auf, dass $Ydx - Xdy$ ein vollständiges Differential ist, so ergiebt sich wieder die partielle Differentialgleichung (1) der Minimalflächen (§ 189).

fläche zu construieren, die durch eine gegebene Curve C geht und längs der Curve gegebene Normalen hat.

Beachten wir, dass die unendlich kleinen Teile der Tangentialebenen längs der gegebenen Curve C einen Streifen der Fläche bilden, so können wir der gestellten Aufgabe auch die folgende Fassung geben: Eine Minimalfläche zu construieren, von der ein Streifen bekannt ist. Es ist dieses nur ein specieller Fall der Cauchy'schen Aufgabe über die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung; in dem vorliegenden Falle lässt sie sich unter den näher anzugebenden Bedingungen mittels Quadraturen lösen.

§ 204. Lösung der Aufgabe, durch einen gegebenen Streifen eine Minimalfläche hindurchzulegen.

Wir nehmen an, dass der gegebene Streifen ein analytischer sei, d. h. dass längs des Streifens

$$x,\ y,\ z;\quad X,\ Y,\ Z$$

analytische Functionen der reellen Variabeln t, d. h. auch für complexe Werte von t gültige Functionen seien. Wir führen nun die Integration in den Gleichungen (25) aus und setzen die Functionen u, v, w in der complexen Ebene analytisch fort. Sie sind immerfort durch die Relation:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2=0$$

verbunden, die längs der reellen Axe besteht. Die Gleichungen (24) definieren uns dann eine Minimalfläche, die, wie sofort hervorgeht, durch die gegebene Curve geht und längs der Curve die vorgeschriebenen Tangentialebenen hat*).

Nun ist hervorzuheben, dass die durch einen Streifen definierte Minimalfläche eindeutig bestimmt ist. Führen wir nämlich wieder die complexe Veränderliche (§ 191, S. 359)

$$\tau=\cot\frac{\vartheta}{2}\,e^{i\omega}=\frac{X+iY}{1-Z}$$

ein, so beschreibt, während der bewegliche Punkt die gegebene Curve C durchläuft, sein Bildpunkt τ auf der complexen Kugelfläche eine Curve C', die durch die vorgeschriebenen Richtungen der Normalen

*) Es reducieren sich nämlich für reelles t die reellen Teile von u, v, w auf die Coordinaten der Punkte von C, und die Coefficienten der imaginären Bestandteile auf

$$\int(Zdy-Ydz),\quad \int(Xdz-Zdx),\quad \int(Ydx-Xdy).$$



vollkommen bestimmt ist. Längs dieser Curve C' ergeben sich u, v, w aus den Gleichungen (25) bis auf additive Constanten, und es können daher diese Functionen auf der complexen Kugelfläche nur auf eine einzige Weise fortgesetzt werden. Also: Eine Minimalfläche ist durch einen Streifen eindeutig bestimmt.

Zwei Specialfälle dieses Satzes verdienen besondere Beachtung, nämlich:

1) Jede auf einer Minimalfläche gelegene Gerade ist eine Symmetrieaxe der Fläche.

Wird die Fläche nämlich um diese Gerade um 180° gedreht, so hat sie bei der neuen Lage längs dieser Geraden dieselben Normalen, fällt demnach mit der ursprünglichen Fläche zusammen.

Dieser interessante Satz ergiebt sich direct aus den Gleichungen (25), wenn die betreffende Gerade zur z-Axe genommen und also

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = t$$
$$X = \cos\sigma, \quad Y = \sin\sigma, \quad Z = 0$$

gesetzt wird, wobei σ eine (analytische) Function von t sein soll. Dann erhalten wir aus den Gleichungen (25):

$$u = -i\int \sin\sigma\, dt, \quad v = i\int \cos\sigma\, dt, \quad w = t.$$

Da nun die Functionen u, v für reelles t rein imaginär sind, so sind für conjugierte Werte von t ihre imaginären Teile einander gleich, ihre reellen Teile ebenfalls gleich, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen behaftet; daraus folgt, dass jedem Flächenpunkt (x, y, z) ein anderer, zur z-Axe symmetrisch gelegener Flächenpunkt $(-x, -y, z)$ entspricht.

Die zweite wichtige Folgerung aus dem allgemeinen Satze, die wir anführen wollten, ist die nachstehende:

2) Schneidet eine Ebene eine Minimalfläche orthogonal, so ist sie eine Symmetrieebene der Fläche.

§ 205. Besondere Fälle.

Wir wollen nun die allgemeinen Schwarz'schen Formeln auf einige specielle Fälle anwenden.

a) Wir nehmen an, es wäre von einer Minimalfläche eine geodätische Linie C gegeben. Unter Beibehaltung der üblichen Bezeichnungen des Kap. I für diese Curve setzen wir:

$$t = s, \quad X = \cos\xi, \quad Y = \cos\eta, \quad Z = \cos\zeta.$$

Dann geben uns die Schwarz'schen Formeln (25):

(26) $u = x + i\int\cos\lambda\, ds, \quad v = y + i\int\cos\mu\, ds, \quad w = z + i\int\cos\nu\, ds.$

Betrachten wir die entsprechende Curve C' der conjugierten Minimalfläche, so haben wir:

$$x' = \int\cos\lambda\, ds, \quad y' = \int\cos\mu\, ds, \quad z' = \int\cos\nu\, ds.$$

Gemäss den Ergebnissen des § 20, S. 33, beweisen diese Gleichungen, dass in jedem Punkte der Curve C' die erste und die zweite Krümmung derselben bezüglich gleich der zweiten und der ersten Krümmung der Curve C ist, d. h.:

Wählt man auf zwei conjugierten Minimalflächen zwei einander entsprechende geodätische Linien, so ist die erste Krümmung der einen in jedem Punkte gleich der zweiten Krümmung der anderen im entsprechenden Punkte*).

Allgemeiner, bemerkt man, dass

$$x = \int\cos\alpha\, ds, \quad y = \int\cos\beta\, ds, \quad z = \int\cos\gamma\, ds$$

ist, so ergiebt sich, dass bei jeder Verbiegung der Minimalfläche, bei der die Fläche eine Minimalfläche bleibt, die beiden Krümmungen homogene lineare Functionen der ursprünglichen Krümmungen bleiben (§ 20, S. 33).

Ist die Curve C eben und wird ihre Ebene zur xy-Ebene genommen, so müssen wir

$$z = 0, \quad \cos\lambda = 0, \quad \cos\mu = 0, \quad \cos\nu = 1$$

setzen. Dann lauten die Gleichungen (26) einfach:

$$u = x, \quad v = y, \quad w = is.$$

Für conjugierte Werte von s behalten die reellen Teile von u und v ein und denselben Wert, und es liegt demnach die Fläche zur xy-Ebene symmetrisch, wie auch am Schlusse des vorigen Paragraphen bemerkt worden ist.

b) Sollte die Curve C statt geodätische Linie Haupttangentencurve sein, so hätten wir:

$$X = \cos\lambda, \quad Y = \cos\mu, \quad Z = \cos\nu,$$

und es würden somit die Schwarz'schen Formeln lauten:

$$u = x - i\int\cos\xi\, ds, \quad v = y - i\int\cos\eta\, ds, \quad w = z - i\int\cos\zeta\, ds.$$

*) Es lässt sich leicht nachweisen, dass die Minimalflächen die einzigen Flächen sind, die eine Verbiegung gestatten, bei der sich die beiden Krümmungen einer jeden geodätischen Linie vertauschen.

§ 206. Kriterium dafür, dass eine Fläche in eine Minimalfläche verbiegbar ist.

Wir schliessen das vorliegende erste Kapitel über die Minimalflächen mit der Lösung der Aufgabe: Zu entscheiden, ob eine gegebene Fläche in eine Minimalfläche verbogen werden kann.

Die Entscheidung ergiebt sich sehr einfach daraus, dass das Linienelement einer auf ihre Krümmungslinien bezogenen Minimalfläche durch

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

gegeben ist, während das Krümmungsmass nach S. 359

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}$$

ist und nach S. 68 die Differentialform:

$$\sqrt{-K}\, ds^2 = du^2 + dv^2$$

die Krümmung Null besitzt. Umgekehrt nehmen wir nun an, dass für eine Fläche (mit entgegengesetzten Hauptkrümmungsradien), deren Linienelement

$$ds = \sqrt{Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2}$$

ist, die Differentialform

$$\sqrt{-K}(Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2)$$

die Krümmung Null besitze, sodass für passend gewählte Veränderliche α, β (die sich nach S. 171 mittels Quadraturen finden lassen)

$$\sqrt{-K}(Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2) = d\alpha^2 + d\beta^2$$

ist. Setzen wir $K = -\frac{1}{\lambda^2}$, so ergiebt sich:

$$(27) \qquad Edu^2 + 2F du\, dv + Gdv^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

demnach (§ 35, S. 68):

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial\beta^2}\right),$$

d. h.:

$$\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial\beta^2} = \frac{2}{\lambda}.$$

Das Linienelement

$$\sqrt{\frac{1}{\lambda}(d\alpha^2 + d\beta^2)}$$

gehört folglich zur Kugel und also das Linienelement (27) zu einer Minimalfläche, die sich mittels Quadraturen ergiebt, sobald die Coordinaten X, Y, Z eines Punktes der Kugel als Functionen von α, β bekannt sind. Also: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Fläche auf eine Minimalfläche abwickel-

bar ist, lautet: es muss die Differentialform, die das Quadrat des Linienelements der Fläche angiebt, mit der Quadratwurzel aus dem negativen Wert des Krümmungsmasses der Fläche multipliciert, eine Form von der Krümmung Null ergeben.

Dieselbe Bedingung können wir in andrer Form durch die Gleichung:

$$\Delta_2 \log(-K) = 4K$$

nach (15), S. 67, ausdrücken. In dieser Fassung wurde sie von Ricci angegeben, der das soeben abgeleitete Ergebnis zuerst fand.

Beispielsweise sehen wir zu, ob es Linienflächen giebt, die auf Minimalflächen abwickelbar sind. Bringen wir das Quadrat des Linienelements der Linienfläche in die Form (§ 116, S. 222):

$$ds^2 = du^2 + [(u-\alpha)^2 + \beta^2]\,dv^2,$$

so ergiebt sich wie auf S. 223:

$$K = -\frac{\beta^2}{[(u-\alpha)^2 + \beta^2]^2},$$

und die obige Bedingung ist nur für constantes α und β erfüllt, woraus hervorgeht, dass die einzigen Linienflächen der gesuchten Art diejenigen sind, welche auf die Minimal-Schraubenregelfläche abwickelbar sind, d. h. die Ortsflächen der Binormalen der Curven mit constanter Torsion (nach S. 228).

Kapitel XV.

Das Plateau'sche Problem und die Schwarz'sche Minimalfläche.

Wortlaut des Plateau'schen Problems. — Grundlegende Betrachtungen über die beiden conformen Abbildungen der Minimalfläche auf die Gaussische Kugel und auf die Ebene der complexen Veränderlichen σ. — Fall einer aus geradlinigen Strecken bestehenden Begrenzung oder allgemeiner einer Schwarz'schen Begrenzung. — Fall des von zwei Paar Gegenkanten eines regulären Tetraeders gebildeten Vierecks (Schwarz'sche Fläche). — Oktaedernetz auf der Kugel. — Analytische Darstellung der Gruppe der 24 Drehungen des Oktaedernetzes. — Bestimmung von $F(\tau)$ für die Schwarz'sche Fläche: $F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}}$. — Proben bezüglich der Grenzcurve. — Untersuchung derjenigen Gruppe von Bewegungen des Raumes, welche die Schwarz'sche Fläche ungeändert lässt. — Eigenschaften der analytischen Fortsetzung. — Die conjugierte Minimalfläche und die entsprechende Gruppe von Bewegungen. — Sätze von Schwarz über die zweite Variation des Flächeninhalts eines Minimalflächenstücks.

---

§ 207. Das Plateau'sche Problem.

Die fundamentale Aufgabe, auf die sich die Theorie der Minimalflächen aufbaut, sprechen wir in der folgenden präcisen Fassung aus:

Gegeben ist eine geschlossene Begrenzung; es soll ein zusammenhängendes Minimalflächenstück construiert werden, das von dieser Begrenzung umschlossen ist und im Innern keine singulären Punkte besitzt.

Berühmt sind die Experimente von Plateau, durch die dieser Physiker die Aufgabe praktisch in der Weise löste, dass er die physisch dargestellte Begrenzung in die nach ihm benannte Flüssigkeit tauchte. Die Flüssigkeitslamelle, die zwischen der Begrenzung ausgespannt bleibt, weicht in der That gestaltlich sehr wenig von einer Minimalfläche ab.

Die Analysis ist weit davon entfernt, das Plateau'sche Problem allgemein lösen zu können; jedoch ist in dem Falle, dass die Begrenzung aus geradlinigen Strecken besteht, sowie in einem andern Falle,

den wir bald angeben werden, eine Reihe wichtiger Sätze bekannt, die wir Riemann, Weierstrass und Schwarz verdanken.

Wir beschränken uns hier auf die Entwickelung nur einer Methode, die sich bei diesen Untersuchungen von selbst bietet und auf der Theorie der conformen Abbildungen beruht. Diese Methode reicht in den einfachsten Fällen aus, insbesondere für die Schwarz'sche Minimalfläche, die von einem von vier paarweise einander gegenüberliegenden Kanten eines Tetraeders gebildeten windschiefen Viereck begrenzt wird. Der Behandlung dieses in vielen Beziehungen so interessanten besonderen Falles ist das vorliegende Kapitel hauptsächlich gewidmet.

Die Methode der conformen Abbildungen reicht, wie vorhin bemerkt, nur in einigen der einfachsten Fälle aus. Der Leser findet in dem Buche von Darboux (1. Bd., S. 453 u. f.) eine zweite allgemeinere und weit erfolgreichere Methode entwickelt, auf die wir hier nur kurz hinweisen können.

§ 208. Conforme Abbildung der Minimalfläche auf die Gaussische Kugel und auf die Ebene.

Wir betrachten ein von einer geschlossenen Umrandung C begrenztes Minimalflächenstück A und sein sphärisches Bild B, das infolge der fundamentalen Eigenschaft der Minimalflächen nach S. 252 ein conformes Abbild des Flächenstücks A ist. Wir nehmen ferner an, dass dieses Flächenstück B auf der Kugel einblättrig sei. Indem wir weiter für die Minimalfläche S wieder die Bezeichnungen des vorigen Kapitels wählen, führen wir wieder die complexe Veränderliche

$$\sigma = \int \sqrt{2F(\tau)}\, d\tau$$

ein, deren reeller Teil u und deren mit dem Factor i multiplicierter Teil v, gleich Constanten gesetzt, die Krümmungslien von S geben (S. 359).

Ist, wie wir voraussetzen wollen, die Function σ innerhalb des Flächenstücks A endlich, stetig und eindeutig, so erhalten wir durch Ausbreiten der Werte von σ in einer complexen Ebene von dem Stück A ein neues conformes Abbild B'. Es sind somit das Flächenstück B auf der Kugel und das Flächenstück B' in der Ebene confofm auf einander abgebildet. Wenn das Gesetz bekannt ist, nach dem die Punkte beider Stücke einander zugeordnet sind, so ist auch die Fläche S vollständig bekannt, da wir dann, weil σ als Function von τ gegeben ist, die Weierstrass'sche Function

$$F(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2$$

kennen, welche die Fläche charakterisiert (S. 360).



Sobald also die gegebene Begrenzung C so beschaffen ist, dass sich sowohl das Flächenstück B auf der Kugel als auch das ebene Flächenstück B' bestimmen lässt, so lässt sich das Plateau'sche Problem für diese Begrenzung auf die bekannte Aufgabe der Analysis zurückführen: ein gegebenes Flächenstück conform auf ein anderes abzubilden.

Der eben erwähnte Umstand tritt nun, wenigstens mit einer gewissen Unbestimmtheit, dann ein, wenn die Begrenzung C aus geradlinigen Strecken besteht. Was nämlich das sphärische Bild B anbetrifft, so entspricht jeder geradlinigen Strecke r der Begrenzung C auf der Begrenzung von B ein Bogen eines grössten Kreises in einer auf r senkrechten Ebene; das Flächenstück B ist also ein sphärisches Polygon, dessen Begrenzung von der Lage nach völlig bestimmten Bogen grösster Kreise gebildet wird. Betrachten wir zweitens das ebene Flächenstück B', so ist, da jeder geradlinige Bestandteil der Begrenzung C eine Haupttangentencurve der Fläche ist, das entsprechende Stück der Begrenzung von B' ebenfalls geradlinig und der einen oder der anderen Halbierungslinie der Axenwinkel in der Ebene B, nämlich:

$$u - v = 0 \quad \text{oder} \quad u + v = 0,$$

parallel. Das Plateau'sche Problem geht also in dem vorliegenden Falle in die folgende Aufgabe über: Das sphärische Polygon B auf das ebene Geradenpolygon B' conform abzubilden.

§ 209. Fall einer aus geradlinigen Strecken und aus Ebenen bestehenden Begrenzung.

Dieselben Überlegungen gelten auch noch in einem allgemeineren Falle, der von Schwarz in seinen „Fortgesetzten Untersuchungen über Minimalflächen"*) folgendermassen formuliert worden ist:

Gegeben sei eine zusammenhängende, geschlossene Kette von geradlinigen Strecken und Ebenen; es soll ein einfach zusammenhängendes, von den geradlinigen Strecken und den Ebenen der Kette begrenztes Minimalflächenstück bestimmt werden derart, dass die Fläche die Ebenen rechtwinklig schneidet.

Die geradlinigen Teile der Begrenzung C sind Haupttangentencurven, und die krummlinigen Teile sind Krümmungslinien in zur Fläche senkrechten Ebenen. Die sphärischen Bilder der letzteren Teile sind also ebenfalls Bogen grösster Kreise und zwar in Ebenen, die den Ebenen der Kette parallel sind. In der σ-Ebene ist also das

*) Monatsberichte der Berliner Akademie, 1872. (Werke, 1. Bd., S. 126 u. f.)

Bild eines solchen Bogens ein der einen oder der anderen Coordinatenaxe paralleles Geradenstück. Auch in diesem allgemeinen Falle hängt demnach die Lösung des Plateau'schen Problems von den Gleichungen ab, welche die conforme Abbildung eines sphärischen Polygons auf ein ebenes Geradenpolygon geben.

Betrachten wir z. B. den einfachsten Fall, in dem die Kette von zwei geradlinigen Strecken AB und AC gebildet wird, die in B und C von einer Ebene begrenzt seien, die von der Fläche senkrecht geschnitten werden soll. Der Minimalflächensector ABC, wie ihn das Experiment liefert, hat zum Bilde auf der Kugel ein vollkommen bestimmtes sphärisches Dreieck. Sein ebenes Bild B' ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, dessen Hypotenuse einer der Coordinatenaxen parallel ist.

Die entsprechende Abbildungsaufgabe wird bekanntlich mittels hypergeometrischer Reihen gelöst.

Wir nehmen nun an, es wäre uns gelungen, für eine gegebene Schwarz'sche Begrenzung das Plateau'sche Problem zu lösen. Das gesuchte Minimalflächenstück Σ ergiebt sich aus den Weierstrass'schen Formeln, indem man die complexe Veränderliche τ innerhalb des sphärischen Polygons B wandern lässt. Wir wollen jedoch unter Benutzung der am Schlusse des § 204 bewiesenen Symmetriesätze untersuchen, was eintritt, wenn bei der analytischen Fortsetzung der Function $F(\tau)$ die analytische Fortsetzung dieses Flächenstücks betrachtet wird. Überschreitet τ eine Seite l des Polygons B, der ein geradliniges Stück r der Schwarz'schen Begrenzung entspricht, so kommen wir auf der Fläche aus dem Gebiet Σ in das bezüglich der Strecke r zu ihm symmetrische Gebiet und bleiben in diesem, solange τ innerhalb des bezüglich der Seite l zu B symmetrischen sphärischen Polygons bleibt. Entspricht der Seite l von B ein krummliniges Stück der Schwarz'schen Begrenzung in einer zu Σ senkrechten Ebene der Kette, so ist der Schluss ein ganz ähnlicher; wir gelangen dann aus Σ in ein neues zu dieser Ebene symmetrisches Gebiet Σ'. Somit finden wir bei der analytischen Fortsetzung der Minimalfläche für jede Seite ein neues zu dem Flächenstück Σ symmetrisches und an dasselbe angrenzendes Gebiet.

Auf jedes dieser Gebiete lässt sich dieselbe Schlussweise anwenden. Somit besteht die analytische Fortsetzung unserer Fläche aus unendlich vielen, abwechselnd symmetrischen und congruenten Teilen. Im allgemeinen enthält ein endliches Gebiet des Raumes unendlich viele solcher Teile. Um uns davon zu überzeugen, brauchen wir nur den Fall zu betrachten, dass sich zwei geradlinige Stücke der Begrenzung unter einem zu π in keinem rationalen Verhältnis stehenden Winkel

schneiden. Die hier berührte Frage hängt mit derjenigen der Bewegungsgruppen zusammen und kann ohne die wirkliche Kenntnis des von der gegebenen Schwarz'schen Begrenzung eingeschlossenen Minimalflächenstücks behandelt werden. Wir brauchen nämlich nur zuzusehen, ob die Spiegelungen gegen die geradlinigen Seiten und gegen die Ebenen der Begrenzung eine stetige oder eine unstetige Gruppe erzeugen*).

Der einfachste Fall, in dem die entsprechende Minimalfläche gleichmässig den Raum durchsetzt, ist nun eben derjenige, zu dessen Behandlung wir nunmehr übergehen wollen und in dem die Schwarz'sche Begrenzung ein von zwei Paar Gegenkanten eines regelmässigen Tetraeders gebildetes windschiefes Viereck ist.

§ 210. **Fall des von zwei Paar Gegenseiten eines regulären Tetraeders gebildeten Vierecks.**

Von den sechs Kanten eines regelmässigen Tetraeders denken wir uns die beiden Gegenkanten AD und BC fortgenommen und betrachten das Minimalflächenstück Σ, das von dem windschiefen Viereck $ABDC$ begrenzt wird.

Wie sich bei dem entsprechenden Plateau'schen Experiment herausstellt, ist diese Fläche symmetrisch zu denjenigen Ebenen, welche durch die weggedachten Kanten AD und BC senkrecht zu den Gegenkanten BC bezw. AD gelegt werden. Sie liegt ganz im Innern des Grundtetraeders $ABCD$. Die Tangentialebenen in den vier Ecken sind gerade die Seitenflächen des Tetraeders, und ihre positiven Seiten sind für zwei Gegenecken die inneren, für die beiden anderen die äusseren.

Daraus folgt, dass das sphärische Bild von Σ ein sphärisches Viereck $A'B'D'C'$ ist, dessen Winkel 120^0 betragen. Um ein solches Viereck auf der Kugel zu erhalten, brauchen wir in dieselbe nur einen Würfel einzubeschreiben. Dann sind die vier Ecken einer Würfelfläche die Ecken des gesuchten Vierecks. Nun sehen wir, dass die Halbierungsebene des Dieders BC die Fläche Σ senkrecht schneidet und daher in zwei symmetrische Sectoren ABC und DBC teilt. Diese haben die beiden sphärischen Dreiecke $A'B'C'$ und $D'B'C'$, in welche die Diagonale $B'C'$ das vorhin betrachtete Viereck teilt, zu sphärischen Bildern.

Wir können demnach an Stelle unserer Aufgabe die folgende ein-

*) S. die Entwickelungen des Textes, § 221—222, über die Schwarz'sche Fläche.

fachere setzen: den kleinsten Sector ABC zu bestimmen, der von zwei geradlinigen Strecken AB, AC und der Curve BC in einer zur Fläche senkrechten Ebene begrenzt wird. Das sphärische Bild dieses Sectors ist das sphärische Dreieck $A'B'C'$, in welchem Winkel A' 120°, B' 60° und C' ebenfalls 60° beträgt. Nun ist das ebene Bild desselben Sectors in der complexen σ-Ebene (S. 385) ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck abc, dessen Hypotenuse bc einer der Coordinatenaxen in der σ-Ebene parallel ist.

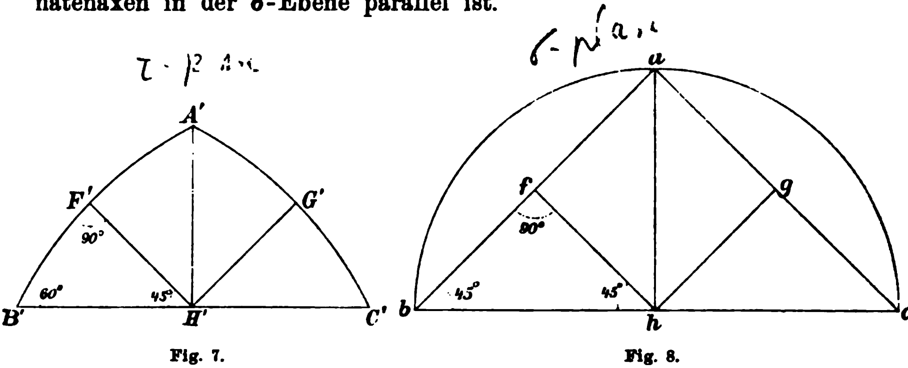


Fig. 7. Fig. 8.

Um die zu unserer Fläche gehörige Weierstrass'sche Function $F(\tau)$ zu finden, müssen wir also σ als Function von τ so ausdrücken, dass das sphärische Dreieck $A'B'C'$ conform auf das ebene Dreieck abc abgebildet wird. Nun fällen wir von A' die Höhe $A'H'$, sodass wir auf diese Weise das Dreieck $A'B'C'$ in zwei symmetrische Dreiecke, $A'B'H'$ und $A'C'H'$ zerlegen, und teilen wieder jedes dieser beiden Dreiecke durch die von H' gefällten Höhen $H'F'$ und $H'G'$ in zwei kleinere symmetrische Dreiecke.

Nehmen wir mit dem ebenen Dreieck abc eine ganz analoge Zerlegung vor, so ist klar, dass wir nur das sphärische Dreieck $B'H'F'$ mit den Winkeln von 60°, 45° und 90° conform so auf das ebene Dreieck bhf mit den Winkeln von bezüglich 45°, 45° und 90° abzubilden brauchen, dass die Ecken einander in der angegebenen Reihenfolge entsprechen. Die Function $\sigma(\tau)$, die diese Abbildung leistet, bildet auch, auf das ganze Dreieck $A'B'C'$ ausgedehnt, dieses Dreieck auf abc ab.

Um diese Abbildung zu bewerkstelligen, bilden wir die beiden Dreiecke $B'F'H'$ und bfh conform auf die Halbebene einer complexen Hilfsveränderlichen z so ab, dass der Begrenzung jedes Dreiecks die reelle Axe entspricht. Dabei können wir noch diejenigen drei Punkte der reellen Axe in der z-Ebene, welche den Ecken entsprechen, willkürlich annehmen. Wir wollen sie so annehmen, dass

$$\begin{aligned} &\text{in } B', b \quad z = 0, \\ &\text{in } F', f \quad z = 1, \\ &\text{in } H', h \quad z = \infty \end{aligned}$$

ist.

§ 211. **Oktaedernetz auf der Kugel.**

Die Function $z(\tau)$, welche die Abbildung des sphärischen Dreiecks $B'F'H'$ auf die Halbebene z leistet, ist einfach eine rationale Function von τ vom 24. Grade; ihre Umkehrung $\tau(z)$ ist die sogenannte Oktaederirrationalität. Wir wollen nun diejenigen auf die Oktaederirrationalität bezüglichen fundamentalen Gleichungen, welche für unseren Zweck in Frage kommen, in gedrängter Kürze entwickeln, indem wir in betreff eines eingehenderen Studiums auf das Buch von Klein: „Vorlesungen über das Ikosaeder“ verweisen.

In die complexe Kugel beschreiben wir ein reguläres Oktaeder und projicieren die Seitenflächen des Oktaeders vom Mittelpunkt aus auf die Kugel. Dadurch wird die Kugelfläche in acht sphärische Dreiecke zerlegt, deren Winkel sämtlich Rechte sind. Jedes dieser Dreiecke zerlegen wir weiter durch die drei Mittellinien in sechs Teildreiecke, die wir als Elementardreiecke bezeichnen.

Die Kugelfläche ist auf diese Weise in ein Netz von 48 abwechselnd symmetrischen und congruenten Elementardreiecken zerlegt. In jedem derselben betragen, wie in dem Dreieck $B'H'F'$ des vorigen Paragraphen, die Winkel 60^0, 45^0 und 90^0.

Dieses Netz nennen wir das Oktaedernetz. Um die directe Congruenz von der Symmetrie zu unterscheiden, denken wir uns diejenigen 24 Dreiecke des Netzes, welche dem Dreieck, von dem wir ausgegangen sind, congruent sind, schraffiert.

Wir müssen nun das Oktaedernetz auf der Kugel:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

in einer bestimmten Weise orientieren. Wir legen zwei Ecken des Oktaeders in die Pole $(0, 0, \pm 1)$ und das von den vier anderen Ecken in der Äquatorebene $\zeta = 0$ gebildete Quadrat so, dass seine Seiten der ξ- und der η-Axe parallel sind. Vom Pol $\tau = \infty$ projicieren wir das Oktaedernetz stereographisch auf die Ebene des Äquators. Wenn wir dann die ebenen Dreiecke, welche die Bilder der schraffierten Dreiecke des Netzes sind, ebenfalls schraffieren, so erhalten wir die Figur 9.

Die schraffierten Dreiecke des Oktaedernetzes stossen zu je vieren in den Oktaederecken, zu je dreien in den (auf die Kugel projicierten) Mittelpunkten der Seitenflächen und zu je zweien in den Mittelpunkten

der Kanten zusammen. Die directe Überlegung oder auch schon der blosse Anblick der Figur ergiebt unmittelbar, dass die Werte der complexen Veränderlichen τ in diesen Punkten die folgenden sind:

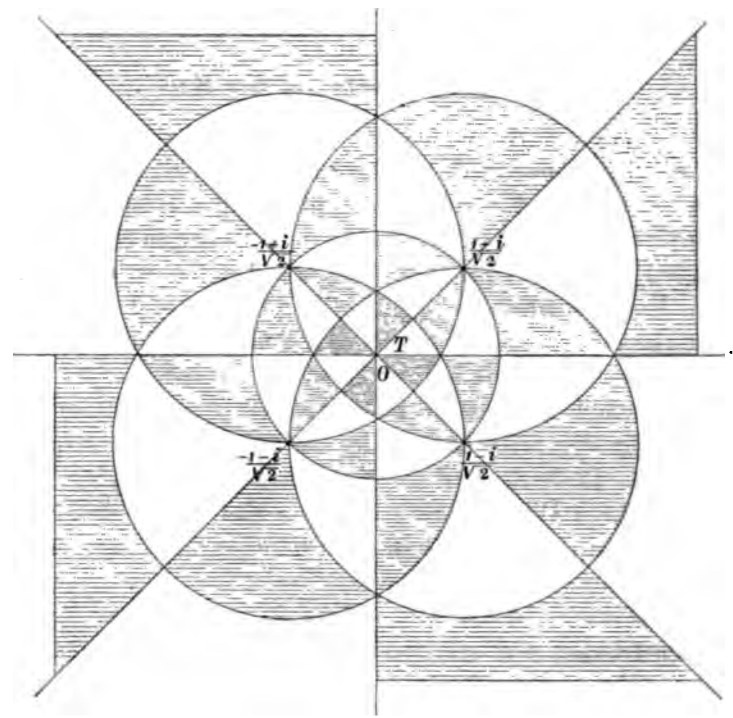


Fig. 9. (Oktaedernetz.)

a) in den Oktaederecken: $\tau = \infty,\ 0,\ \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}},\ \frac{\pm 1 + i}{\sqrt{2}};$

b) in den Mittelpunkten der Seitenflächen: $\tau = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}},\ \frac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, i,\ \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, i;$

c) in den Mittelpunkten der Kanten: $\tau = \pm 1,\ \pm i,\ (1 \pm \sqrt{2})\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ (1 \pm \sqrt{2})\frac{1-i}{\sqrt{2}},\ -(1 \pm \sqrt{2})\frac{1+i}{\sqrt{2}},\ -(1 \pm \sqrt{2})\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

Nun bilden wir drei Polynome in τ vom 5., 8. und 12. Grade, von denen das erste, ω, in den Punkten a), ausser in $\tau = \infty$, das zweite, w, in den Punkten b) und das dritte, χ, in den Punkten c) von der ersten Ordnung verschwinden soll. Durch wirkliche Ausrechnung finden wir sofort:

(1) $\omega = \tau(1 + \tau^4), \quad w = 1 - 14\tau^4 + \tau^8, \quad \chi = 1 + 33\tau^4 - 33\tau^8 - \tau^{12}.$

§ 212. Conforme Abbildung des Oktaedernetzes.

Nach dieser Vorbereitung nehmen wir an, dass die Function $z(\tau)$ die conforme Abbildung des Fundamentaldreiecks T unseres Netzes, dessen Ecken in den Punkten (s. die Figur 9):

$$\tau = 0, \quad \tau = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad \tau = (\sqrt{2}-1)\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

liegen und dessen Winkel bezüglich 45°, 60° und 90° betragen, auf die (positive) halbe z-Ebene in der Weise leistet, dass, wenn τ den Umfang des Dreiecks durchläuft, z die reelle Axe durchläuft, wobei den angegebenen Werten von τ in den Eckpunkten der Reihe nach die Werte

$$z = \infty, \quad z = 0, \quad z = 1$$

entsprechen sollen. Wir breiten nun z nach den bekannten Regeln der analytischen Fortsetzung in der ganzen complexen τ-Ebene oder noch besser auf der ganzen complexen τ-Kugelfläche aus, wobei wir Nachstehendes festsetzen: Jeder Punkt τ' der complexen Kugelfläche gehört einem der 48 Dreiecke des Netzes an. Diesem Punkte τ' entspricht in dem Fundamentaldreieck ein homologer Punkt τ, und als Wert von z in τ' müssen wir entweder denselben Wert wie in τ oder den conjugierten Wert annehmen, je nachdem das Dreieck, in dem τ' liegt, dem Fundamentaldreieck congruent oder zu ihm symmetrisch ist. Die Function $z(\tau)$ ist somit auf der ganzen complexen Kugelfläche ausgebreitet; sie ist auf ihr eindeutig und hat zu singulären Punkten nur die Punkte a), die Oktaederecken, die für sie Pole vierter Ordnung sind. $z(\tau)$ ist demnach eine rationale Function von τ. Da ferner ihre Nullpunkte gerade in den acht Punkten b) liegen, in denen w verschwindet, und von der dritten Ordnung sind, so ergiebt sich sofort

$$z = C\frac{w^3}{\omega^4},$$

wo C ein constanter Factor ist. Der Wert von C ergiebt sich unmittelbar daraus, dass für $\tau = 1$

$$w = -12, \quad \omega = 2, \quad z = 1$$

ist, gleich $-\frac{1}{2^2 3^3}$ oder $-\frac{1}{108}$. Also lautet die gesuchte Gleichung:

(2) $$z = -\frac{(1 - 14\tau^4 + \tau^8)^3}{108\tau^4(1+\tau^4)^4} = -\frac{w^3}{108\,\omega^4}.$$

Ferner sind noch die folgenden Gleichungen einzuführen: Die Function $z - 1$ wird wie z unendlich und verschwindet in den Punkten c), in denen $\chi = 0$ ist, von der zweiten Ordnung. Es ist demnach:

$$z - 1 = C'' \frac{\chi^4}{\omega^4} \quad (C'' = \text{Const.}).$$

Aus der Combination dieser Gleichung mit der Gleichung (2) ergiebt sich die Identität:

$$108\,\omega^4 + w^3 + 108\,C''\chi^2 = 0,$$

aus der, wenn τ z. B. gleich Null gesetzt wird,

$$C'' = -\frac{1}{108}$$

folgt. Demnach besteht zwischen den Polynomen (1), d. h. ω, w, χ, die Identität:

(3) $$108\,\omega^4 + w^3 - \chi^2 = 0,$$

die sich auch unmittelbar direct bestätigen lässt. Wir haben also die Gleichung:

(4) $$z - 1 = -\frac{(1 + 33\tau^4 - 33\tau^8 - \tau^{12})^2}{108\tau^4(1+\tau^4)^4} = -\frac{\chi^2}{108\,\omega^4}.$$

Aus den Gleichungen (2) und (4) geht hervor, dass der Differentialquotient $\frac{dz}{d\tau}$ in den Nullstellen von w von der zweiten und in denjenigen von χ von der ersten Ordnung unendlich klein wird. Da er ferner in den Nullstellen von ω von der fünften und für $\tau = \infty$ von der dritten Ordnung unendlich gross ist, so hat er keine weiteren Unendlichkeitsstellen als die eben angeführten. Daraus ergiebt sich bis auf einen constanten Factor A:

$$\frac{dz}{d\tau} = A\,\frac{\chi w^2}{\omega^5}.$$

Behufs Bestimmung von A beachte man, dass aus der Gleichung (2)

$$\lim_{\tau=0}\left(\tau^5 \frac{dz}{d\tau}\right) = \frac{1}{3^3}$$

folgt. Es ist also $A = \frac{1}{27}$. Folglich besteht die Gleichung:

(5) $$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\chi w^2}{27\,\omega^5},$$

die sich unter Berücksichtigung der Identität:

$$4w\frac{d\omega}{d\tau} - 3\omega\frac{dw}{d\tau} = 4\chi$$

auch direct bestätigen lässt.

§ 213. Analytische Darstellung der Gruppe der 24 Drehungen des Oktaedernetzes.

Nachdem wir für unsere Abbildung die Gleichung (2) erhalten haben, können wir leicht nachweisen, dass dieselbe die gewünschte conforme Abbildung leistet.

Hierzu schicken wir zweckmässig die folgenden Überlegungen voraus: Das Oktaedernetz kann mit sich selbst dadurch zur Deckung gebracht werden, dass ein Elementardreieck des Netzes auf irgend ein anderes der 23 ihm congruenten Dreiecke gelegt wird. Jede dieser Drehungen der complexen Kugel in sich wird analytisch infolge der Cayley'schen Gleichung (§ 45, S. 84) durch eine lineare Transformation der complexen Veränderlichen τ dargestellt. Die 24 linearen Transformationen oder Substitutionen (einschliesslich der identischen Substitution), welche den das Oktaedernetz in sich überführenden Drehungen entsprechen, bilden offenbar eine Gruppe. Sie wird die Oktaedergruppe (oder Würfelgruppe) genannt. Wir bestimmen zunächst die wirklichen Ausdrücke für die Substitutionen der Gruppe. In erster Linie betrachten wir die Drehung des Oktaeders um 90° um denjenigen Durchmesser, welcher die Punkte $\tau = 0$ und $\tau = \infty$ verbindet (Polaxe); sie wird durch

$$\tau' = i\tau$$

dargestellt und liefert, wiederholt angewandt, die vier linearen Substitutionen (die identische Substitution einbegriffen):

$$\tau' = i^r \tau, \quad (r = 0, 1, 2, 3).$$

Bei einer Spiegelung des Oktaeders an der $\mathfrak{x}$-Axe vertauschen sich die Punkte $\tau = 0$ und $\tau = \infty$, während die beiden Punkte $\tau = +1$ und $\tau = -1$ fest bleiben. Die Spiegelung wird durch die Substitution:

$$\tau' = \frac{1}{\tau}$$

dargestellt, die, mit den vier vorhergehenden combiniert, weitere vier Substitutionen liefert, so dass wir bis jetzt acht, nämlich:

$$\tau' = i^r \tau, \quad \tau' = \frac{i^r}{\tau} \quad (r = 0, 1, 2, 3)$$

haben, die in der Oktaedergruppe eine Untergruppe (eine Diedergruppe) bilden. Ferner betrachten wir eine Drehung von 120° um die Verbindungslinie der Mitten zweier (paralleler) gegenüberliegender Oktaederflächen. Diese Drehung gehört offenbar mit zur Gruppe. Als Beispiel wählen wir diejenige Drehung dieser Art, bei der die drei Oktaederecken:

$$\tau = \infty, \quad \tau = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \tau = \frac{1-i}{\sqrt{2}},$$

also auch die diametral gegenüberliegenden Ecken:

$$\tau = 0, \quad \tau = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \tau = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$$

in der angegebenen Reihenfolge unter einander cyklisch vertauscht werden.

Bilden wir für diese Drehung den analytischen Ausdruck nach der Cayley'schen Gleichung:

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{-\beta_0\tau + \alpha_0} \quad (\alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 = 1),$$

so erhalten wir sofort:

$$\alpha = \frac{-1+i}{2}, \quad \beta = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Also ist:

$$\tau' = \frac{(1+i)\tau + \sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\tau - (1-i)}.$$

Aus der Combination dieser Gleichung und der vorhergehenden acht ergeben sich die 24 Substitutionen der Oktaedergruppe in der folgenden Normalform:

$$(6)\quad \begin{cases} \tau' = i^r, \quad \tau' = \frac{i^r}{\tau}, \quad \tau' = i^r \cdot \frac{(1+i)\tau + \sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\tau - (1-i)}, \quad \tau' = i^r \frac{(1-i)\tau + \sqrt{2}}{\sqrt{2}\,\tau - (1+i)}, \\ \tau' = i^r \frac{\sqrt{2}\,\tau - (1-i)}{(1+i)\tau + \sqrt{2}}, \quad \tau' = i^r \frac{\sqrt{2}\,\tau - (1+i)}{(1-i)\tau + \sqrt{2}} \\ (r = 0, 1, 2, 3). \end{cases}$$

§ 214. Nachweis für die conforme Abbildung des Oktaedernetzes vermöge der aufgestellten Gleichungen.

Wir wollen nun direct nachweisen, dass uns die Gleichung (2) die gewünschte Abbildung giebt. Hierbei ist zunächst zu beachten, dass diese Function $z(\tau)$ ungeändert bleibt, wenn auf das Argument τ eine beliebige von den 24 Substitutionen (6) der Oktaedergruppe angewandt wird*). Jedem Werte von z entsprechen demnach 24 Werte von τ, die durch die Substitutionen (6) der Gruppe aus einem von ihnen hervorgehen. Die algebraische Function $\tau(z)$, deren 24 Zweige sich mittels der linearen Substitutionen (6) aus einem bestimmten Zweige ableiten lassen, wird nach Klein als Oktaederirrationalität bezeichnet.

Auf der Begrenzung eines jeden Elementardreiecks ist die Function $z(\tau)$ reell, was nur für ein bestimmtes Dreieck nachgewiesen zu werden braucht, da $z(\tau)$ auf der Begrenzung jedes anderen Dreiecks dieselben

*) Dieses ergiebt sich auch aus der directen Rechnung, da, wie sich leicht nachweisen lässt, die oben ausgesprochene Eigenschaft für die ersten acht Substitutionen (6), sowie für die Substitution: $\tau' = \frac{(1+i)\tau + \sqrt{2}}{\sqrt{2} - (1-i)}$ evident ist. Es folgt aber auch einfach daraus, dass sich bei diesen Substitutionen die Oktaederecken wie auch die Mittelpunkte der Seitenflächen unter einander vertauschen.

Werte annimmt. Nun ist $z(\tau)$ auf den beiden geradlinigen Seiten des Fundamentaldreiecks T, dessen Ecken in den Punkten:

$$\text{(a)} \qquad \tau = 0, \quad \tau = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad \tau = (\sqrt{2}-1)\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

liegen (§ 212), offenbar reell, da ja τ^4 reell ist. Auf der dritten, krummlinigen Seite nimmt $z(\tau)$ dieselben Werte an wie auf der die Punkte $\tau = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ und $\tau = 1$ verbindenden geradlinigen Seite des homologen Dreiecks, dessen Ecken in:

$$\tau = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad \tau = 1, \quad \tau = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

liegen, und ist demnach ebenfalls reell. Durchläuft τ die Begrenzung des Dreiecks T in positivem Sinne, so durchläuft z die reelle Axe von $-\infty$ bis $+\infty$ stets in demselben Sinne, da ja sonst einem reellen Werte von z mehr als 24 Werte von τ entsprechen würden. Nun lassen wir τ im Innern von T wandern; z wandert dann im Innern einer der beiden Halbebenen, und da umgekehrt jedem Werte von z entweder im Dreieck T oder in dem bezüglich der reellen Axe zu ihm symmetrischen Dreieck ein Wert von τ entspricht*), so ist klar, dass jedem Punkte z in dieser Halbebene E ein Punkt τ im Dreieck T entspricht. Da nun ferner infolge der Gleichung (5) $\frac{dz}{dt}$ innerhalb T nie Null oder unendlich wird, ausser in den Eckpunkten, so geht daraus hervor, dass die Abbildung von T auf E in der That conform ist**).

§ 215. Bestimmung von $F(\tau)$ für die Schwarz'sche Minimalfläche.

Um die Schwarz'sche Minimalfläche zu bestimmen, haben wir nun noch das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck bfh (§ 210) in der σ-Ebene, dessen Hypotenuse bh einer der Axen, sagen wir der reellen, parallel ist, conform auf die positive halbe z-Ebene so abzubilden, dass

$$\text{in } b\colon\ z = 0, \quad \text{in } f\colon\ z = 1, \quad \text{in } h\colon\ z = \infty$$

wird. Die bekannte Schwarz-Christoffel'sche Formel für die conforme Abbildung eines Geradenpolygons auf eine Halbebene giebt:

$$\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2 = \frac{C}{z^{3/2}(z-1)}.$$

*) Von den 24 Werten τ nämlich, die einem Werte von z entsprechen, liegt in jedem der 24 congruenten Dreiecke des Oktaedernetzes einer.

**) Die Halbebene E ist diejenige, in welcher der Coefficient des imaginären Teiles von z positiv ist, da sie, wenn die reelle Axe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen wird, links von ihr liegen muss.

Da $\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2$ für negativ reelles z positiv reell sein muss, so folgt:

$$C = iA^2 \ (A \text{ reell}),$$

demnach:

$$\left(\frac{d\sigma}{dz}\right)^2 = \frac{iA^2}{z^{3/2}(z-1)}, \quad \sigma = Ae^{\frac{i\pi}{4}}\int\frac{dz}{z^{3/4}(z-1)^{1/2}}.\text{*)}$$

Die Weierstrass'sche Function $F(\tau)$ für die Schwarz'sche Minimalfläche ergiebt sich aus der Gleichung:

$$F(\tau) = \frac{1}{2}\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2 = \frac{iA^2}{2}\cdot\frac{1}{z^{3/2}(z-1)}\left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2.$$

Setzen wir hierin für z, $z-1$, $\frac{dz}{d\tau}$ ihre durch die Gleichungen (2), (4), (5) (§ 212) als Functionen von τ bestimmten Werte ein, so erhalten wir bis auf einen constanten reellen Factor**), der nur die absoluten Grössenverhältnisse der Fläche beeinflusst:

$$F(\tau) = \frac{1}{w^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}.$$

Die Schwarz'sche Minimalfläche ist demnach durch die folgenden Gleichungen definiert:

$$(7)\quad \begin{cases} x = \Re\int^{\tau}\frac{1-\tau^2}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}d\tau, \quad y = \Re\int\frac{i(1+\tau^2)}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}d\tau, \\ \qquad\qquad z = \Re\int\frac{2\tau\, d\tau}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}. \end{cases}$$

Und nun wollen wir wirklich nachweisen, dass, wenn wir die Werte von τ auf der complexen Kugel auf das Innere eines der sechs sphärischen Vierecke mit Winkeln von 120° beschränken, die den Seitenflächen des eingeschriebenen Würfels entsprechen, wir ein Minimalflächenstück erhalten, das von vier paarweise einander gegenüberliegenden Kanten eines regelmässigen Tetraeders begrenzt wird.

*) Wird $z = t^2$ gesetzt, so ergiebt sich:

$$\sigma = 2A\sqrt{i}\int\frac{dt}{\sqrt{t^3-t}}.$$

Die Integration führt auf Lemniscatenfunctionen, und zwar ist in den Weierstrass'schen Bezeichnungen

$$t = \wp\left(\frac{a\sigma}{\sqrt{i}}\right),$$

wo a eine Constante ist und die Invarianten g_2, g_3 von $\wp$ die Werte $g_2 = 4$, $g_3 = 0$ haben.

**) Es ist zu beachten, dass, wenn τ die geradlinige Strecke von $\tau = 0$ bis $\tau = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ durchläuft, sowohl $\left(\frac{d\sigma}{d\tau}\right)^2$ als auch $\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}$ reell sind.



§ 216. Analytische Darstellung der Schwarz'schen Minimalfläche.

Das dritte Integral, das in den Gleichungen (7) auftritt, geht durch die Substitution: $\tau^2 = t$ unmittelbar in ein elliptisches erster Gattung über; die anderen beiden sind scheinbar hyperelliptisch, lassen sich aber, wie wir sofort sehen werden, mittels geeigneter Substitutionen ebenfalls auf elliptische Integrale zurückführen.

Zu diesem Zwecke müssen wir zunächst die Coordinatenaxen um 45^0 um die z-Axe drehen. Wir thun dieses, indem wir für $\frac{x-y}{\sqrt{2}}$ und $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ wieder x bez. y setzen. Dann erhalten wir:

$$x = \Re \int \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1 - i\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} d\tau, \quad y = \Re \int \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1 + i\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} d\tau,$$
$$z = \Re \int \frac{2\tau\, d\tau}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}}.$$

Des weiteren treffen wir die Verfügung, dass τ innerhalb desjenigen sphärischen Vierecks mit Winkeln von 120^0 wandern soll, dessen Ecken in den Punkten:

$$a = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad b = i\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad c = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, \quad d = -i\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$$

liegen, und verlegen ferner die gemeinsame untere Grenze der Integrale in den Punkt:

$$c = -a = -\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}},$$

sodass die Definitionsgleichungen des Minimalflächenstücks, für das wir den angegebenen Nachweis führen sollen, die folgenden sind:

$$(8)\begin{cases} x = \Re \int\limits_{-a}^{\tau} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{1 - i\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} d\tau, \quad y = \Re \int\limits_{-a}^{\tau} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{1 + i\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} d\tau, \\ z = \Re \int\limits_{-a}^{\tau} \frac{2\tau\, d\tau}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}}. \end{cases}$$

Dabei müssen wir in Betracht ziehen, dass sich infolge der Drehung um 45^0 um die z-Axe aus den Gleichungen (5), S. 359, für die Richtungscosinus der Flächennormale die Ausdrücke:

$$(8^*) \quad X = \frac{\tau + \tau_0 + i(\tau - \tau_0)}{\sqrt{2}(\tau\tau_0 + 1)}, \quad Y = \frac{\tau + \tau_0 - i(\tau - \tau_0)}{\sqrt{2}(\tau\tau_0 + 1)}, \quad Z = \frac{\tau\tau_0 - 1}{\tau\tau_0 + 1}$$

ergeben. Bei der wie vorhin vorgenommenen Abgrenzung des Änderungsbereichs von τ schwindet jede Zweideutigkeit aus diesen Aus-

drücken, wenn wir festsetzen, welchen Wert die Quadratwurzel in einem Punkte haben soll. Wir wollen, indem wir

$$F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}}$$

setzen, von vorn herein die Verfügung treffen, dass

$$F(0) = +1$$

sein soll. Da ferner die acht Verzweigungspunkte der Quadratwurzel in den Würfelecken:

$$\pm a, \quad \pm \frac{1}{a}, \quad \pm ia, \quad \pm \frac{i}{a}$$

liegen, so sehen wir, dass wir nur in der complexen τ-Ebene vier Querschnitte, nämlich von a bis $\frac{1}{a}$, von $-a$ bis $-\frac{1}{a}$, von ia bis $\frac{i}{a}$ und von $-ia$ bis $-\frac{i}{a}$, zu führen brauchen, damit $F(\tau)$ in der so zerschnittenen Ebene eine stetige, eindeutige und überall, ausser in den acht genannten Punkten, endliche Function werde.

§ 217. **Besondere Curven auf der Schwarz'schen Minimalfläche.**

Wir beginnen unseren Nachweis mit der Bestimmung der Curven, die auf dem in Rede stehenden Minimalflächenstück der reellen und der imaginären Axe der τ-Ebene, sowie den Halbierungslinien der zwischen denselben liegenden Winkel entsprechen.

1. Bezeichnen wir mit ρ eine reelle Veränderliche, so haben wir längs der reellen Axe:

$$\tau = \rho, \quad (-a \leqq \rho \leq a),$$

also:

$$(9) \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-a}^{\rho} (1 - \rho^2) F(\rho)\, d\rho, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-a}^{\rho} (1 - \rho^2) F(\rho)\, d\rho, \quad z = \int_{-a}^{\rho} 2\rho F(\rho)\, d\rho,$$

demnach:

$$x - y = 0.$$

Ferner ist längs dieser Linie infolge der Gleichungen (8*)

$$X - Y = 0,$$

d. h.: Die Ebene: $x = y$ schneidet Σ senkrecht, ist also eine Symmetrieebene von Σ.

2. Längs der imaginären Axe ist

$$\tau = i\rho, \quad d\tau = i\, d\rho.$$

Wenn wir mit x_0, y_0, z_0 die Werte von x, y, z in $\tau = 0$ bezeichnen, so haben wir, während τ die imaginäre Axe durchläuft:

$$(9^*)\quad \begin{cases} x - x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\varrho (1-\varrho^2)F(\varrho)\,d\varrho, \\ y - y_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^\varrho (1-\varrho^2)F(\varrho)\,d\varrho) \qquad (-a \overline{\gtrless} \varrho \leqq a), \\ z - z_0 = -\int\limits_0^\varrho 2\varrho F(\varrho)\,d\varrho, \end{cases}$$

folglich:

$$x + y = x_0 + y_0.$$

Längs dieser Curve von Σ ist infolge der Gleichungen (8*) $X + Y = 0$, d. h. die Ebene: $x + y = x_0 + y_0$ ist eine Symmetrieebene von Σ.

3. Längs der Halbierungslinie des von den positiven Axenrichtungen gebildeten Winkels ist

$$\tau = \sqrt{i}\,\varrho, \quad d\tau = \sqrt{i}\,d\varrho,$$

wo unter $\sqrt{i}$ der Wert:

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

zu verstehen ist. Es ergiebt sich somit:

$$x = x_0 + \int\limits_0^\varrho \frac{(1+\varrho^2)\,d\varrho}{\sqrt{1 + 14\varrho^4 + \varrho^8}}, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \quad (-a \overline{\gtrless} \varrho < a).$$

Der entsprechende Punkt auf der Fläche durchläuft eine zur x-Axe parallele Strecke.

4. Längs der zweiten Winkelhalbierenden ist

$$\tau = \sqrt{-i}\,\varrho, \quad \text{und wegen} \quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

demnach:

$$x = x_0, \quad y = y_0 + \int\limits_0^\varrho \frac{(1+\varrho^2)\,d\varrho}{\sqrt{1 + 14\varrho^4 + \varrho^8}}, \quad z = z_0.$$

Also durchläuft der Punkt (x, y, z) eine zur y-Axe parallele Strecke. Bis jetzt haben wir also erkannt, dass das Minimalflächenstück Σ die beiden Symmetrieebenen:

$$x - y = 0, \quad x + y = x_0 + y_0,$$

und zwei Symmetrieaxen, nämlich die durch (x_0, y_0, z_0) zu den Coordinatenaxen gezogenen Parallelen, besitzt.

Setzen wir:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-a}^{0} (1-\varrho^2) F(\varrho) d\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{0}^{a} (1-\varrho^2) F(\varrho) d\varrho,$$

$$B = \int_{-a}^{0} 2\varrho F(\varrho) d\varrho \qquad = -\int_{0}^{a} 2\varrho F(\varrho) d\varrho,$$

so erhalten wir:

$$x_0 = y_0 = A, \quad z_0 = B.$$

Im nächsten Paragraphen wird sich weiter $B = -A$ ergeben; für jetzt bemerken wir nur, dass sich aus den Gleichungen (9) und (9*) die Werte von x, y, z in den vier Eckpunkten a, b, c, d durch A und B ausdrücken lassen. Bezeichnen wir diese Werte durch Beisetzen der Indices a, b, c, d, so finden wir nämlich:

$$(10) \qquad \begin{cases} x_a = 2A, & y_a = 2A, & z_a = 0; \\ x_b = 2A, & y_b = 0, & z_b = 2B; \\ x_c = 0, & y_c = 0, & z_c = 0; \\ x_d = 0, & y_d = 2A, & z_d = 2B. \end{cases}$$

§ 218. Einfachere Form der Gleichungen der Schwarz'schen Minimalfläche.

Wie bereits bemerkt, lassen sich die beiden ersten Integrale in den Gleichungen (8) ebenfalls auf elliptische und zwar, wie wir sofort sehen werden, auf solche von genau derselben Form wie das dritte zurückführen. Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst allgemein, dass, wenn auf das Differential:

$$\frac{a + b\tau + c\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} d\tau \quad (a,\ b,\ \ c = \text{Const.})$$

eine der 24 Substitutionen der Oktaedergruppe (S. 394):

$$\tau = \frac{\alpha\tau' + \beta}{\gamma\tau' + \delta}$$

angewandt wird, dasselbe in das homologe Differential:

$$\frac{a' + b'\tau' + c'\tau'^2}{\sqrt{1 - 14\tau'^4 + \tau'^8}} d\tau'$$

übergeht, wo das Polynom $a' + b'\tau' + c'\tau'^2$, gleich Null gesetzt, diejenigen Werte von τ' zu Wurzeln hat, welche gemäss der angewandten Substitution den Wurzeln von:

$$a + b\tau + c\tau^2 = 0$$

entsprechen. Nun sind in jedem der beiden Differentiale:

$$\sqrt{-i}\,\frac{1 - i\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} d\tau, \quad \sqrt{i}\,\frac{1 + i\tau^2}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} d\tau$$



die Wurzeln der gleich Null gesetzten Zähler die Indices zweier Gegenecken des Oktaeders, die wir mittels passend gewählter Substitutionen der Oktaedergruppe in die Punkte 0 und ∞ verlegen können. Es lassen sich also das erste und das zweite Integral in den Gleichungen (8) (abgesehen von einem Factor) auf das dritte zurückführen. Als erste Substitution wählen wir diejenige, welche die cyklischen Vertauschungen:

$$(0,\ -\sqrt{i},\ -\sqrt{-i}),\ (\infty,\ \sqrt{i},\ \sqrt{-i})\ ^{*})$$

der Oktaederecken zur Folge hat, und als zweite die umgekehrte Substitution. Als erste Substitution erhalten wir:

(11) $$\tau = \frac{\sqrt{-i}\,\tau' + 1}{\tau' - \sqrt{i}}, \quad \tau' = \frac{\sqrt{i}\,\tau + 1}{\tau - \sqrt{-i}},$$

daher als zweite:

(11*) $$\tau = \frac{\sqrt{i}\,\tau'' + 1}{\tau'' - \sqrt{-i}}, \quad \tau'' = \frac{\sqrt{-i}\,\tau + 1}{\tau - \sqrt{i}}.$$

Für diese Substitutionen ergiebt die Ausführung der Rechnung:

$$\sqrt{-i}\,\frac{(1 - i\tau^2)\,d\tau}{\sqrt{1 - 14\tau^4 + \tau^8}} = \frac{2\tau'\,d\tau'}{\sqrt{1 - 14\tau'^4 + \tau'^8}}$$

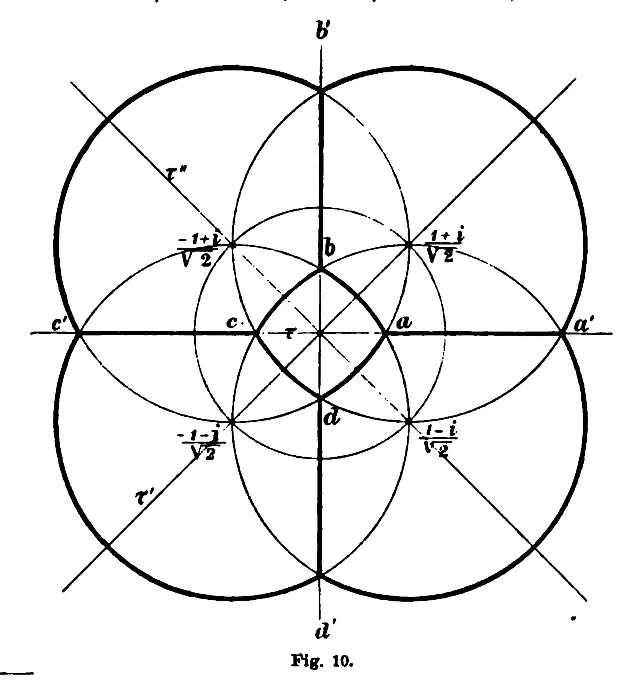


Fig. 10.

*) Unter $\sqrt{i}$ und $\sqrt{-i}$ sind stets die Werte:

$$\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

zu verstehen.

bezüglich:

$$\sqrt{i}\,\frac{(1+i\tau^2)d\tau}{\sqrt{1-14\tau^4+\tau^8}}=\frac{2\tau''d\tau''}{\sqrt{1-14\tau''^4+\tau''^8}},$$

wo nun noch festzusetzen ist, welcher Zweig der Quadratwurzel rechts gewählt werden soll.

Bleibt der Index von τ wie vorhin in dem Viereck $abcd$, so werden die Indices von τ' und τ'' in den Nachbarvierecken $cdd'c'$ bezw. $cbb'c'$ (Fig. 10 auf voriger Seite) liegen. Da nun $F(\tau')$ und $F(\tau'')$ genau die in § 216 angegebene Bedeutung haben, so kommt es darauf an, welches Vorzeichen in den Gleichungen:

$$\text{(a)}\qquad \begin{cases}\sqrt{-i}\,(1-i\tau^2)F(\tau)d\tau=\pm 2\tau' F(\tau')d\tau',\\ \sqrt{i}\,(1+i\tau^2)F(\tau)d\tau=\pm 2\tau'' F(\tau'')d\tau''\end{cases}$$

zu wählen ist. Dazu brauchen wir nur zuzusehen, welche Werte in der Umgebung des Punktes $\tau=0$ gelten, wobei wir die höheren Potenzen von τ vernachlässigen. Wir haben hier:

$$\tau=0,\qquad \tau'=-\sqrt{i},$$
$$F(0)=+1,\quad F(-\sqrt{i})=+\tfrac{1}{4}\,^{*}),$$
$$d\tau'=-2i\,d\tau.$$

Also ergiebt sich:

$$\sqrt{-i}\,(1-i\tau^2)F(\tau)d\tau=\sqrt{-i}\,d\tau,$$
$$2\tau' F(\tau')d\tau'=i\sqrt{i}\,d\tau=-\sqrt{-i}\,d\tau.$$

Ebenso ist:

$$\tau''=-\sqrt{-i},\quad F(\tau'')=+\tfrac{1}{4},\quad d\tau''=2i\,d\tau,$$
$$\sqrt{i}(1+i\tau^2)F(\tau)d\tau=\sqrt{i}\,d\tau,$$
$$2\tau'' F(\tau'')d\tau''=-\sqrt{i}\,d\tau.$$

Es gilt daher in beiden Gleichungen das untere Vorzeichen. Die Gleichungen (8), die Σ definieren, können also folgendermassen geschrieben werden:

$$\text{(12)}\qquad x=-\Re\int_{-a}^{\tau'}2\tau' F(\tau')d\tau',\quad y=-\Re\int_{-a}^{\tau''}2\tau'' F(\tau'')d\tau'',$$
$$z=-\Re\int_{-a}^{\tau}2\tau F(\tau)d\tau,$$

wobei dann festzuhalten ist, dass sich τ vom Punkte c aus im Innern des Vierecks $abcd$ bewegt und τ', τ'' die entsprechenden Wege in den Nachbarvierecken $cc'd'd$, $cc'b'b$ beschreiben.

*) Es ist nämlich $F(\tau)$ auf der Strecke von 0 bis $-\sqrt{i}$ stets reell und von Null verschieden.

§ 219. Begrenzungscurven.

Indem wir mit τ_0', τ_0'' die zu τ', τ'' conjugierten Grössen bezeichnen, schreiben wir die Gleichungen (12) in der folgenden Form:

$$(12^*)\quad \begin{cases} x = -\int\limits_{-a}^{\tau'} \tau' F(\tau')\, d\tau' - \int\limits_{-a}^{\tau_0'} \tau_0' F_0(\tau_0')\, d\tau_0', \\ y = -\int\limits_{-a}^{\tau''} \tau'' F(\tau'')\, d\tau'' - \int\limits_{-a}^{\tau_0''} \tau_0'' F_0(\tau_0'')\, d\tau_0'', \\ z = \int\limits_{-a}^{\tau} \tau\, F(\tau)\, d\tau + \int\limits_{-a}^{\tau_0} \tau_0 F_0(\tau_0)\, d\tau_0. \end{cases}$$

Nun können wir leicht erkennen, welcher Art die Begrenzung von Σ ist, die der Begrenzung $abcd$ des Vierecks, in dem sich τ bewegt, entspricht. Durchläuft nämlich τ die Strecke $\overline{cb}$, so durchläuft, wie wir sehen,

τ_0 die Strecke $\overline{cd}$,
τ' „ „ $\overline{cd}$,
τ_0' „ „ $\overline{cb}$,
τ'' „ „ $\overline{cc'}$,
τ_0'' „ „ $\overline{cc'}$.

Nun ist $F(\tau)$ längs $\overline{cc'}$ rein imaginär. Es folgt demnach aus den Gleichungen (12*) längs $\overline{cb}$:

$$y = 0, \quad x + z = 0.$$

Ebenso ergiebt sich längs $\overline{cd}$:

$$x = 0, \quad y + z = 0.$$

Die beiden entsprechenden Stücke der Begrenzung von Σ sind also zwei geradlinige Strecken von gleicher Länge, die einen Winkel von 60° mit einander bilden.

Nun brauchen wir nur auf die in § 217 angeführten Symmetrieeigenschaften zurückzugehen, um hieraus zu schliessen, dass die Begrenzung von Σ aus vier gleich langen geradlinigen Strecken besteht, von denen jede mit den beiden anstossenden Winkel von 60° bildet. Ferner folgt aus demselben Paragraphen, dass auf Σ noch zwei Gerade liegen, nämlich die Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten. Sie stehen auf einander senkrecht und schneiden sich im Mittelpunkt des regulären Tetraeders. Da nun ferner infolge des Obigen

$$x_b + z_b = 0, \quad y_d + z_d = 0$$

ist, so folgt aus den Gleichungen (10):

$$B = -A,$$

wie behauptet wurde. Die Länge l der Tetraederkante ist also durch

$$l = 2A\sqrt{2}$$

gegeben.

§ 220. Die Gruppe von Bewegungen, welche die Schwarz'sche Fläche ungeändert lässt.

Das Integral $\int_{-a}^{\tau} 2\tau F(\tau)d\tau$, von dem die Bestimmung unserer Fläche abhängt, geht durch die Substitution $\tau^2 = t$ in das elliptische Integral:

$$u = \int_{2-\sqrt{3}}^{t} \frac{dt}{\sqrt{1 - 14t^2 + t^4}} = \int_{2-\sqrt{3}}^{t} \frac{dt}{\sqrt{[(2-\sqrt{3})^2 - t^2][(2+\sqrt{3})^2 - t^2]}}$$

über, das t als elliptische Function von u mit dem Modul $k = (2-\sqrt{3})^2$ definiert. Es ergiebt sich nämlich:

$$t = (2-\sqrt{3})\,\mathrm{sn}\left[(2+\sqrt{3})\,u + K\right].$$

Führen wir so in den Gleichungen (12) elliptische Functionen ein, so können wir verschiedene Fragen behandeln, die auf die Schwarz'sche Minimalfläche Bezug haben, insbesondere diejenigen, welche ihre analytische Fortsetzung betreffen. In Betreff dieser Untersuchungen verweisen wir auf die Abhandlung von Schwarz, der wir die vorstehenden Entwickelungen entnommen haben*), und wollen uns hier nur auf den Nachweis beschränken, dass die Symmetriesätze über Minimalflächen in Verbindung mit elementaren Betrachtungen über Bewegungsgruppen die analytische Fortsetzung der Schwarz'schen Fläche zu verfolgen gestatten und insbesondere auf die dreifache Periodicität derselben in den Richtungen der drei Coordinatenaxen führen.

Die analytische Fortsetzung von Σ ergiebt sich, wenn Σ nach einander an jeder ihrer Seiten gespiegelt und wenn mit den angrenzenden Stücken in derselben Weise verfahren wird.

Indem wir uns nun die Aufgabe stellen, diejenige Gruppe G von Raumbewegungen, welche die Schwarz'sche Fläche in ihrer Gesamtheit ungeändert lässt, auf ihre Beschaffenheit zu untersuchen, bemerken wir, dass bei jeder solchen Bewegung das Fundamentalstück Σ in ein congruentes Σ' übergeht, zu dem wir auch durch successive Spiegelungen an den Seiten der Σ congruenten, nacheinander an Σ anstossenden Stücke gelangen können. Daher ergiebt sich die allgemeinste Bewegung der Gruppe G, welche Σ in Σ' überführt, wenn die durch die

*) Bestimmung einer speciellen Minimalfläche. Werke, 1. Band, S. 6 u. f.

angeführten Spiegelungen erhaltene Bewegung mit einer solchen, die Σ in sich transformiert, combiniert wird. Der letzteren Bewegungen giebt es (ausser der Identität) offenbar nur drei, nämlich die Spiegelungen an den drei Verbindungslinien der Mitten der Gegenkanten des regelmässigen Tetraeders, von dem wir ausgegangen sind.

Wir erinnern nun daran, dass sich zwei Bewegungen des Raumes, A und B, zu einer dritten Bewegung zusammensetzen lassen, die wir mit

$$BA$$

bezeichnen, wobei wir die zuerst ausgeführte rechts setzen. Bezeichnen wir mit A^{-1} die zu A inverse Bewegung, so wird die Bewegung:

$$B' = ABA^{-1}$$

als die mittels A transformierte Bewegung B bezeichnet. Nach einem Satze von Jordan*) ist sie nichts anderes, als die Bewegung B um diejenige Axe, in welche die Mittelaxe von B bei der Bewegung A übergeht.

Die Gruppe G wird demnach dadurch erzeugt, dass die Elementarspiegelungen an den Seiten des Begrenzungsvierecks von Σ mit den drei vorhin angeführten Spiegelungen combiniert werden. Eine wesentliche Eigenschaft dieser Gruppe, die wir nun nachweisen wollen, ist, dass sie unstetig ist, d. h. keine unendlich kleinen Bewegungen enthält**). Sie enthält als ausgezeichnete Untergruppe vom Index 24 eine Translationsgruppe, welche durch drei Elementartranslationen von gleichem Betrage nach drei auf einander senkrechten Richtungen erzeugt wird.

---

*) Jordan, Sur les groupes de mouvements (Annali di matematica, Ser. 2, Bd. 2, S. 167.)

Wir geben hier einen kurzen Beweis dieses für unsere Zwecke wichtigen Satzes. — Es sei r die Mittelaxe von A, r' diejenige von B, und r'' die Lage, die r' nach Ausführung von A einnimmt. Ist P ein beliebiger Punkt des Raumes, P' die neue Lage von P nach Ausführung von A, und Q derjenige Punkt, in den P durch die Bewegung B übergeführt wird, so untersuchen wir die Wirkung von ABA^{-1} auf den Punkt P', der offenbar ein beliebiger Raumpunkt ist. Durch die Bewegung BA^{-1} geht P' in Q über. Wenn wir die beiden Punkte P und Q und die Axe r' betrachten, so sehen wir, dass P vermöge A in P', r' in r'' und Q in einen Punkt Q' übergeht, der zu P' und r'' ebenso liegt wie Q zu P und r'. Nun gelangen wir von P zu Q durch die Schraubung B um die Mittelaxe r', und es führt demnach dieselbe Bewegung um r'' auch P' in Q' über.

**) Die unstetigen Bewegungsgruppen sind von Schönflies behandelt worden (Mathematische Annalen, Band 28, 29).

§ 221. Ausgezeichnete Untergruppe von Translationen.

Wir denken uns nun das Fundamentalviereck $abcd$ ebenso orientiert, wie es sich § 217 und 218 ergab, so dass wir, wenn

$$k = 2A = -2B$$

gesetzt wird, für die Coordinaten der Ecken die Werte:

$$a \equiv (k, k, 0), \quad b \equiv (k, 0, -k), \quad c \equiv (0, 0, 0), \quad d \equiv (0, k, -k)$$

erhalten. Wir bezeichnen dann die Seiten $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{da}$ der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, mit S_1, S_2, S_3, S_4 diejenigen Bewegungen des Raumes, welche Spiegelungen an den Seiten 1, 2, 3, 4 sind, ferner bezüglich mit S_5, S_6 die Spiegelungen an den Verbindungslinien der Mitten der Gegenseiten $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ und $\overline{ad}$, $\overline{bc}$, endlich mit S_7 diejenige Spiegelung, die sich aus der Combination von S_5 und S_6 ergiebt und an der Verbindungslinie der Mittelpunkte der beiden weggedachten Tetraederkanten $\overline{ac}$ und $\overline{bd}$ erfolgt.

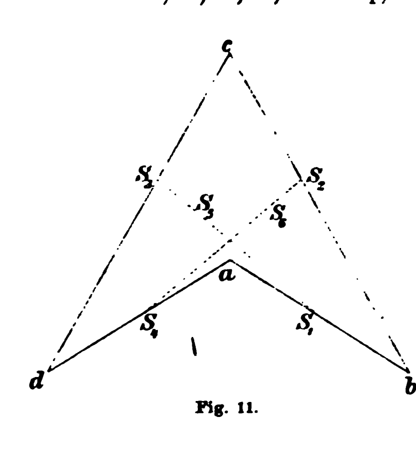


Fig. 11.

Die Elementarsubstitutionen der Gruppe G sind nun eben:

$$S_1, \; S_2, \; S_3, \; S_4, \; S_5, \; S_6, \; S_7,$$

und als analytische Ausdrücke derselben finden wir:

$$\begin{array}{llll}
S_1) & x' = 2k - x, & y' = k + z, & z' = -k + y, \\
S_2) & x' = -z, & y' = -y, & z' = -x, \\
S_3) & x' = -x, & y' = -z, & z' = -y, \\
S_4) & x' = k + z, & y' = 2k - y, & z' = -k + x, \\
S_5) & x' = x, & y' = k - y, & z' = -k - z, \\
S_6) & x' = k - x, & y' = y, & z' = -k - z, \\
S_7) & x' = k - x, & y' = k - y, & z' = z,
\end{array}$$

wo jedesmal x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Raumpunktes P und x', y', z' die Coordinaten desjenigen Punktes P' bedeuten, in den P bei der betreffenden Bewegung übergeht.

Nun betrachten wir die beiden folgenden Bewegungen der Gruppe G:

$$T = S_5 S_1 S_3, \quad T' = S_6 S_4 S_2.$$

Als ihre analytischen Ausdrücke finden wir:

$$T = S_5 S_1 S_3)\ x' = x + 2k, \quad y' = y, \quad z' = z,$$
$$T' = S_6 S_4 S_2)\ x' = x, \quad y' = y + 2k, \quad z' = z,$$

woraus erhellt, dass T, T' zwei Translationen vom Betrage $2k$ parallel der x- bezw. y-Axe sind. Wir bilden ferner die Substitution (mit der Periode 3):

$$U = S_2 S_1)\ x' = k - y, \quad y' = -k - z, \quad z' = x - 2k,$$

sowie die inverse Substitution:

$$U' = S_1 S_2)\ x' = 2k + z, \quad y' = k - x, \quad z' = -k - y,$$

und transformieren T mittels U, d. h. wir betrachten die Bewegung:

$$T'' = UTU^{-1}.$$

Wie wir sehen, hat T'' den Ausdruck:

$$T'')\ x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + 2k,$$

d. h. T'' ist eine Translation von demselben Betrage $2k$ parallel der z-Axe. Die drei Translationen T, T', T'' erzeugen die Translationsgruppe, die wir mit Γ bezeichnen wollen und deren Operationen die allgemeine Form:

$$x' = x + 2mk, \quad y' = y + 2nk, \quad z' = z + 2pk$$

haben, wo m, n, p beliebige positive oder negative ganze Zahlen sind.

Die Gruppe Γ ist offenbar eine Untergruppe von G und zwar eine ausgezeichnete, d. h. sie ist mit allen Operationen von G vertauschbar, wie sofort daraus hervorgeht, dass jede der Elementaroperationen S_1, $S_2 \ldots S_7$ von G eine Translation von Γ in eine andere Translation von Γ überführt.

§ 222. Nachweis der Unstetigkeit der Bewegungsgruppe der Schwarz'schen Fläche.

Wir wollen nun beweisen, dass der Index von Γ bezüglich G endlich und zwar gleich 24 ist, nachdem wir die Unstetigkeit von Γ erkannt haben werden.

Zu diesem Zwecke führen wir der Kürze der Ausdrucksweise halber einige Bezeichnungen ein: wir sagen, dass zwei Operationen A und B von G bezüglich Γ äquivalent sind, wenn, sobald unter t eine in Γ enthaltene Translation verstanden wird,

$$A = tB,$$

demnach

$$B = t^{-1}A$$

ist, und bringen diese Äquivalenz in der Schreibweise:

$$A \equiv B$$

zum Ausdruck. Nun bemerken wir, dass sich, wenn zwischen vier Bewegungen von G die Äquivalenzbeziehungen:

$$A \equiv B, \quad A' \equiv B'$$

bestehen, infolge der Vertauschbarkeit von Γ mit jeder Operation von G

$$AA' \equiv BB'$$

ergiebt. Indem wir nun wie vorhin

$$U = S_2 S_1, \quad U^{-1} = S_1 S_2$$

setzen, betrachten wir die folgenden zwölf Operationen von G:

$$\alpha) \qquad \begin{cases} 1\ , & S_5\ , & S_6\ , & S_7\ , \\ U\ , & US_5\ , & US_6\ , & US_7\ , \\ U^{-1}, & U^{-1}S_5, & U^{-1}S_6, & U^{-1}S_7, \end{cases}$$

von denen zwei beliebige bezüglich Γ nicht äquivalent sind, wovon wir uns überzeugen, wenn wir ihre wirklichen analytischen Ausdrücke bilden. Es sind dies die folgenden:

$$\begin{cases} 1)\ x' = x\ , & y' = y\ , & z' = z\ ; \\ S_5)\ x' = x\ , & y' = k - y, & z' = -k - z; \\ S_6)\ x' = k - x, & y' = y\ , & z' = -k - z; \\ S_7)\ x' = k - x, & y' = k - y, & z' = z\ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} U)\ x' = k - y, & y' = -k - z, & z' = -2k + x; \\ US_5)\ x' = y\ , & y' = z\ , & z' = -2k + x; \\ US_6)\ x' = k - y, & y' = z\ , & z' = -k - x\ ; \\ US_7)\ x' = y\ , & y' = -k - z, & z' = -k - x\ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} U^{-1})\ x' = 2k + z, & y' = k - x, & z' = -\ k - y; \\ U^{-1}S_5)\ x' = \ k - z, & y' = k - x, & z' = -2k + y; \\ U^{-1}S_6)\ x' = \ k - z, & y' = x\ , & z' = -\ k - y; \\ U^{-1}S_7)\ x' = 2k + z, & y' = x\ , & z' = -2k + y. \end{cases}$$

Setzen wir dagegen zwei beliebige von den zwölf obigen Operationen zusammen, so ist ihr Product einer der zwölf Operationen selbst äquivalent, wie sich einfach aus den Elementaräquivalenzen:

$$S_5 U \equiv US_6\ , \qquad S_6 U \equiv US_7\ , \qquad S_7 U \equiv US_5,$$
$$S_5 U^{-1} \equiv U^{-1}S_7, \quad S_6 U^{-1} \equiv U^{-1}S_5, \quad S_7 U^{-1} \equiv U^{-1}S_6$$

ergiebt. Nun giebt es zu der Operation S_2 von G in der obigen Zusammenstellung keine äquivalente. Bilden wir also die folgenden zwölf Operationen von G:

$$\beta)\qquad \begin{cases} S_2\ , & S_2 S_5\ , & S_2 S_6\ , & S_2 S_7\ ; \\ S_2 U\ , & S_2 U S_5\ , & S_2 U S_6\ , & S_2 U S_7\ ; \\ S_2 U^{-1}, & S_2 U^{-1} S_5, & S_2 U^{-1} S_6, & S_2 U^{-1} S_7, \end{cases}$$

so sind dieselben weder unter einander noch mit den Operationen 12 α) äquivalent, während das Product einer Operation α) mit einer Operation β) einer Operation β) und das Product von zwei Operationen β) einer Operation α) äquivalent ist, wie aus den Elementaräquivalenzen:

$$S_5 S_2 \equiv S_2 S_7, \quad S_6 S_2 \equiv S_2 S_6, \quad U S_2 \equiv S_2 U^{-1}$$

hervorgeht. Jede Operation von G ist einer (und nur einer) der 24 Operationen α), β) äquivalent. Um dieses einzusehen, brauchen wir es nur für die Elementarsubstitutionen von G nachzuweisen. Nun ist:

$$S_1 = S_2 U, \quad S_3 \equiv S_2 U S_5, \quad S_4 \equiv S_2 S_6,$$

wonach die angeführte Eigenschaft bewiesen ist.

Jede Substitution von G ergiebt sich demnach, wenn eine der 24 Substitutionen α), β) genommen wird und auf den rechten Seiten ihres analytischen Ausdrucks beliebige ganze Vielfache von $2k$ addiert werden. Demnach ist also der vorhin ausgesprochene Satz bewiesen:

Die Bewegungsgruppe G ist unstetig und enthält als ausgezeichnete Untergruppe vom Index 24 die Translationsgruppe Γ.

§ 223. Analytische Fortsetzung der Schwarz'schen Minimalfläche.

Nachdem wir auf diese Weise die Beschaffenheit der Gruppe G, der Gruppe derjenigen Bewegungen, welche die Schwarz'sche Fläche ungeändert lassen, erkannt haben, können wir uns leicht eine Vorstellung von der Art und Weise machen, in der sich das ursprüngliche Stück Σ analytisch fortsetzt und so die ganze Schwarz'sche Fläche erzeugt. Die Fläche gestattet, wie wir gesehen haben, drei Elementartranslationen in sich in der Richtung der drei Linien, welche die Mittelpunkte je zweier Gegenkanten des regelmässigen Tetraeders, von dem wir ausgegangen sind, verbinden, und zwar ist ihr Betrag gleich dem Doppelten dieses kleinsten Abstandes k zwischen zwei Gegenkanten. Denken wir uns den Raum in unendlich viele, an einander stossende würfelförmige Zellen mit der Kante $2k$ geteilt, so brauchen wir von der Schwarz'schen Fläche offenbar nur denjenigen Teil zu kennen, welcher innerhalb eines dieser Würfel liegt, da sich in jedem anderen Würfel ein infolge Translation dem erstbetrachteten Teile congruenter Teil befindet.

Als Ausgangswürfel betrachten wir den zwischen den sechs Ebenen:

$$x = \pm k, \quad y = \pm k, \quad z = \pm k$$

gelegenen. Von den vier Ecken des regulären Tetraeders $abcd$ (§ 221):

$$c \equiv (0, 0, 0), \quad a \equiv (k, k, 0), \quad b \equiv (k, 0, -k), \quad d \equiv (0, k, -k)$$

liegen drei, a, b, d, in den Mitten der in der Ecke $(k, k, -k)$ zusammenstossenden Würfelkanten, und die vierte, c, im Mittelpunkt des Würfels selbst. Die beiden Tetraederkanten $\overline{ca}$ und $\overline{bd}$ denken wir uns weggenommen und betrachten das von dem Viereck $abcd$ begrenzte Stück Σ der Schwarz'schen Fläche. Wir spiegeln nun Σ an der Seite $\overline{cd}$ in Σ_1, dann Σ_1 an der neuen Lage von $\overline{ca}$ in Σ_2, dann Σ_2 an der neuen Lage von $\overline{cd}$ u. s. f. Auf diese Weise erhalten wir im Innern des Würfels sechs Stücke der Schwarz'schen Fläche (Σ mit einbegriffen), die alle einander congruent sind und in der gemeinsamen Ecke c, in der sie ein und dieselbe Tangentialebene haben, zusammenstossen, während ihre anderen Ecken sämtlich in den Mittelpunkten der Würfelkanten liegen*). Die wirklichen Werte für die Coordinaten der Ecken dieser sechs Stücke sind die folgenden:

$$\begin{array}{llllll}
\Sigma) & (0, 0, 0), & (\;\;k, \;\;0, -k), & (\;\;k, \;\;k, \;\;0), & (\;\;0, \;\;k, -k); \\
\Sigma_1) & (0, 0, 0), & (-k, \;\;k, \;\;0), & (-k, \;\;0, -k), & (\;\;0, \;\;k, -k); \\
\Sigma_2) & (0, 0, 0), & (-k, \;\;k, \;\;0), & (\;\;0, \;\;k, \;\;k), & (-k, \;\;0, \;\;k); \\
\Sigma_3) & (0, 0, 0), & (\;\;0, -k, \;\;k), & (-k, -k, \;\;0), & (-k, \;\;0, \;\;k); \\
\Sigma_4) & (0, 0, 0), & (0, -k, k), & (k, 0, k), & (k, -k, 0); \\
\Sigma_5) & (0, 0, 0), & (k, 0, -k), & (0, -k, -k), & (k, -k, 0).
\end{array}$$

Nehmen wir nun ein beliebiges der sechs krummen Vierecke Σ_i, so ist seine analytische Fortsetzung längs einer von c ausgehenden Seite offenbar eins der Σ selbst; die analytische Fortsetzung von Σ_i längs einer von dem c gegenüberliegenden Eckpunkt ausgehenden Seite ergiebt sich dagegen durch eine Translation eines der übrigen sechs Stücke Σ_i vom Betrage $2k$. Um dieses nachzuweisen, brauchen wir nur das ursprüngliche Stück Σ zu betrachten, da für die anderen fünf das nämliche gilt. Die Spiegelung von Σ an $\overline{ab}$ liefert in der That das um $2k$ in der Richtung der x-Axe verschobene Stück Σ_1, und die Spiegelung von Σ an $\overline{ad}$ ebenso das um $2k$ parallel der y Axe verschobene Stück Σ_5.

*) Um von den im Texte angegebenen geometrischen Verhältnissen eine klare Vorstellung zu erhalten, mag sich der Leser zweckmässig eines festen Modells der Würfelkanten bedienen, in das mittels Fäden die sechs Vierecke, welche die betrachteten Stücke der Schwarz'schen Fläche begrenzen, eingeschrieben werden können.



Es besteht demnach das ganze innerhalb des Würfels gelegene Gebiet der Schwarz'schen Fläche aus sechs Stücken Σ_i; die Fläche reproduciert sich daher in den übrigen Würfeln periodisch, so dass sie den ganzen Raum gleichmässig durchsetzt.

§ 224. Die zur Schwarz'schen Fläche conjugierte Minimalfläche.

Hinsichtlich der conjugierten Fläche, die Schwarz ebenfalls untersucht, bemerken wir kurz, dass auch sie bemerkenswerte Eigenschaften besitzt, die denjenigen der in den voraufgehenden Paragraphen behandelten Fläche ganz analog sind*). Insbesondere werden wir sehen, dass auch diese neue Minimalfläche S' in unendlich viele congruente krumme Vierecke mit geradliniger Begrenzung zerfällt, und dass in jedem endlichen Gebiet des Raumes nur eine endliche Zahl solcher Vierecke liegt. Betrachten wir auf der ursprünglichen Fläche S zwei von den krummen Vierecken, die längs einer Kante AB zusammenstossen, so begrenzen die vier Symmetrieebenen der beiden Vierecke auf dem von ihnen gebildeten Sechseck ein neues Viereck, dessen Seiten gleich lange Bogen ebener geodätischer Linien sind und dessen Winkel in zwei Gegenecken je 60°, in den beiden anderen je 90° betragen. Nun geht auf der conjugierten Fläche S' dieses Viereck in ein solches mit geradliniger Begrenzung über. Daher liegen auf der Minimalfläche S' unendlich viele krumme Vierecke mit geradliniger Begrenzung, deren Seiten gleiche Länge haben und deren Winkel in zwei Gegenecken je 60° und in den beiden anderen je 90° betragen**).

Hiervon ausgehend können wir, ganz analog wie in den voraufgehenden Paragraphen, diejenige Bewegungsgruppe bestimmen, welche die Fläche S' reproduciert, und also die analytische Fortsetzung jedes krummen Vierecks von S' untersuchen.

Es sei $ABCD$ ein solches Viereck, dessen Winkel bei A und C je 60°, bei B und D je 90° betragen; wir wollen dann die Seiten AB, BC, CD, DA mit 1, 2, 3, 4 und die Spiegelungen an diesen Seiten bezüglich mit S_1, S_2, S_3, S_4 bezeichnen.

Durch Combination dieser Elementarbewegungen können wir von

---

*) Ihre Gleichungen ergeben sich aus den Formeln (8), S. 397, wenn von den Integralen rechts statt der reellen Teile die Coefficienten der imaginären Teile genommen werden.

**) Um ein solches Viereck zu erhalten, braucht man nur zwei Seitenflächen eines regelmässigen Oktaeders, die längs einer Kante an einander stossen, zu combinieren und die gemeinschaftliche Kante wegzudenken.

diesem Viereck zu jedem anderen auf der Fläche gelangen. Wollen wir also die Elementaroperationen der Gruppe G, welche die Fläche ungeändert lässt, erhalten, so brauchen wir zu den vorhin genannten Bewegungen nur noch diejenigen hinzuzufügen, welche das Viereck $ABCD$ ungeändert lassen.

Nun ist die einzige derartige Bewegung die Spiegelung an der Verbindungslinie der Mittelpunkte von AC und BD, die wir mit S_5 bezeichnen wollen.

§ 225. Die Gruppe der conjugierten Fläche.

Bezeichnen wir mit $k\sqrt{2}$ die gemeinsame Länge der vier Kanten, so ist sofort klar, dass sich bei passender Orientierung des Vierecks $ABCD$ gegen die Coordinatenaxen für die Coordinaten der Eckpunkte die folgenden Ausdrücke ergeben:

$$A \equiv (0, 0, 0), \quad B \equiv (k, 0, k), \quad C \equiv (0, 0, 2k), \quad D \equiv (0, k, k).$$

Daraus folgt, dass die Elementaroperationen der Gruppe G analytisch durch nachstehende Gleichungen dargestellt werden:

$$\begin{array}{llll}
S_1) & x' = z, & y' = -y, & z' = x; \\
S_2) & x' = 2k - z, & y' = -y, & z' = 2k - x; \\
S_3) & x' = -x, & y' = 2k - z, & z' = 2k - y; \\
S_4) & x' = -x, & y' = z, & z' = y; \\
S_5) & x' = y, & y' = x, & z' = 2k - z.
\end{array}$$

Werden ferner die Beziehungen:

$$S_5 S_2 S_5 = S_4, \quad S_5 S_3 S_5 = S_1$$

berücksichtigt, so ergiebt sich, dass die gesamte Gruppe G durch die drei Elementarsubstitutionen S_1, S_2, S_5 erzeugt wird.

Nun betrachten wir die beiden in G enthaltenen Substitutionen:

$$H = S_1 S_5, \quad K = S_2 S_5.$$

Ihre analytischen Ausdrücke sind:

$$\begin{array}{llll}
H) & x' = 2k - z, & y' = -x, & z' = y; \\
K) & x' = z, & y' = -x, & z' = 2k - y,
\end{array}$$

und ihre dritten Potenzen die Translationen:

$$\begin{array}{llll}
H^3) & x' = 2k + x, & y' = -2k + y, & z' = -2k + z; \\
K^3) & x' = 2k + x, & y' = -2k + y, & z' = 2k + z.
\end{array}$$



Die mittels S_2 transformierte Substitution H^3 ist die neue Translation:

$$S_2 H^3 S_2^{-1}) \quad x' = 2k + x, \quad y' = 2k + y, \quad z' = -2k + z.$$

Aus der Combination dieser mit den vorhergehenden folgt, dass in G die beiden Translationen:

$$\begin{aligned} x' &= x + 4k, & y' &= y, & z' &= z, \\ x' &= x, & y' &= y + 4k, & z' &= z \end{aligned}$$

enthalten sind. Da ferner die mittels S_1 transformierte Substitution K^3 diese:

$$S_1 K^3 S_1^{-1}) \quad x' = 2k + x, \quad y' = 2k + y, \quad z' = 2k + z$$

ist, so geht daraus hervor, dass auch die Translation:

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z + 4k$$

zu G gehört.

Die Gruppe G enthält demnach alle Translationen von der Form:

$$x' = x + 2mk, \quad y' = y + 2nk, \quad z' = z + 2pk,$$

wo m, n, p ganze Zahlen sind, die entweder sämtlich gerade oder sämtlich ungerade, d. h. der Bedingung

$$m \equiv n \equiv p \pmod 2$$

unterworfen sind. Die Translationen von der obigen Form bilden offenbar eine Untergruppe Γ von G, und wie wir sofort sehen werden, sind keine weiteren Translationen in G enthalten*). Zunächst können wir leicht nachweisen, dass Γ eine ausgezeichnete Untergruppe von G ist, da die Elementaroperationen von G, nämlich S_1, S_2, S_5, die Gruppe Γ in sich überführen. Wie in § 222 teilen wir dann die Operationen von Γ in Klassen von bezüglich Γ äquivalenten Operationen ein. Setzen wir:

$$S_6 = S_1 S_2,$$

so bilden die drei Substitutionen S_1, S_2, S_6 mit der identischen eine Gruppe (Vierergruppe). Setzen wir ferner:

$$U = S_1 S_4, \quad U^{-1} = S_4 S_1$$

und bilden wir die 24 Operationen:

---

*) Als Elementartranslationen von Γ können offenbar die folgenden drei gewählt werden:

$$\begin{cases} x' = x + 4k, & y' = y, & z' = z; \\ x' = x, & y' = y + 4k, & z' = z; \\ x' = x + 2k, & y' = y + 2k, & z' = z + 2k. \end{cases}$$

$$\begin{array}{llll} 1\;, & S_1\;, & S_2\;, & S_6\;, \\ U\;, & US_1\;, & US_2\;, & US_6\;, \\ U^{-1}, & U^{-1}S_1, & U^{-1}S_2, & U^{-1}S_6, \\ S_5\;, & S_5S_1\;, & S_5S_2\;, & S_5S_6\;, \\ S_5U\;, & S_5US_1\;, & S_5US_2\;, & S_5US_6\;, \\ S_2U\;, & S_2US_1\;, & S_2US_2\;, & S_2US_6\;, \end{array}$$

so sehen wir, dass dieselben ein vollständiges System von bezüglich Γ nicht äquivalenten Operationen bilden. Daraus folgt:

Die Gruppe G enthält als ausgezeichnete Untergruppe vom Index 24 die Translationsgruppe Γ.

Insbesondere ergiebt sich hieraus die Unstetigkeit der Gruppe G, also die Eigenschaft der Minimalfläche S', in dreifach periodischer Weise den Raum gleichmässig zu durchsetzen.

§ 226. Die zweite Variation des Flächeninhalts einer Minimalfläche.

Am Schlusse dieser Betrachtungen über die Minimalflächen kehren wir zurück zu der Minimumaufgabe, von der wir ausgegangen sind, um die wichtigen Untersuchungen von Schwarz über die zweite Variation des Flächeninhalts eines Minimalflächenstücks in ihren Grundzügen mitzuteilen*). Aus denselben folgt insbesondere, dass, wenn in jedem Punkte einer Fläche die Summe der Hauptkrümmungsradien gleich Null ist, jedes in geeigneter Weise umgrenzte Stück der Fläche bezüglich der fest gedachten Begrenzung die Minimumeigenschaft, die zu seiner Definition benutzt wurde, wirklich besitzt.

Es seien S eine auf ihre Krümmungslinien u, v bezogene Minimalfläche,

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2)$$

das Quadrat ihres Linienelements, also

$$ds'^2 = \frac{1}{\lambda}(du^2 + dv^2)$$

dasjenige des Linienelements der Bildkugel und

$$r_2 = \lambda, \quad r_1 = -\lambda$$

die Hauptkrümmungsradien der Minimalfläche.

Wir betrachten ein von einer Randlinie C begrenztes Stück von S und ein S unendlich benachbartes von derselben Randlinie begrenztes Flächenstück S'. Auf jeder Normale von S schneidet die Fläche S' ein unendlich kleines Stück ab, das wir mit $\varepsilon\psi$ bezeichnen wollen, wo

*) Werke, 1. Band, S. 151 u. f.

ε eine unendlich kleine Constante und ψ eine Function von u und v ist, die wir samt ihren ersten partiellen Differentialquotienten in dem ganzen betreffenden Gebiet von S als endlich und stetig voraussetzen und die nur längs des Randes C Null werden soll.

Wir vergleichen nun das von C eingeschlossene Flächenstück von S mit dem entsprechenden von S', wobei wir nur die Glieder berücksichtigen, die ε in der ersten und zweiten Potenz enthalten. Für die Coordinaten des Punktes P' von S', der einem Punkte P von S entspricht, haben wir offenbar die Ausdrücke:

$$x' = x + \varepsilon\psi X, \quad y' = y + \varepsilon\psi Y, \quad z' = z + \varepsilon\psi Z.$$

Berechnen wir die Coefficienten E', F', G' des Quadrats des Linienelements von S', so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{1}{\lambda}\frac{\partial x}{\partial v} \text{ u. s. w.}$$

die Werte:

$$E' = \lambda\left(1 + \frac{2\varepsilon\psi}{\lambda} + \frac{\varepsilon^2\psi^2}{\lambda^2}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2,$$

$$F' = \varepsilon^2\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v},$$

$$G' = \lambda\left(1 - \frac{2\varepsilon\psi}{\lambda} + \frac{\varepsilon^2\psi^2}{\lambda^2}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2.$$

Demnach ist:

$$\sqrt{E'G' - F'^2} = \lambda\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{2\lambda}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - \frac{2\psi^2}{\lambda}\right\}\right].$$

Die Differenz der beiden Flächenräume, $\delta S = S' - S$, ist daher bis auf unendlich kleine Grössen von höherer als der zweiten Ordnung durch

$$(13) \qquad \delta S = \frac{\varepsilon^2}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2 - \frac{2\psi^2}{\lambda}\right]du\,dv$$

gegeben, wo das Doppelintegral über das in Rede stehende Gebiet von S oder, was dasselbe ist, über das entsprechende Gebiet auf der Kugel zu erstrecken ist. Dieses ist der von Schwarz für die zweite Variation des Flächeninhalts eines Minimalflächenstücks abgeleitete Ausdruck, aus dem sich mittels einiger Hilfsbetrachtungen die bemerkenswerten Folgerungen ergeben, zu deren Ableitung wir nun übergehen.

§ 227. Untersuchung der zweiten Variation.

Wir betrachten eine beliebige andere Minimalfläche, die der Fläche S durch Parallelismus der Normalen zugeordnet werden möge, und es sei Σ dasjenige Stück dieser neuen Fläche, welches dem betreffenden Stück von S entspricht. Dann sind die beiden Flächenstücke auf ein

und dasselbe Stück der Kugelfläche, das wir mit σ bezeichnen wollen, abgebildet. Bedeutet W den Abstand der Tangentialebene des Stückes Σ vom Coordinatenanfangpunkt, so ist W ein Integral der Gleichung (S. 141, (36)):

(14) $$\Delta_2' W + 2W = 0,$$

wenn $\Delta_2' W$ der für das Linienelement der Kugel berechnete zweite Differentialparameter von W ist.

Nun setzen wir voraus, dass dieses Integral der Gleichung (14) oder auch der Gleichung:

(14*) $$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \frac{2W}{\lambda} = 0$$

in keinem Punkte des Kugelstückes σ, auch nicht auf dem Rande, verschwinde, was damit gleichbedeutend ist, dass in keinem Punkte des Stückes Σ die Tangentialebene durch den Anfangspunkt geht. Dann können wir den Ausdruck unter dem Integralzeichen in der Gleichung (13) in die Form:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 - \frac{2\psi^2}{\lambda} = \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\psi^2}{W}\frac{\partial W}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\psi^2}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right)$$

bringen, so dass das Integral (13) in drei Teile zerfällt, von denen die letzten beiden identisch gleich Null sind, wie sich ergiebt, wenn man partiell integriert und berücksichtigt, dass ψ auf dem Rande verschwindet. Es bleibt also

$$\delta S = \frac{\varepsilon^2}{2}\iint\left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\psi}{W}\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2\right] du\, dv$$

übrig, und da, wie die Function ψ auch gewählt werden mag, das rechts stehende Integral wesentlich positiv ausfällt*), so folgt daraus, dass jede S unendlich benachbarte und von derselben Randlinie begrenzte Fläche S' in der That einen grösseren Flächeninhalt besitzt, als S. Dieses Ergebnis können wir in der folgenden von **Schwarz** gegebenen Fassung aussprechen:

Ein Stück einer Fläche mit der mittleren Krümmung Null besitzt unter allen ihm unendlich benachbarten und von derselben Randlinie begrenzten Flächenstücken sicherlich dann den kleinsten Inhalt, wenn es ein demselben durch Parallelismus der Normalen entsprechendes Flächenstück M der-

*) Das Integral könnte nämlich nur für $\psi = cW$ (c = Const.) verschwinden; dann würde aber ψ auf dem Rande nicht Null werden.



selben Art und von der Beschaffenheit giebt, dass in keinem Punkte von M die Tangentialebene durch einen im Raume fest gegebenen Punkt geht.

§ 228. **Satz von Schwarz über die zweite Variation.**

Wählen wir speciell als neue Minimalfläche die Fläche selbst, so sehen wir, dass das betreffende Stück von S die Minimumeigenschaft wirklich dann besitzt, wenn es, von einem passend gewählten Punkte des Raumes aus gesehen, als scheinbaren Rand eine Linie hat, die ganz ausserhalb des betrachteten Gebietes liegt.

Hinsichtlich des sphärischen Bildes σ dagegen können wir sagen, dass die Minimumeigenschaft sicher dann vorliegt, wenn es ein Integral W der Gleichung (14*) giebt, das in dem ganzen Gebiet σ, einschliesslich des Randes, positiv ist. Beachten wir nun, dass z. B.

$$X,\ Y,\ Z$$

particuläre Integrale der Gleichung (14*) sind, so sehen wir speciell, dass, wenn das Gebiet σ ganz innerhalb der Fläche einer Halbkugel liegt, die obige Bedingung erfüllt ist. Folglich besitzt jedes Stück einer Fläche mit der mittleren Krümmung Null, dessen sphärisches Bild innerhalb einer Halbkugelfläche liegt, die Eigenschaft, dass sein Inhalt ein Minimum ist.

Schliesslich bemerken wir, dass wir das allgemeine Integral der Gleichung (14*) angeben können, indem wir die complexe Veränderliche

$$\tau = \alpha + i\beta$$

auf der Kugel einführen (S. 359), wonach sie die Form:

$$(15) \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \beta^2} + \frac{8W}{(\alpha^2 + \beta^2 + 1)^2} = 0$$

annimmt. Da nun W die Entfernung der Tangentialebene einer Minimalfläche vom Anfangspunkt ist, so finden wir, wenn wir die Coordinaten des Berührungspunktes durch die Weierstrass'schen Gleichungen (11), S. 361, ausgedrückt denken und

$$W = Xx + Yy + Zz$$

berechnen, als allgemeines Integral der Gleichung (15) unter Weglassung des Zahlenfactors 2:

$$W = \Re\left[f'(\tau) - \frac{2\tau_0}{\tau\tau_0 + 1} f(\tau)\right],$$

wo $f(\tau)$ eine willkürliche Function der complexen Veränderlichen τ bedeutet.

Kapitel XVI.

Pseudosphärische Geometrie.

Conforme Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf die Halbebene. — Darstellung der Bewegungen (Verbiegungen) der Fläche in sich durch lineare Substitutionen der complexen Veränderlichen. — Andere conforme Abbildung. — Geodätische Parallelen und Parallelitätswinkel. — Pseudosphärische Trigonometrie. — Überblick über die nichteuklidische Geometrie. — Beltrami'sche Abbildung. — Flächen, die auf die Ebene geodätisch abbildbar sind. — Für eine gegebene pseudosphärische Fläche lässt sich die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linien auf Integration einer Riccati'schen Differentialgleichung zurückführen.

---

§ 229. Zweidimensionale Mannigfaltigkeit von constanter Krümmung.

Wir wollen uns nun mit den Flächen von constantem Krümmungsmass beschäftigen und beginnen unsere Untersuchungen mit der Ableitung der Grundlagen ihrer Geometrie in dem in § 92, S. 179, festgesetzten Sinne.

Die Geometrie der Flächen mit verschwindender oder positiver constanter Krümmung fällt mit der gewöhnlichen ebenen oder sphärischen Geometrie zusammen. Wir können und werden uns also in dem vorliegenden Kapitel auf die Behandlung der Geometrie auf den pseudosphärischen Flächen, oder, wie wir sagen, auf die der pseudosphärischen Geometrie beschränken.

Zu Grunde legen wir unsern Untersuchungen eine conforme Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf die Halbebene, die sich bei den wichtigen analytischen Untersuchungen von Klein und Poincaré über die automorphen (Fuchs'schen) Functionen als sehr fruchtbringend erwiesen hat.

Wir definieren das Linienelement der pseudosphärischen Fläche durch die Gleichung (S. 190):

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + e^{\frac{2u}{R}} dv^2,$$

worin R der Radius der pseudosphärischen Fläche ist. Bei diesen allgemeinen Untersuchungen müssen wir von jeder besonderen Flächenform, zu der das obige Linienelement wirklich gehört, absehen, insofern als wir diese Untersuchungen über die allgemeine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit constantem Krümmungsmass anstellen, für welche die Gleichung (1) das Elementargesetz für das Mass des Abstandes zweier unendlich naher Punkte angiebt (vgl. § 93, S. 181). Für alle reellen und endlichen Werte von u bleibt die Function: $\sqrt{G} = e^{\frac{u}{R}}$ endlich, stetig und positiv, weshalb wir jedem Paare reeller und endlicher Werte: $u = u_0$, $v = v_0$ einen reellen und im Endlichen gelegenen Punkt der Fläche zuordnen, und umgekehrt: unendliche Werte von u und v liefern unendlich ferne Flächenpunkte.

§ 230. **Conforme Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf die Halbebene.**

Betrachten wir x, y als rechtwinklige Cartesische Coordinaten eines Punktes der Bildebene, so geben uns die Gleichungen:

$$x = v, \quad y = Re^{-\frac{u}{R}} \tag{2}$$

die conforme Abbildung, von der vorhin die Rede war. Die reellen und im Endlichen gelegenen Flächenpunkte entsprechen eindeutig den Punkten der Halbebene $y > 0$, die wir die positive Halbebene nennen wollen; das Bild der unendlich fernen Flächenpunkte ist die x-Axe. Sie heisse die Grenzgerade*).

Zunächst sehen wir zu, was für Curven in der Bildebene den geodätischen Linien der Fläche entsprechen. Da der Ausdruck für das Linienelement durch die Gleichung (1) gegeben ist, so ergiebt sich als Gleichung der geodätischen Linien in endlicher Form (§ 89, S. 174, Gleichung (26)):

$$v = \pm k \int \frac{e^{-\frac{u}{R}} du}{\sqrt{e^{\frac{2u}{R}} - k^2}} + b = \pm \frac{R}{k} \sqrt{1 - k^2 e^{-\frac{2u}{R}}} + b,$$

worin k, b zwei willkürliche Constanten sind. Infolge der Gleichungen (2) hat die Bildcurve in der Ebene die Gleichung:

*) Wir müssen die Bildebene als die Gaussische complexe Ebene, mit einem einzigen unendlich fernen Punkt, der zugleich unendlich ferner Punkt der x-Axe ist, auffassen.

(3) $$(x-b)^2 + y^2 = \frac{R^2}{k^2}.$$

Also: Jede geodätische Linie der Fläche wird in einen die Grenzgerade senkrecht schneidenden Kreis abgebildet, und umgekehrt. Wir sehen dabei, dass auch die geodätischen Linien: $v = \text{Const.}$ keine Ausnahme bilden, da sie in Senkrechten zur x-Axe (Kreise mit unendlich fernem Mittelpunkt) abgebildet werden.

Da nun durch zwei Punkte der Halbebene stets ein und nur ein Kreis geht, der die Grenzgerade senkrecht schneidet, so haben wir das wichtige Ergebnis: Zwei beliebige Punkte M_1 und M_2 der pseudosphärischen Fläche können durch eine und nur eine geodätische Linie verbunden werden.

Wir untersuchen nun, wie sich die wahre geodätische Entfernung der beiden Punkte M_1 und M_2 in der Bildebene ausdrückt. Für den Bogen s der geodätischen Linien haben wir (nach S. 174, (27)):

$$s = \int \frac{e^{\frac{u}{R}} du}{\sqrt{e^{\frac{2u}{R}} - k^2}} = R \log\left(e^{\frac{u}{R}} + \sqrt{e^{\frac{2u}{R}} - k^2}\right),$$

also wegen (2):

$$s = R \log\left(\frac{R}{y} + \sqrt{\frac{R^2}{y^2} - k^2}\right) + C.$$

Rechnen wir den Bogen s von dem Punkte aus, dessen Bild der höchste Punkt: $y = \frac{R}{k}$ des Bildkreises ist, so müssen wir C gleich $-R \log k$ setzen. Es ist dann:

$$s = R \log\left(\frac{R}{ky} + \frac{1}{k}\sqrt{\frac{R^2}{y^2} - k^2}\right).$$

Der Ausdruck hinter dem Logarithmenzeichen ist, wie leicht ersichtlich, das Doppelverhältnis von vier Punkten, nämlich von den beiden Schnittpunkten des Bildkreises mit der Grenzgeraden, seinem höchsten Punkte und dem Bildpunkte des Endpunktes des Bogens.

Daraus folgt allgemein: Die geodätische Entfernung der beiden Punkte M_1, M_2 der Fläche ergiebt sich, wenn der Logarithmus des Doppelverhältnisses, das die beiden Bildpunkte m_1, m_2 auf dem Bildkreise der geodätischen Linie $M_1 M_2$ mit den beiden Schnittpunkten dieses Kreises und der Grenzgeraden bestimmen, mit R multipliciert wird.

Bezeichnen wir mit y_1, y_2 die Ordinaten von m_1, m_2, so lautet

der Ausdruck für die geodätische Entfernung δ der beiden Flächenpunkte M_1, M_2:

$$\delta = R \log \left(\frac{\frac{R}{y_1} + \sqrt{\frac{R^2}{y_1^2} - k^2}}{\frac{R}{y_2} \pm \sqrt{\frac{R^2}{y_2^2} - k^2}} \right),$$

wo im Nenner das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem die beiden Punkte m_1, m_2 des Bildkreises auf derselben oder auf verschiedenen Seiten des höchsten Punktes dieses Kreises liegen.

§ 231. Darstellung der Bewegungen der Fläche in sich durch lineare Substitutionen der complexen Veränderlichen.

Wir setzen nun:

$$\omega = x + iy = v + iRe^{-\frac{u}{R}}$$

und denken uns die Werte der complexen Veränderlichen ω auf der pseudosphärischen Fläche ausgebreitet, so dass jeder Wert von ω mit positiver Ordinate einen Flächenpunkt liefert, und umgekehrt. Dann können wir einen Flächenpunkt direct mit dem zugehörigen Wert der complexen Veränderlichen ω bezeichnen. Im siebenten Kapitel haben wir gesehen, dass jede pseudosphärische Fläche dreifach unendlich viele Arten von Abwickelungen auf sich selbst oder Bewegungen (Verbiegungen) in sich gestattet (S. 188), und nun stellen wir eine Frage, wie wir sie bereits für die Kugel gestellt hatten (Kap. III, § 45), nämlich die Frage, wie sich eine solche Bewegung der Fläche in sich, bei der die Punkte ω in die Punkte ω' übergehen mögen, analytisch darstellen wird. Die Antwort ist der früher für die Kugel gefundenen ganz analog, ja in gewissem Sinne sogar noch einfacher, wie wir sehen werden.

Da die von ω und ω' beschriebenen Figuren einander congruent sind, so ist ω' eine Function von ω. Denn der Fall, dass ω eine Function der conjugierten Grösse ω_0 ist, wird ausgeschlossen, wenn wir annehmen, dass die Verbiegung stetig erfolge und also Winkeltreue ohne Änderung des Sinnes stattfinde. Es ist also ω' eine Function von ω, die zwar zunächst nur für die Werte von ω in der positiven Halbebene definiert ist; da aber ω' für reelles ω auch reell ist, denn die unendlich fernen Punkte der Fläche bleiben bei der Bewegung unendlich fern, so ist ω' für alle Werte von ω in der negativen Halbebene durch die Bestimmung gegeben, dass ω' für den zu ω conjugierten Wert ω_0 den zu ω' conjugierten Wert ω_0' annehmen soll. Nun brauchen wir nur noch zu beachten, dass jedem Werte von ω ein

einziger von ω' entspricht und umgekehrt, um daraus schliessen zu können, dass ω' eine lineare Function von ω ist:

(5) $$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}.$$

Da ferner für reelles ω auch ω' reell ist, so sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell (abgesehen von einem gemeinsamen Factor, der weggelassen werden kann). Da weiterhin die Ordinate von ω' zugleich mit der Ordinate von ω positiv ist, so ist die Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ positiv und kann ohne weiteres gleich $+1$ angenommen werden.

Drücken wir nun das Quadrat des Linienelements (1) mittels der complexen Veränderlichen ω und der dazu conjugierten Veränderlichen ω_0 aus, so erhalten wir:

(5*) $$ds^2 = -\frac{4R^2}{(\omega - \omega_0)^2}\, d\omega\, d\omega_0.$$

Auf Grund dieser Gleichung lässt sich sofort nachweisen, dass die lineare Substitution (5) mit reellen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ das Linienelement in sich transformiert. Demnach haben wir das Ergebnis:

Die Bewegungen der pseudosphärischen Fläche in sich werden durch die auf die complexe Veränderliche ω angewandte lineare Substitution mit reellen Coefficienten:

(6) $$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

dargestellt.

§ 232. Bewegungen erster Art.

Für jede Substitution (6) giebt es zwei Werte von ω, die fest bleiben; es sind dieses die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

(7) $$\gamma\omega^2 + (\delta - \alpha)\omega - \beta = 0.$$

Nun können, je nach dem Vorzeichen der Discriminante

$$(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma = (\alpha + \delta)^2 - 4,$$

drei verschiedene Fälle eintreten.

1) $(\alpha + \delta)^2 < 4$. Die Wurzeln der Gleichung (7) sind conjugiert complex; die eine liegt in der positiven, die andere in der negativen Halbebene. Erstere stellt einen reellen und im Endlichen gelegenen Punkt P der Fläche dar, der bei der Bewegung fest bleibt. In diesem Falle besteht die Bewegung, die eine elliptische genannt wird, in einer (mit Verbiegung verbundenen) Rotation um P.

2) $(\alpha + \delta)^2 = 4$. Die Wurzeln der Gleichung (7) sind reell und fallen zusammen. Dann bleibt ein einziger Flächenpunkt im Unendlichen fest, und die Bewegung wird eine parabolische genannt.



3) $(\alpha + \delta)^2 > 4$. Die Wurzeln der Gleichung (7) sind reell und von einander verschieden. Sind A und B die zugehörigen Bildpunkte (auf der Grenzgeraden) in der Halbebene, so entspricht dem Kreise über der Strecke AB als Durchmesser auf der Fläche eine geodätische Linie, die sich während der Bewegung in sich verschiebt. In diesem Falle wird die Bewegung eine hyperbolische genannt; sie besteht in einem (mit Verbiegung verbundenen) Schleifen der Fläche auf sich, bei dem sich eine bestimmte geodätische Linie in sich verschiebt.

Ein ziemlich klares Bild von diesen drei Arten von Bewegungen erhalten wir, wenn wir die Rotation einer pseudosphärischen Rotationsfläche vom elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Typus um ihre Axe betrachten (§ 99, Kap. VI).

Es dürfte zweckmässig sein, die erhaltenen Ergebnisse unter Zugrundelegung der complexen Kugelfläche oder der complexen Ebene als typische Fläche mit denjenigen bezüglich der Bewegungen einer Fläche mit constantem positiven oder verschwindenden Krümmungsmass zu vergleichen.

In jedem Falle ist der analytische Ausdruck der Bewegung eine lineare Substitution der complexen Veränderlichen. Für die Kugel haben wir die Cayley'sche Formel (S. 84):

$$\tau' = \frac{\alpha\tau + \beta}{-\beta_0\tau + \alpha_0}, \quad \alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 = 1.$$

Bei der Bewegung bleiben zwei diametral einander gegenüberliegende Punkte der Kugel fest. Es giebt also nur eine Art von Bewegungen, die stets wirkliche Drehungen sind.

Für die complexe z-Ebene werden die Bewegungen durch die ganzen linearen Substitutionen:

$$z' = e^{i\alpha}z + C \quad (\alpha \text{ eine reelle, } C \text{ eine complexe Constante})$$

dargestellt. Sie zerfallen in zwei Arten, je nachdem $e^{i\alpha}$ von 1 verschieden ist oder nicht; erstere sind Drehungen um einen im Endlichen gelegenen Mittelpunkt, letztere Translationen.

§ 233. **Bewegungen zweiter Art.**

Wir betrachten nun diejenigen Bewegungen der pseudosphärischen Fläche in sich, bei welchen sich die beiden Seiten vertauschen. Wir wollen sie Bewegungen zweiter Art nennen, während wir die vorhin betrachteten als solche erster Art bezeichnen*). Um den analytischen Ausdruck für die Bewegungen zweiter Art zu finden,

*) Vgl. Klein-Fricke, Elliptische Modulfunctionen. Leipzig 1890, 1. Bd., S. 196 ff.

brauchen wir nur zu beachten, dass die Spiegelung der Fläche an der geodätischen Linie $v = 0$ durch die einfache Gleichung:

$$\omega' = -\omega_0$$

dargestellt wird. Da sich nun aus der Aufeinanderfolge zweier Bewegungen zweiter Art eine Bewegung erster Art ergiebt, so erhalten wir durch Combination der obigen Gleichung mit der Gleichung (6) sofort das Ergebnis: Die Bewegungen zweiter Art der pseudosphärischen Fläche werden durch die linearen Substitutionen mit reellen Coefficienten und der Determinante -1:

$$\omega' = \frac{\alpha\omega_0 - \beta}{\gamma\omega_0 - \delta} \tag{8}$$

dargestellt.

Eine Wiederholung der Bewegung (8) liefert die Bewegung erster Art:

$$\omega' = \frac{(\alpha^2 - \beta\gamma)\omega + \beta(\delta - \alpha)}{-\gamma(\delta - \alpha)\omega + (\delta^2 - \beta\gamma)}, \tag{8*}$$

die, wenn sie nicht bloss die Identität ist, notwendig hyperbolisch ist, da

$$(\alpha^2 + \delta^2 - 2\beta\gamma)^2 = [(\alpha - \delta)^2 + 2]^2 > 4$$

ist. Wollen wir prüfen, ob bei der Bewegung (8) Punkte fest bleiben, so haben wir zunächst zu beachten, dass ein solcher Punkt auch bei der Wiederholung der Bewegung fest bleibt und demnach der Wert von ω für diesen Punkt reell sein muss.

Da nun eben die beiden Wurzeln a der Gleichung:

$$\gamma a^2 - (\delta + \alpha)a + \beta = 0$$

reell und verschieden sind, so ist klar, dass bei der Bewegung (8) zwei reelle, getrennte und im Unendlichen gelegene Punkte der Fläche fest bleiben, die auch die festen Punkte im Falle der hyperbolischen Bewegung (8*) sind. Die geodätische Linie, die bei der Wiederholung der Bewegung (8*) fest bleibt, bleibt es auch bei der Bewegung (8); alle übrigen geodätischen Linien dagegen ändern ihre Lage.

Wir betrachten nun den besonders interessanten Fall, in dem die Wiederholung der Bewegung (8) die Identität liefert, was nur dann eintritt, wenn $\delta = \alpha$ ist. Dann bleiben infolge der Gleichung (8) in der ω-Ebene alle Punkte des Kreises:

$$\gamma(x^2 + y^2) - 2\alpha x + \beta = 0$$

oder:

$$\left(x - \frac{\alpha}{\gamma}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{\gamma^2}$$

fest. Dieser Kreis ist reell und schneidet die Grenzgerade rechtwinklig*). Also: Eine Bewegung zweiter Art mit der Periode 2 ist nichts anderes als eine Spiegelung der Fläche an einer reellen geodätischen Linie, deren Punkte sämtlich fest bleiben.

Hieraus folgt dann unmittelbar:

Jede andere Bewegung zweiter Art ergiebt sich als Aufeinanderfolge einer Spiegelung der Fläche an einer geodätischen Linie und einer Verschiebung der Fläche in sich längs dieser Linie (einer hyperbolischen Bewegung).

Wir überlassen es dem Leser, diese Ergebnisse mit denjenigen für Bewegungen der Kugel und der Ebene, bei denen sich die beiden Seiten vertauschen, zu vergleichen.

§ 234. Abänderung der conformen Abbildung.

Auf die in § 230 benutzte Abbildung der Punkte der pseudosphärischen Fläche wenden wir nun eine Transformation mittels reciproker Radienvectoren an, wobei wir den Pol der Transformation in die negative Halbebene verlegen. Die Grenzgerade geht dann in einen Grenzkreis über; die reellen und im Endlichen gelegenen Flächenpunkte werden auf das Innere des Grenzkreises abgebildet, die Punkte im Unendlichen auf die Peripherie, während den äusseren Punkten kein reeller Flächenpunkt entspricht. Die geodätischen Linien der Flächen werden als Kreise abgebildet, die den Grenzkreis orthogonal schneiden, und die wirkliche geodätische Entfernung zweier Punkte wird nach einem Gesetz gemessen, das dem in § 230, S. 420, angegebenen völlig analog ist.

Unter den zum Grenzkreise orthogonalen Kreisen befinden sich auch die Durchmesser des Grenzkreises; die ihnen entsprechenden geodätischen Linien gehen von einem reellen und im Endlichen gelegenen Punkte der Fläche aus. Auf Grund dessen können wir die Formeln für diese Abbildung ableiten, indem wir von dem elliptischen Ausdruck für das Quadrat des Linienelements der Fläche (vgl. S. 190):

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sinh^2 \frac{u}{R}\, dv^2$$

ausgehen und dasselbe mit dem Quadrat des Linienelements der Ebene in Polarcoordinaten:

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\vartheta^2$$

vergleichen. Nach Einführung der isometrischen Parameter ergiebt sich die Abbildungsformel:

*) Ist $\gamma = 0$, so tritt natürlich an Stelle des Kreises die Gerade: $x = \frac{\beta}{2\alpha}$, die auf der Grenzgeraden senkrecht steht.

$$\log \operatorname{tgh} \frac{u}{2R} + iv = m(\log \varrho + i\vartheta) + a + ib,$$

wo m, a, b reelle Constanten sind. Da aber auch in der Umgebung des Punktes $\varrho = 0$ Winkeltreue herrschen muss, so müssen wir m gleich Eins setzen.

Die Constante b kann gleich Null gesetzt und a durch Änderung der Grössenverhältnisse der Figur gleich Eins gemacht werden. Demnach lauten die Abbildungsformeln einfach:

$$(9) \qquad \varrho = \operatorname{tgh} \frac{u}{2R}, \quad \vartheta = v,$$

und es ist der Radius des Grenzkreises gleich Eins, da $\varrho = 1$ für $u = \infty$ ist.

§ 235. Abbildung der Curven von constanter geodätischer Krümmung.

Die eben betrachtete Abbildung sowie auch diejenige, von der wir ausgegangen sind, haben mit der stereographischen Polarprojection der Kugel die wichtige Eigenschaft gemein, die in dem nachstehenden Satze ausgedrückt ist: Jede Flächencurve von constanter geodätischer Krümmung hat zur Bildcurve in der Ebene einen Kreis, und umgekehrt.

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass auf jeder pseudosphärischen Fläche (wie auf jeder beliebigen Fläche mit constantem Krümmungsmass) die geodätischen Parallelen zu einer Curve L von constanter geodätischer Krümmung ebenfalls constante geodätische Krümmung besitzen und mit den Orthogonaltrajectorien ein Isothermensystem bilden. Wir wählen nämlich als Parameterlinien $v =$ Const. die L senkrecht schneidenden geodätischen Linien und als Parameterlinien $u =$ Const. ihre Orthogonaltrajectorien, von denen die Curve $u = 0$ die Curve L sein möge, und setzen ferner fest, dass der Parameter v der Bogen der Curve $u = 0$, gerechnet von einem festen Punkte der Curve an, und u der Bogen einer geodätischen Linie, gerechnet von $u = 0$ an, sein soll. Dann hat das Quadrat des Linienelements die Form (§ 96, S. 187):

$$ds^2 = du^2 + \left(\varphi(v) e^{\frac{u}{R}} + \psi(v) e^{-\frac{u}{R}}\right)^2 dv^2.$$

Da nun die geodätische Krümmung der Curve $u = 0$, nämlich nach S. 148

$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\varphi(v) - \psi(v)}{\varphi(v) + \psi(v)},$$

nach Voraussetzung constant ist, so folgt daraus für das Quadrat des Linienelements eine der drei typischen Formen A), B), C) des Paragraphen 98, S. 190, wodurch die Behauptung bewiesen ist.

Ist nach dieser Vorbemerkung L eine auf der Fläche gelegene Curve constanter geodätischer Krümmung, so haben die geodätischen Linien, die sie senkrecht schneiden, zum Bilde ein Kreissystem, das wegen seiner Zugehörigkeit zu einem doppelten Isothermensystem ein Büschel ist (§ 91, S. 177). Es ist demnach jede Orthogonaltrajectorie dieser Kreise, insbesondere das Bild der Curve L, ein Kreis des Orthogonalbüschels.

Umgekehrt, ist C' ein Kreis in der Ebene, so bestimmt er zusammen mit dem Grenzkreise (bezw. der Grenzgeraden) ein Kreisbüschel, dessen Orthogonalkreise Bilder von geodätischen Linien sind, die einem Isothermensystem angehören. Die Orthogonaltrajectorien dieser geodätischen Linien sind folglich Curven constanter geodätischer Krümmung.

§ 236. Die drei Arten von geodätischen Kreisen.

Die Curven constanter geodätischer Krümmung auf der pseudosphärischen Fläche vom Radius R zerfallen, entsprechend den drei vorhin erwähnten Ausdrücken B), A), C) für das Quadrat des Linienelements, in drei wohl zu unterscheidende Arten. Bei der ersten Art ist die geodätische Krümmung grösser als $\frac{1}{R}$, bei der zweiten gleich $\frac{1}{R}$, bei der dritten kleiner als $\frac{1}{R}$. Hinsichtlich ihrer ebenen Bilder unterscheiden sie sich wie folgt: Nehmen wir als Beispiel die Abbildung auf die Halbebene und sei

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

die Gleichung des Bildkreises der Curve L, beachten wir sodann, dass das Quadrat des Linienelements (5*) der Fläche die Form:

$$ds^2 = \frac{R^2}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

hat, und wenden wir die Bonnet'sche Formel (Kap. VI, S. 149) an, so erhalten wir für die geodätische Krümmung der Curve L den Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{1}{R} \cdot \frac{b}{r}.$$

Hierdurch werden unsere obigen Folgerungen bestätigt, und ferner wird bewiesen, dass die Curve L zur ersten, zur zweiten oder zur dritten Art gehört, je nachdem der Bildkreis ganz im Innern der positiven Halbebene liegt oder die reelle Axe berührt oder endlich die-

selbe schneidet*). Die Curven L der ersten Art sind wirkliche geodätische Kreise mit reellen und im Endlichen gelegenen Mittelpunkten. Der Bildpunkt des Mittelpunktes in der positiven Halbebene ist derjenige Punkt, durch welchen alle die Grenzgerade und den Bildkreis von L senkrecht schneidenden Kreise hindurchgehen. Im zweiten Falle liegt dieser Punkt auf der Grenzgeraden, und der zugehörige Flächenpunkt rückt ins Unendliche; es sind somit die Curven mit der constanten geodätischen Krümmung $\frac{1}{R}$ als geodätische Kreise, deren Mittelpunkte unendlich fern liegen, aufzufassen, und sie werden auch als Grenzkreise bezeichnet. Endlich wollen wir die Bezeichnung „geodätische Kreise" auch auf den dritten Fall ausdehnen; dann sind aber die Grenzpunkte des die Grenzgerade und den Bildkreis senkrecht schneidenden Kreisbüschels imaginär, und wir nennen deswegen die Curven L, deren constante geodätische Krümmung kleiner als $\frac{1}{R}$ ist, geodätische Kreise mit imaginären Mittelpunkten. Die Kreise der letzten Art können auch als die geodätischen Parallelen zu einer geodätischen Linie definiert werden.

Wir bemerken schliesslich, dass sich bei der zweiten Abbildung die drei Arten von Kreisen hinsichtlich der Bildcurven in der Weise unterscheiden, dass der Bildkreis entweder ganz im Innern des Grenzkreises liegt oder ihn von innen berührt oder ihn schneidet.

§ 237. Der Parallelitätswinkel.

Wir betrachten nun auf der pseudosphärischen Fläche eine geodätische Linie g und einen nicht auf g gelegenen Punkt o und sehen zu, wie sich das Büschel der von o ausgehenden geodätischen Linien hinsichtlich der Curve g verhält. Wir bedienen uns der zweiten conformen Abbildung, die wir in der Weise vornehmen, dass der Punkt o den Mittelpunkt O des Grenzkreises Γ zum Bildpunkt hat (siehe Fig. 12a). Die geodätische Linie g ist dann in einen Kreis G, der Γ senkrecht schneidet, und das Büschel der von o ausgehenden geodätischen Linien in das Strahlbüschel mit dem Scheitel O abgebildet. Es mögen A, B die Punkte sein, in denen G und Γ einander schneiden. Diejenigen Strahlen durch O, welche in dem Winkelraum AOB liegen, schneiden G in reellen Punkten, die

*) Im letzten Falle ist, wenn ψ den Winkel bedeutet, unter dem der Bildkreis die Grenzgerade schneidet, offenbar:

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\cos\psi}{R}.$$

übrigen nicht. Auf der Fläche entsprechen den Strahlen OA und OB zwei geodätische Linien oa und ob, die parallel zu g genannt werden, da ihre Schnittpunkte mit g im Unendlichen liegen (siehe Fig. 12b). Sie bilden die Scheidegrenze zwischen denjenigen geodätischen Linien des Büschels (o), welche g in reellen, und denjenigen, welche g in imaginären Punkten schneiden.

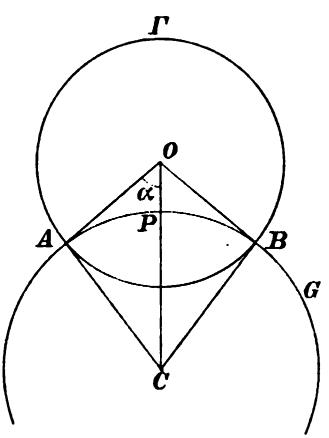


Fig. 12a.

Fällen wir vom Punkte o auf g das geodätische Lot op, so hat dasselbe den kleinsten Abstand des Punktes O vom Kreise G zum Bilde. Da die Winkel AOP und BOP einander gleich sind, so ist auch $\angle aop = \angle bop$.

Dieser Winkel $\alpha = \angle aop$ heisst der Parallelitätswinkel des Punktes O bezüglich der geodätischen Linie g; er hängt, wie wir sogleich sehen werden, nur von der geodätischen Entfernung $\delta = op$ des Punktes o

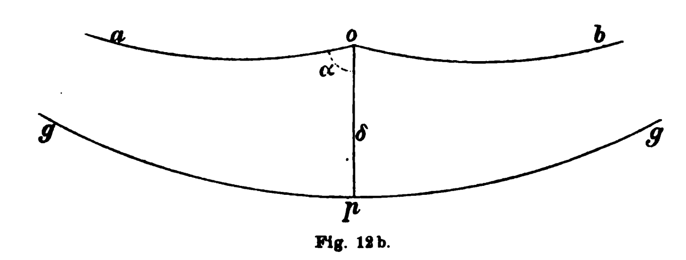


Fig. 12b.

von der geodätischen Linie g ab. Um die Beziehung zwischen α und δ zu finden, beachten wir, dass sich, wenn unter C der auf OP gelegene Mittelpunkt von G verstanden wird, aus dem rechtwinkligen Dreieck OCA die Gleichung:

$$CA^2 + OA^2 = (CP + OP)^2 = CA^2 + OP^2 + 2CA \,.\, OP,$$

demnach:

$$CA = \frac{OA^2 - OP^2}{2OP}$$

ergiebt.

Nun ist:

$$OA = 1, \quad CA = \operatorname{tg} \alpha,$$

und nach den Abbildungsgleichungen (9):

$$OP = \operatorname{tgh} \frac{\delta}{2R} \cdot$$

Daraus ergiebt sich die gesuchte Gleichung:

(10) $$\cot \alpha = \sinh \frac{\delta}{R},$$

die auch in der Form:

(10*) $$\cot \frac{\alpha}{2} = e^{\frac{\delta}{R}}$$

geschrieben werden kann.

Also: **Durch jeden Punkt o einer pseudosphärischen Fläche gehen zwei geodätische Linien, die einer festen geodätischen Linie g parallel sind. Der Parallelitätswinkel α und die geodätische Entfernung δ des Punktes o von g sind durch die Gleichung (10) oder (10*) mit einander verknüpft.**

Je kleiner δ ist, desto näher liegt α an $\frac{\pi}{2}$, d. h. die beiden geodätischen Parallelen haben das Bestreben, in eine einzige zusammenzufallen, wenn sich der Punkt o der Curve g nähert.

§ 238. Geodätische Dreiecke.

Wir betrachten nun ein geodätisches Dreieck oab auf der Fläche und führen die zweite conforme Abbildung in der Weise durch, dass der Bildpunkt der Ecke o in den Mittelpunkt O des Grenzkreises fällt (siehe Fig. 13).

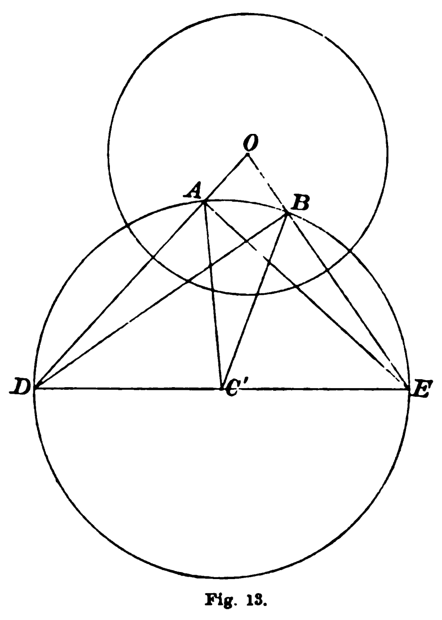


Fig. 13.

Das Bilddreieck OAB wird dann von zwei geraden Strecken OA und OB und von dem Bogen AB eines Kreises gebildet, der den Grenzkreis senkrecht schneidet. Bezeichnen wir mit D und E die anderen Schnittpunkte von OA bezw. OB mit dem Kreise AB, dessen Mittelpunkt C' sei, so haben wir:

$$OA \,.\, OD = 1, \quad OB \,.\, OE = 1,$$
$$\angle A = \angle AED, \quad \angle B = \angle BDE,$$

also:

$$\angle A + \angle B + \angle O = \pi - \angle AC'B.$$

In Übereinstimmung mit dem Gaussischen Satze (§ 90, S. 176) ergiebt sich, dass **die Summe der drei Winkel eines geodätischen Dreiecks kleiner ist als zwei Rechte.** Da der Fehlbetrag gleich dem durch R^2 geteilten

Flächeninhalt Δ (ebenda) und dieser Fehlbetrag in unserer Figur durch den Winkel $\alpha = AC'B$ gegeben ist, so ist:

$$\Delta = R^2\alpha\ {}^{*}).$$

Wir sehen ferner, dass jedem geodätischen Dreieck, gleichwie in der ebenen und sphärischen Geometrie, ein geodätischer Kreis umschrieben werden kann; aber in dem vorliegenden Falle kann dieser Kreis entweder ein wirklicher geodätischer Kreis, d. h. einer mit reellem Mittelpunkt, oder ein Grenzkreis oder endlich ein Kreis mit imaginärem Mittelpunkt sein. Um aus dem ebenen Bilde zu entscheiden, welcher der drei Fälle vorliegt, brauchen wir nur den Kreis AOB zu construieren und zuzusehen, ob er ganz im Innern des Grenzkreises liegt oder ihn berührt oder ihn schneidet.

§ 239. **Pseudosphärische Trigonometrie.**

Wie in der sphärischen Geometrie, so ist auch in der pseudosphärischen ein Dreieck durch drei seiner Stücke bestimmt, und es ist demnach hier der Ort, auf die Beziehungen, welche die drei Seiten und die drei Winkel mit einander verknüpfen (von einander unabhängige giebt es deren drei), d. h. auf die Formeln der pseudosphärischen Trigonometrie einzugehen. Wir bezeichnen ein geodätisches Dreieck mit ABC, die drei Winkel mit A, B, C, die gegenüberliegenden Seiten entsprechend mit a, b, c. Dann ist die ganze pseudosphärische Trigonometrie in der folgenden Bemerkung enthalten:

Die trigonometrischen Formeln für die pseudosphärischen Flächen vom Radius R ergeben sich aus denjenigen für die Kugel vom Radius R, wenn in diesen R durch $R\sqrt{-1}$ ersetzt wird.

---

*) Auf Grund dieser einfachen Gleichung wird der Leser leicht die folgenden Sätze beweisen können:

1. Wenn von einem auf einer pseudosphärischen Fläche gelegenen geodätischen Dreieck von constantem Inhalt die Grundlinie der Länge und Lage nach fest bleibt, so ist der Ort der Spitze ein geodätischer Kreis mit imaginärem Mittelpunkt.

2. Unter den geodätischen Dreiecken, von denen zwei Seiten der Länge nach gegeben sind, hat dasjenige den grössten Inhalt, in welchem der Winkel zwischen den beiden gegebenen Seiten gleich der Summe der beiden anderen Winkel ist.

Auf diesem letzten Satze, der der ebenen und der sphärischen Geometrie gemeinsam ist, kann bekanntlich die gesamte Theorie der isoperimetrischen Aufgaben aufgebaut werden.

Dadurch gehen die trigonometrischen Functionen der Seiten in hyperbolische Functionen über.

Zum Beweise des Satzes brauchen wir nur die Richtigkeit der drei Grundformeln nachzuweisen:

$$\frac{\sinh\frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sinh\frac{b}{R}}{\sin B} = \frac{\sinh\frac{c}{R}}{\sin C}, \tag{11}$$

$$\cos A = \sin B \sin C \cosh\frac{a}{R} - \cos B \cos C, \tag{12}$$

die in der angegebenen Weise aus drei Grundformeln der sphärischen Trigonometrie hervorgehen.

Wir bilden das Dreieck CAB so auf die Ebene ab, dass der Bildpunkt der Ecke C in den Mittelpunkt C des Grenzkreises fällt, und verlängern die geraden Seiten des Bilddreiecks, CA und CB, bis sie den Bildkreis der dritten Seite AB zum zweiten Male in A' bezw. B, schneiden (Fig. 14), sodass wir

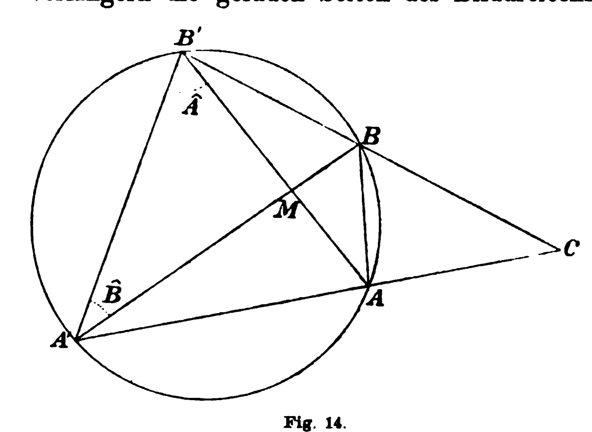


Fig. 14.

$$CA \,.\, CA' = 1,$$

$$CB \,.\, CB' = 1$$

haben.

Wenn sich die Diagonalen AB', $A'B$ des Vierecks $ABB'A'$ in M schneiden, so erhalten wir aus den ähnlichen Dreiecken $AA'M$ und $BB'M$:

$$AA' : BB' = MA' : MB' = \sin A : \sin B.$$

Nach den Abbildungsgleichungen ist nun:

$$CA = \operatorname{tgh}\frac{b}{2R}, \quad CB = \operatorname{tgh}\frac{a}{2R},$$

demnach:

$$AA' = \frac{1}{CA} - CA = \frac{2}{\sinh\frac{b}{R}},$$

$$BB' = \frac{1}{CB} - CB = \frac{2}{\sinh\frac{a}{R}},$$

folglich:

$$\frac{\sinh\frac{a}{R}}{\sin A} = \frac{\sinh\frac{b}{R}}{\sin B}.$$

Der gemeinsame Wert dieser Verhältnisse ist offenbar auch gleich $\frac{\sinh\frac{c}{R}}{\sin C}$. Somit sind die Formeln (11) richtig.

Um die Formel (12) zu beweisen, berücksichtigen wir die Gleichungen:

$$\frac{CB'}{CA} = \frac{\sin A'AB'}{\sin AB'C},$$
$$\frac{CB}{CA} = \frac{\sin A'B'B}{\sin B'A'A}.$$

Aus ihnen folgt:

$$\frac{CB'}{CB} = \coth^2\frac{a}{2R} = \frac{\sin A'AB' \sin B'A'A}{\sin AB'C \sin A'B'B}.$$

Da nun

$$A + B + C = \pi - 2AB'C, \quad -A + B + C = \pi - 2A'B'B,$$
$$A - B + C = \pi - 2B'A'A, \quad A + B - C = \pi - 2A'AB'$$

ist, so lässt sich die letzte Gleichung auch folgendermassen schreiben:

$$\coth^2\frac{a}{2R} = \frac{\cos\frac{A+B-C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{-A+B+C}{2}} = \frac{\cos A + \cos(B-C)}{\cos A + \cos(B+C)}$$

oder:

$$\cos A + \cos B \cos C = \sin B \sin C\left(\cosh^2\frac{a}{2R} + \sinh^2\frac{a}{2R}\right),$$

eine Gleichung, die mit der Formel (12) übereinstimmt.

Zu demselben Ergebnis können wir direct gelangen, wenn wir die Sätze von den geodätischen Linien der pseudosphärischen Rotationsflächen mit dem Quadrat des Linienelements:

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sinh^2\frac{u}{R}\, dv^2$$

anwenden. So ergeben sich z. B. die Formeln (11) unmittelbar aus dem Clairaut'schen Satz (§ 89, S. 174).

Anmerkung. — Bei der Anwendung der Formeln der pseudosphärischen Trigonometrie ist zu beachten, dass in der pseudosphärischen Geometrie ganz andere Umstände eintreten können als in der gewöhnlichen Kugelgeometrie, wie z. B., dass eine Ecke oder zwei Ecken oder endlich alle drei Ecken des Dreiecks ins Unendliche rücken können. Wenden wir z. B. bei einem in A rechtwinkligen Dreieck die Formel:

$$\operatorname{tgh}\frac{b}{R} = \sinh\frac{c}{R}\operatorname{tg} B$$

an und nehmen wir an, dass, während A und B fest bleiben, die Ecke C ins Unendliche rückt, so folgt:

$$\lim_{b=\infty} \operatorname{tgh} \frac{b}{R} = 1,$$

und die letzte Gleichung geht in die Gleichung (10) über, die den Parallelitätswinkel bestimmt.

§ 240. Überblick über die nicht-euklidische Geometrie.

In den Hauptsätzen der pseudosphärischen Geometrie, die wir in den voraufgehenden Paragraphen abgeleitet haben, ist eine nahe Analogie mit denjenigen der ebenen und der sphärischen Trigonometrie erkennbar. Den Grund dieser Analogieen sowie der Verschiedenheiten in den drei Geometrieen können wir a priori einsehen. Prüfen wir nämlich die Axiome und die Grundpostulate der ebenen Geometrie, wie sie im ersten Buche des Euklid niedergelegt sind, und ersetzen wir im Falle der pseudosphärischen Flächen die Gerade durch die geodätische Linie, so sehen wir, dass, wenn wir vom Postulat XII, betreffend die Parallelen, absehen, alle übrigen in der pseudosphärischen Geometrie unverändert gültig bleiben. So verhält es sich insbesondere mit dem Princip der Deckung der Figuren, sowie auch mit dem, dass eine geodätische Linie durch zwei ihrer Punkte eindeutig bestimmt ist. Diejenigen Sätze der ebenen Geometrie, welche vom Parallelenpostulat unabhängig sind, gelten also auch für die pseudosphärische Geometrie; die anderen erfahren eine Abänderung dahin, dass sie in die alten Sätze übergehen, wenn der Radius R der pseudosphärischen Fläche unendlich gross gemacht wird.

Die obigen Überlegungen beweisen bereits die Nutzlosigkeit der Versuche, die man angestellt hat, um das Parallelenpostulat zu beweisen. Könnte dasselbe aus den anderen Principien logisch gefolgert werden, so müsste es auch für die pseudosphärischen Flächen im euklidischen Raume gelten.

Lässt man nun thatsächlich in der ebenen Geometrie das euklidische Postulat fallen, so wird man auf eine sogenannte abstracte oder nicht-euklidische Geometrie geführt, deren Grundlagen von Bolyai und Lobatschewsky gelegt worden sind und welche (die Gerade als unbegrenzt angenommen) mit der pseudosphärischen Geometrie vollkommen zusammenfällt.

§ 241. Beltrami'sche Abbildung.

Derjenige, welcher zuerst nachwies, dass die Sätze der nicht-euklidischen Geometrie auf den pseudosphärischen Flächen eine reelle Deutung finden, war Beltrami in seiner berühmten Abhandlung: Saggio

d'interpretazione della geometria non-euclidea*). Zu Grunde liegt diesen Untersuchungen von Beltrami eine Abbildung der pseudosphärischen Flächen auf die Ebene, die zu den vorhin betrachteten in derselben Beziehung steht, wie die Centralprojection der Kugel zu der stereographischen Polarprojection.

Wir leiten die Beltrami'sche Abbildung aus derjenigen in § 234 in der folgenden von Klein angegebenen Weise ab: Wir denken uns eine Kugel, welche die Bildebene im Mittelpunkt des Grenzkreises berührt und deren Durchmesser gleich dem Radius des Grenzkreises ist. Projicieren wir die Ebene vom gegenüberliegenden Pol aus stereographisch auf die Kugel, so werden der Grenzkreis in den Aquator der Kugel, die Punkte im Innern des Grenzkreises auf die untere, die Punkte ausserhalb des Grenzkreises auf die obere Halbkugel projiciert, und die den Grenzkreis senkrecht schneidenden Kreise (die Bilder der geodätischen Linien der Fläche) gehen in Kreise über, deren Ebenen auf der Äquatorebene senkrecht stehen. Nun projiciren wir die Punkte der unteren Halbkugel orthogonal auf die Äquatorebene und erhalten so eine Abbildung der pseudosphärischen Fläche auf die Ebene, bei der das reelle Gebiet ganz auf das Innere des Äquators abgebildet ist und die geodätischen Linien die Sehnen dieses Grenzkreises zu Bildern haben. Dieses ist die Beltrami'sche Abbildung. Sie ist um den Mittelpunkt der Figur herum winkeltreu.

Die Formeln für die Beltrami'sche Abbildung ergeben sich unmittelbar aus der analytischen Fassung der angegebenen Klein'schen Construction. Es sei a der Radius der Kugel, also $2a$ der des Grenzkreises. Dann haben wir gemäss den Abbildungsformeln (9) in § 234, S. 426:

$$\varrho = 2a \operatorname{tgh} \frac{u}{2R}, \quad \vartheta = v.$$

Nun bezeichnen wir mit x, y die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten des vermöge der Beltrami'schen Abbildung entsprechenden Punktes in der Äquatorebene und mit ϱ_1, ϑ_1 die Polarcoordinaten. Dann haben wir:

$$\varrho_1 = \frac{4a^2\varrho}{\varrho^2 + 4a^2} = a \operatorname{tgh} \frac{u}{R}, \quad \vartheta_1 = \vartheta,$$

folglich:

$$x = a \operatorname{tgh} \frac{u}{R} \cos v, \quad y = a \operatorname{tgh} \frac{u}{R} \sin v. \tag{13}$$

Wählen wir als Parameterlinien auf der Fläche die (geodätischen) Linien $x =$ Const., $y =$ Const., so erhalten wir für das Quadrat des Linienelements der Fläche, nämlich für:

*) Giornale di Matematiche, 6. Bd., 1868.

$$ds^2 = du^2 + R^2 \sinh^2 \frac{u}{R}\, dv^2,$$

aus den Gleichungen (13) den Ausdruck:

$$(14) \qquad ds^2 = R^2 \frac{(a^2 - y^2)dx^2 + 2xy\,dx\,dy + (a^2 - x^2)dy^2}{(a^2 - x^2 - y^2)^2},$$

und dieses ist die Fundamentalgleichung von Beltrami. Nach dem früher Gesagten ist klar, dass in diesen Coordinaten x, y die Gleichung jeder geodätischen Linie linear ist, und umgekehrt.

§ 242. **Flächen, die auf die Ebene geodätisch abbildbar sind.**

Der Ausdruck (14) für das Quadrat des Linienelements der pseudosphärischen Flächen war von Beltrami bereits in einer früheren Abhandlung gefunden worden*), in der er die Aufgabe gestellt und gelöst hatte, diejenigen Flächen zu bestimmen, welche auf die Ebene geodätisch abbildbar sind, d. h. so, dass die geodätischen Linien der Fläche in Geraden der Ebene abgebildet werden. Er fand, dass die einzigen Flächen, die einer solchen Abbildung fähig sind, die Flächen mit constantem Krümmungsmass sind. Dieses wichtige Ergebnis wollen wir hier kurz ableiten.

Es sei in der Bildebene ein Cartesisches Coordinatensystem (u, v) gewählt und

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

das Quadrat des entsprechenden Linienelements der Fläche. Nach der Voraussetzung ist

$$v = au + b,$$

wo a, b willkürliche Constanten sind, die allgemeine Integralgleichung der geodätischen Linien. Es lautet nun ihre Differentialgleichung, $v'' = 0$, in der Gestalt (10*), § 78, S. 154, geschrieben, so:

$$v'' = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} v'^3 + \left(2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}\right) v'^2 + \left(\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}\right) v' - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Daraus ergeben sich für E, F und G die Bedingungen:

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0,$$

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Nun nehmen wir die Gleichungen (II), § 29, S. 52, für das Krümmungsmass K, die in unserem Falle wie folgt lauten:

*) Annali di Matematica, 7. Bd., S. 185 (1866).

$$(15)\quad \begin{cases} KE = \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}^2 - \dfrac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}, & KF = \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} - \dfrac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}, \\ KF = \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} - \dfrac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}, & KG = \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}^2 - \dfrac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}. \end{cases}$$

Differenzieren wir die erste nach v, die darunter stehende nach u und subtrahieren wir, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Identität:

$$\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} E - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} F$$

sowie der obigen Gleichungen die Gleichung:

$$(16)\qquad E\frac{\partial K}{\partial v} - F\frac{\partial K}{\partial u} = 0.$$

Verfahren wir ebenso mit dem zweiten Gleichungenpaar (15), so ergiebt sich:

$$F\frac{\partial K}{\partial v} - G\frac{\partial K}{\partial u} = 0.$$

Aus der Combination der beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{\partial K}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial v} = 0,$$

d. h. $K =$ Const., wie behauptet.

Nachdem so der Satz bewiesen worden ist, brauchen wir nur noch zu beachten, dass, wenn es sich um eine Fläche mit positivem constantem Krümmungsmass, d. h. um die Kugel, handelt, die gesuchte Abbildung sich aus der Aufeinanderfolge der Centralprojection und einer Ähnlichkeitstransformation der Bildebene ergiebt, und analog brauchen wir im Falle der pseudosphärischen Fläche nach der Abbildung in § 241 nur eine Ähnlichkeitstransformation vorzunehmen.

§ 243. Die Riccati'sche Differentialgleichung für die geodätischen Linien.

In Kap. VII, § 97, S. 189, haben wir bereits den Satz aufgestellt: Die Integration der Differentialgleichung der geodätischen Linien auf einer gegebenen Fläche mit constantem Krümmungsmass kommt auf die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung von Riccati'schem Typus hinaus. Wir wollen diesen Satz hier nur für die pseudosphärischen Flächen beweisen, da im Falle der Kugel seine Richtigkeit schon aus den allgemeinen Ausführungen in Kap. IV, § 50, über die Bestimmung einer Fläche, von der die beiden quadratischen Fundamentalformen gegeben sind, hervorgeht.

Es sei also

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

das Quadrat des Linienelements einer gegebenen pseudosphärischen Fläche S, deren Radius R wir der Einfachheit halber gleich Eins setzen. Um die Aufgabe zu lösen, die geodätischen Linien zu bestimmen, brauchen wir auf der Fläche nur eine Schar paralleler Grenzkreise und die Schar der auf ihnen senkrechten geodätischen Linien, die von einem gemeinsamen Flächenpunkt im Unendlichen ausgehen, zu kennen, da wir ja, sobald ein solches System bekannt ist, die conforme Abbildung in § 230 vornehmen können und dann alle geodätischen Linien bekannt sind.

Wir bezeichnen nun mit ϑ den Winkel, den die geodätischen Linien des angenommenen parallelen Systems mit den Curven $v = \text{Const.}$ bilden, indem wir ihn gemäss der Grundformeln auf S. 65 durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\sqrt{EG - F^2}\, dv}{E du + F dv}$$

definieren, wo du, dv die Zunahmen der krummlinigen Coordinaten u, v längs einer der geodätischen Parallelen sind. Ist die Function $\vartheta(u, v)$ bekannt, so ergiebt sich die Gleichung dieser geodätischen Linien in endlicher Gestalt durch Ausführung der Integration der Differentialgleichung:

$$\text{(a)} \qquad E \sin \vartheta\, du + \left(F \sin \vartheta - \sqrt{EG - F^2} \cos \varphi\right) dv = 0,$$

was nach dem Lie'schen Satz (§ 39, S. 74) mittels Quadraturen möglich ist. Ebenso lässt sich mittels Quadraturen die Differentialgleichung der orthogonalen Grenzkreise:

$$\text{(b)} \qquad E \cos \vartheta\, du + \left(F \cos \vartheta + \sqrt{EG - F^2} \sin \vartheta\right) dv = 0$$

integrieren. Nun stellen wir mittels der Bonnet'schen Formel (4*), § 76, S. 150, die Bedingungen dafür auf, dass die geodätische Krümmung der Curven (a) gleich Null, die der Curven (b) gleich Eins ist, und erhalten so die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{F}{\sqrt{E}} \cos \vartheta + \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \sin \vartheta\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E} \cos \vartheta\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \cos \vartheta - \frac{F}{\sqrt{E}} \sin \vartheta\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E} \sin \vartheta\right) = \sqrt{EG - F^2}.$$

Durch Ausführung der Differentiationen und Auflösen nach $\frac{\partial \vartheta}{\partial u}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ sowie unter gleichzeitiger Einführung der Christoffel'schen Symbole und des durch die Gleichungen:

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

definierten Winkels zwischen den Parameterlinien erhalten wir für die unbekannte Function $\vartheta(u, v)$ die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial u} = -\sqrt{E} \sin \vartheta - \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{E},$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial v} = -\sqrt{G} \sin (\vartheta - \omega) - \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{E}$$

oder die totale Differentialgleichung:

$$(15^*) \qquad d\vartheta + \left[\sqrt{E} \sin \vartheta + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{E}\right] du + \\ + \left[\sqrt{G} \sin (\vartheta - \omega) + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{E}\right] dv = 0,$$

die sofort die Riccati'sche Form annimmt, wenn $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ als Unbekannte gewählt wird. Da es einfach unendlich viele geodätische Parallelen giebt und also die vorstehende Gleichung eine Lösung ϑ mit einer willkürlichen Constanten besitzt, so ist a priori ersichtlich, dass die Integrabilitätsbedingung für die Gleichung (15*) identisch erfüllt ist.

Dieses können wir auch leicht nachweisen, wenn wir die Voraussetzung: $K = -1$ berücksichtigen und die Formel (III), S. 53, für das Krümmungsmass benutzen.

Kapitel XVII.

Transformationen der Flächen mit constantem Krümmungsmass.

Allgemeine Bemerkungen über die Aufgabe, eine Fläche mit constantem Krümmungsmass zu bestimmen, wenn von ihr ein Streifen gegeben ist. — Die pseudosphärischen Flächen bezogen auf ihre Haupttangentencurven und Evolutenflächen. — Existenz der pseudosphärischen Fläche, von der je eine Haupttangentencurve einer Schaar gegeben ist. — Die pseudosphärischen Strahlensysteme und die Bäcklund'sche Transformation. — Eigenschaften dieser Transformation. — Entsprechende unendlich kleine Verbiegungen der pseudosphärischen Flächen. — Complementärtransformation. — Lie'sche Transformation. — Satz von der Vertauschbarkeit der Bäcklund'schen Transformationen und Folgerungen daraus. — Dinis pseudosphärische Schraubenflächen. — Complementärfläche der Pseudosphäre. — Flächen mit positivem constantem Krümmungsmass. — Hazzidakis' Transforformation. — Flächen mit constanter mittlerer Krümmung. — Verbiegungen dieser Flächen, bei denen die Hauptkrümmungsradien ungeändert bleiben.

---

§ 244. Die zu gegebenen Streifen gehörigen Flächen constanter Krümmung.

Nachdem wir uns im vorigen Kapitel mit der Geometrie der Flächen mit constantem Krümmungsmass beschäftigt haben, wollen wir nunmehr in diesem Kapitel ihre wirklichen Gestalten im Raume untersuchen.

Wir beginnen mit einigen allgemeinen Bemerkungen über die (Cauchy'sche) Aufgabe, eine Fläche mit constantem Krümmungsmass K zu bestimmen, wenn von ihr ein analytischer Streifen gegeben ist (vgl. § 203). Schreiben wir die gewöhnliche Gleichung der Fläche in der Form:

$$z = z(x, y)$$

und bedienen wir uns für die partiellen Differentialquotienten von z der üblichen Monge'schen Bezeichnungen, so erhalten wir als Ausdruck dafür, dass das Krümmungsmass der Fläche constant, gleich K, ist, die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$(1) \qquad rt - s^2 = K(1 + p^2 + q^2)^2.$$

Sind nun eine Curve C, durch welche die Fläche hindurchgehen soll, und längs der Curve die Tangentialebenen der Fläche gegeben, so heisst dies: es sind längs C die Grössen

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q$$

als (wir setzen voraus: analytische) Functionen eines Parameters, z. B. des Bogens s der Curve C, gegeben. Die allgemeinen Sätze von Cauchy *) besagen nun, dass es eine und nur eine analytische Lösung der Gleichung (1) giebt, die den gestellten Anfangsbedingungen genügt, mit Ausschluss des Ausnahmefalles, in dem längs C

$$dp\,dx + dq\,dy = 0 \tag{2}$$

ist. Nun besagt diese Gleichung, dass die längs C gegebenen Flächennormalen mit den Binormalen der Curve selbst zusammenfallen **). Wir haben also das Ergebnis:

Es giebt eine und nur eine analytische Fläche mit constantem Krümmungsmass K, zu der ein willkürlich gegebener analytischer Streifen gehört. Eine Ausnahme bildet derjenige Fall, in welchem die Tangentialebenen des Streifens mit den Schmiegungsebenen der Curve zusammenfallen.

Wir beschäftigen uns nun mit dem Ausnahmefall. Dann lehrt uns die allgemeine Theorie, dass die gestellte Aufgabe nicht lösbar ist, wenn nicht gleichzeitig mit (2) die Gleichung:

$$dp\,dq - K(1 + p^2 + q^2)^2 dx\,dy = 0$$

oder infolge von (2) die Gleichung:

$$dq^2 + K(1 + p^2 + q^2)^2 dx^2 = 0 \tag{3}$$

besteht, und dass sie unbestimmt ist, wenn die Gleichungen (2) und (3) neben einander bestehen. Im Falle eines positiven K ist aber die Gleichung (3) offenbar unmöglich. Auch geometrisch ist sofort ersichtlich, dass dann in Anbetracht der Bedingungen der Aufgabe dieselbe sinnlos wird insofern, als die Curve C Haupttangentencurve werden müsste, während doch die Haupttangentencurven auf den Flächen mit positivem Krümmungsmass imaginär sind.

---

*) Vgl. Goursat, Vorlesungen u. s. w., deutsch von Maser, S. 22. — Darboux, Leçons, 3. Bd., S. 264.

**) Bedienen wir uns nämlich für die Curve C der üblichen Bezeichnungen, so giebt die Gleichung:

$$p \cos\alpha + q \cos\beta - \cos\gamma = 0$$

differenziert unter Berücksichtigung von (2) die Gleichung:

$$p \cos\xi + q \cos\eta - \cos\zeta = 0.$$

Ist aber K negativ, so setzen wir

$$K = -\frac{1}{R^2},$$

und dann besagt die Gleichung (3), dass die Torsion der Curve C constant gleich $\frac{1}{R}$ sein muss*); sonst wäre die Aufgabe nicht lösbar, wie sich auch aus dem Enneper'schen Satze ergiebt.

Setzen wir diese Bedingung als erfüllt voraus, so treten in der Reihenentwickelung, die sich für die gesuchte Lösung der Gleichung (1) ergiebt, unendlich viele unbestimmte Coefficienten auf. Solange aber in diesem Falle die Convergenz der betreffenden Reihe nicht nachgewiesen ist, bleibt es zweifelhaft, ob die Aufgabe wirklich unendlich viele Lösungen besitzt, wie es den Anschein hat, und welcher Grad von Unbestimmtheit ihr anhaftet. Dieses alles werden wir demnächst genauer untersuchen, und wir werden sehen, dass die Aufgabe in der That unbestimmt ist, weil noch eine Haupttangentencurve der zweiten Schar willkürlich gegeben werden kann.

§ 245. Die pseudosphärischen Flächen bezogen auf ihre Haupttangentencurven.

Das Quadrat des Linienelements einer pseudosphärischen Fläche S, deren Krümmungsmass wir der Einfachheit halber gleich -1 setzen, hat die Form (s. S. 130):

$$ds^2 = du^2 + 2\cos 2\omega\, du\, dv + dv^2, \tag{4}$$

wo ω (nach S. 131) eine Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 2\omega}{\partial u\, \partial v} = \sin 2\omega \tag{5}$$

ist. Bezeichnen wir mit X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z'' bezüglich die Richtungscosinus der Normale und der Tangenten der Krümmungslinien $u + v = \text{Const.}$, $u - v = \text{Const.}$, so erhalten wir aus den Gleichungen (30), S. 278, das nachstehende Gleichungensystem**):

*) Dieses erhellt sofort aus den Gleichungen:

$$p = -\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}, \quad q = -\frac{\cos\mu}{\cos\nu}$$

unter Berücksichtigung der Frenet'schen Formeln.

**) Wir bemerken, dass in den angeführten Gleichungen

$$\Omega = \pi - 2\omega, \quad X_1 = X', \quad X_2 = X''$$

zu setzen ist.

$$
\text{(a)}\qquad
\left\{
\begin{aligned}
&\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u} &= X' \cos\omega + X'' \sin\omega,\\
\frac{\partial X}{\partial v} &= -X' \cos\omega + X'' \sin\omega,
\end{aligned}
\right.\\
&\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial X'}{\partial u} &= X'' \frac{\partial \omega}{\partial u} - X \cos\omega,\\
\frac{\partial X'}{\partial v} &= -X'' \frac{\partial \omega}{\partial v} + X \cos\omega,
\end{aligned}
\right.\\
&\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial X''}{\partial u} &= -X' \frac{\partial \omega}{\partial u} - X \sin\omega,\\
\frac{\partial X''}{\partial v} &= X' \frac{\partial \omega}{\partial v} - X \sin\omega,
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}
\right.
$$

dazu analoge für Y, Z; Y', Z'; Y'', Z''. Bezeichnen wir mit x, y, z die Coordinaten des Punktes (u, v) auf der Fläche S, so haben wir ferner:

$$
\text{(b)}\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= -X' \sin\omega + X'' \cos\omega,\\
\frac{\partial x}{\partial v} &= X' \sin\omega + X'' \cos\omega.
\end{aligned}
\right.
$$

Bedeuten r_1, r_2 die zu den bezüglichen Krümmungslinien $u + v = \text{Const.}$, $u - v = \text{Const.}$ gehörigen Hauptkrümmungsradien von S, so erhalten wir für dieselben mit Rücksicht darauf, dass sich aus (a) und (b) die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} &= -\operatorname{tg}\omega \left(\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial v}\right),\\
\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} &= \cot\omega \left(\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial v}\right)
\end{aligned}
$$

ergeben, die Werte:

$$
(6)\qquad r_1 = -\operatorname{tg}\omega, \quad r_2 = \cot\omega.
$$

Hieraus folgt sofort ein Satz, den wir später werden benutzen müssen. Wir betrachten dazu das (pseudosphärische) Strahlensystem, das von den Tangenten der einen Schaar Haupttangentencurven, z. B. der Curven $u = \text{Const.}$, gebildet wird, und bilden es auf die Kugel ab. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten desjenigen Punktes auf der Kugel, welcher der Bildpunkt des Congruenzstrahls (u, v) ist, so haben wir:

$$
\begin{aligned}
\xi &= \frac{\partial x}{\partial v} = X' \sin\omega + X'' \cos\omega,\\
\eta &= \frac{\partial y}{\partial v} = Y' \sin\omega + Y'' \cos\omega,\\
\zeta &= \frac{\partial z}{\partial v} = Z' \sin\omega + Z'' \cos\omega.
\end{aligned}
$$

Daraus ergeben sich durch Differentiation infolge von (a) die Gleichungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = - X \sin 2\omega,$$
$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = 2\left(X' \cos\omega \frac{\partial \omega}{\partial v} - X'' \sin\omega \frac{\partial \omega}{\partial v}\right)$$

nebst analogen für η und ζ. Für das Quadrat des Linienelements der Bildkugel erhalten wir somit den Ausdruck:

$$(7) \qquad ds'^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \sin^2 2\omega du^2 + \left(\frac{\partial 2\omega}{\partial v}\right)^2 dv^2.$$

Wir sehen also, dass die sphärischen Curven u, v, die den Haupttangentencurven der pseudosphärischen Brennfläche S entsprechen, ein Orthogonalsystem bilden*), in dem das Quadrat des Linienelements der Kugel die charakteristische Form:

$$(8) \qquad ds'^2 = \sin^2 \Omega\, du^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right)^2 dv^2$$

annimmt, wo $\Omega(u, v)$ eine Lösung der Differentialgleichung:

$$(8^*) \qquad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} = \sin \Omega$$

ist.

§ 246. Abwickelbarkeit der Evolutenfläche einer pseudosphärischen Fläche auf das Catenoid.

Wir wollen nun nachweisen, dass die beiden Mäntel der Evolutenfläche der pseudosphärischen Fläche S auf das Catenoid abwickelbar sind (S. 253), wobei sich uns die Gelegenheit bieten wird, einen bemerkenswerten Umstand festzustellen.

Betrachten wir z. B. den ersten Mantel Σ_1, der zum Hauptkrümmungsradius r_1 gehört. Die Coordinaten x_1, y_1, z_1 eines beweglichen Punktes auf Σ_1 sind gegeben durch:

$$x_1 = x + X \operatorname{tg}\omega, \quad y_1 = y + Y \operatorname{tg}\omega, \quad z_1 = z + Z \operatorname{tg}\omega.$$

Durch Differentiation erhalten wir infolge der Gleichungen (a) und (b):

$$(9) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \dfrac{X}{\cos^2\omega}\dfrac{\partial \omega}{\partial u} + \dfrac{X''}{\cos\omega}, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \dfrac{X}{\cos^2\omega}\dfrac{\partial \omega}{\partial v} + \dfrac{X''}{\cos\omega}. \end{cases}$$

*) Man kann allgemein fragen, wann bei der sphärischen Abbildung eines Strahlensystems mit zusammenfallenden Developpabeln den Haupttangentencurven der Brennfläche ein Orthogonalsystem auf der Kugel entspricht. Es lässt sich beweisen, dass dieses nur dann der Fall ist, wenn als Brennfläche eine solche Fläche gewählt wird, bei der die eine Schaar Haupttangentencurven aus Curven mit constanter Torsion besteht (vgl. S. 332).

Die Normale von Σ_1 hat die Richtungscosinus X', Y', Z', wie auch auch aus den obigen Gleichungen hervorgeht.

Es ergiebt sich sofort die Richtigkeit der Gleichungen:

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial X'}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x_1}{\partial v} \frac{\partial X'}{\partial v} = 0,$$

die der Ausdruck der bekannten Eigenschaft sind (S. 243), dass die Haupttangentencurven von Σ_1 den Haupttangentencurven der Evolutenfläche S entsprechen.

Bilden wir aus den Gleichungen (9) das Quadrat des Linienelements von Σ_1:

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2,$$

so erhalten wir den Ausdruck:

$$ds_1^2 = \frac{d\omega^2}{\cos^4 \omega} + \frac{1}{\cos^2 \omega}(du^2 + 2du\,dv + dv^2),$$

der, wenn

$$\operatorname{tg} \omega = \varrho, \quad u + v = \sigma$$

gesetzt wird, die für das Catenoid typische Gestalt:

$$(10) \qquad ds_1^2 = d\varrho^2 + (1 + \varrho^2) d\sigma^2$$

annimmt. Nun bilden die Normalen der pseudosphärischen Fläche S längs einer Haupttangentencurve, z. B. längs der Curve $v = 0$, eine Linienfläche Σ, die ebenfalls auf das Catenoid, also auch auf Σ_1 abwickelbar ist. Die auf einander abwickelbaren Flächen Σ und Σ_1 berühren einander längs der gemeinsamen Haupttangentencurve $v = 0$, und der Umstand, auf den wir hinweisen wollten, ist der, dass bei der Abwickelung der beiden Flächen Σ und Σ_1 auf einander die Punkte der gemeinsamen Haupttangentencurve $v = 0$ sich selbst entsprechen.

Versehen wir nämlich die auf S längs $v = 0$ genommenen Grössen x, y, z; X, Y, Z mit dem Index 0, so erhalten wir für die Coordinaten ξ, η, ζ eines beliebigen Punktes von Σ die Werte:

$$\xi = x_0 + tX_0, \quad \eta = y_0 + tY_0, \quad \zeta = z_0 + tZ_0,$$

wo t das Stück der Erzeugenden zwischen den Punkten (ξ, η, ζ) und (x_0, y_0, z_0) ist. Daraus folgt:

$$(10^*) \qquad d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = dt^2 + (1 + t^2) du^2.$$

Die durch (10) und (10*) bestimmten Linienelemente sind dieselben, wenn

$$t = \varrho, \quad u = \sigma$$

gesetzt wird, und es ist demnach die Curve, die auf Σ der Curve $v = 0$ von Σ_1 bei der Abwickelung entspricht, durch

$$t = \operatorname{tg} \omega_0$$

gegeben, womit die oben angeführte Eigenschaft nachgewiesen ist.

§ 247. Pseudosphärische Flächen mit zwei gegebenen Haupttangentencurven.

Nach dieser Abschweifung nehmen wir die am Schlusse von § 244 aufgeworfene Frage wieder auf. Sie wird durch einen Satz beantwortet, der schon von Lie erwähnt und von Bäcklund eingehender behandelt worden ist; letzterer hat für ihn auch einen auf infinitesimalen Betrachtungen beruhenden Beweis geliefert*).

Der (auch hinsichtlich des Vorzeichens der Torsion genau gefasste) Satz lautet wie folgt:

Sind zwei Curven C und C' mit den Torsionen $+1$ bez. -1 gegeben, die von ein und demselben Raumpunkt P ausgehen, und in ihm die nämliche Schmiegungsebene, dagegen verschiedene Tangenten haben, so giebt es eine pseudosphärische Fläche vom Radius 1, für welche die beiden Curven Haupttangentencurven sind.

Zunächst erhalten wir aus dem Ausdruck (4) für das Quadrat des Linienelements für die geodätischen Krümmungen $\frac{1}{\varrho_u}$, $\frac{1}{\varrho_v}$ der Haupttangentencurven u, v (die, vom Vorzeichen abgesehen, gleich den absoluten Krümmungen sind) infolge der Gleichungen (5), S. 150, die Werte:

$$\frac{1}{\varrho_u} = -\frac{\partial 2\omega}{\partial v}, \quad \frac{1}{\varrho_v} = -\frac{\partial 2\omega}{\partial u}.$$

Nehmen wir nun an, dass die Curven C, C' mit den Curven $v = 0$ bez. $u = 0$ zusammenfallen, so ist die Angabe der Gestalt dieser Haupttangentencurven gleichbedeutend damit, dass $\frac{d 2\omega}{du}$ für $v = 0$ als Function von u und $\frac{d 2\omega}{dv}$ für $u = 0$ als Function von v gegeben wird.

Da wir ferner den Anfangswert ω_0 von ω in $u = 0$, $v = 0$ kennen, so ist ω sowohl längs $v = 0$ als auch längs $u = 0$ gegeben. Da andrerseits 2ω eine Lösung der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 2\omega}{\partial u \partial v} = \sin 2\omega$$

*) Om ytor u. s. w., S. 19. Lund's Univ. Arsskrift, 19. Bd., 1883.

sein muss, so sehen wir, dass der obige geometrische Satz unter Änderung der Bezeichnungen auf den folgenden Satz der Analysis hinauskommt:

Die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z \tag{11}$$

besitzt eine Lösung z, die sich für $y = 0$ auf eine gegebene Function $\varphi(x)$ von x und für $x = 0$ auf eine gegebene Function $\psi(y)$ von y reduciert, vorausgesetzt, dass $\varphi(0) = \psi(0)$ ist.

Die Untersuchungen von Picard*) über die Integration der Differentialgleichungen durch auf einander folgende Näherungen ermöglichen es uns, wie wir sofort sehen werden, diesen Satz in aller Strenge zu beweisen. Hierbei setzen wir zunächst nur voraus, dass die willkürlich gegebenen Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ endlich und stetig seien und ebenfalls endliche und stetige erste Ableitungen $\varphi'(x)$ und $\psi'(y)$ besitzen.

§ 248. Ansatz zum Existenzbeweis.

Wir beweisen nun das Vorhandensein der gesuchten Lösung z in einem beliebigen endlichen Bereich der beiden unabhängigen Veränderlichen x, y, in dem die für $\varphi(x)$, $\psi(y)$ gestellten Bedingungen erfüllt sein mögen.

Wir gehen aus von der Function:

$$z_1 = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) = \varphi(x) + \psi(y) - \psi(0),$$

die den Anfangsbedingungen (sich für $y = 0$ auf $\varphi(x)$ und für $x = 0$ auf $\psi(y)$ zu reducieren) sowie auch der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = 0$$

genügt. Alsdann bilden wir die Function z_2, die denselben Anfangsbedingungen und der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = \sin z_1$$

genügt:

$$z_2 = z_1 + \int_0^y \int_0^x \sin z_1 \, dx \, dy.$$

Aus z_2 leiten wir nun eine neue Function:

$$z_3 = z_1 + \int_0^y \int_0^x \sin z_2 \, dx \, dy$$

*) Journal de Mathématiques, 1890.

ab, die den Anfangsbedingungen und der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z_3}{\partial x \partial y} = \sin z_2$$

genügt. In dieser Weise fahren wir immer weiter fort und bilden so eine unendliche Reihe von Functionen:

$$(\alpha) \qquad z_1, z_2, z_3, \cdots z_n, \cdots,$$

in der das allgemeine Glied:

$$z_n = z_1 + \int_0^y \int_0^x \sin z_{n-1}\, dx\, dy$$

den Anfangsbedingungen und der Gleichung:

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = \sin z_{n-1}$$

genügt. Nun behaupten wir: Die Reihe:

$$(12) \qquad z = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots + (z_n - z_{n-1}) + \cdots$$

convergiert innerhalb jedes endlichen Bereichs für x, y gleichmässig und stellt die gesuchte Lösung der Gleichung (11) vor*).

§ 249. Beweis der Convergenz für die gefundene Lösung.

Zum Beweise unserer Behauptung bemerken wir zunächst, dass wegen $|\sin z_1| < 1$

$$(\gamma) \qquad |z_2 - z_1| = \left| \int_0^y \int_0^x \sin z_1\, dx\, dy \right| < |xy|$$

ist. Nun ist:

$$z_3 - z_2 = \int_0^y \int_0^x 2 \sin \frac{z_2 - z_1}{2} \cos \frac{z_2 + z_1}{2}\, dx\, dy;$$

und da $\left|\cos \frac{z_2 + z_1}{2}\right| < 1$ ist, während infolge der Gleichung (γ) $\left|\sin \frac{z_2 - z_1}{2}\right| < \frac{|xy|}{2}$ ist, so haben wir:

$$(\delta) \qquad |z_3 - z_2| < \int_0^{|y|} \int_0^{|x|} |xy|\, dx\, dy < \frac{|xy|^2}{(1 \cdot 2)^2}.$$

Wird überhaupt als bewiesen vorausgesetzt, dass

---

*) Die Möglichkeit, somit jede Beschränkung für den Convergenzbereich der Reihe (12) aufzuheben, verdanken wir einer Bemerkung Lindelöfs über die Picard'schen Methoden (Comptes Rendus, 26. Februar 1894), die im Texte verwandt wird.

$$(\varepsilon) \qquad |z_n - z_{n-1}| < \frac{|xy|^{n-1}}{[1 \cdot 2 \cdots (n-1)]^2}$$

ist, so ist:

$$z_{n+1} - z_n = \int_0^y \int_0^x 2 \sin \frac{z_n - z_{n-1}}{2} \cos \frac{z_n + z_{n-1}}{2} \, dx \, dy,$$

und also:

$$|z_{n+1} - z_n| < \frac{1}{[1 \cdot 2 \cdots (n-1)]^2} \int_0^{|y|} \int_0^{|x|} |xy|^{n-1} dx \, dy,$$

d. h.:

$$|z_{n+1} - z_n| < \frac{|xy|^n}{[1 \cdot 2 \cdots n]^2}.$$

Es gilt folglich die Ungleichung (ε) allgemein.

Die gleichmässige Convergenz der Reihe (12) ergiebt sich hierauf unmittelbar aus der Vergleichung mit der Reihe:

$$1 + \xi + \frac{\xi^2}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{\xi^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \cdots + \frac{\xi^n}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)^2} + \cdots,$$

die in jedem beliebigen endlichen Gebiet für die Veränderliche $\xi = |xy|$ gleichmässig convergiert.

Da die Summe der ersten n Glieder der Reihe (12) gleich z_n ist, so können wir auch sagen, dass z_n mit wachsendem n für alle Punkte des Bereiches gleichmässig gegen z convergiert. Die Function z ist sicherlich endlich und stetig und reduciert sich für $y = 0$ auf $\varphi(x)$ und für $x = 0$ auf $\psi(y)$. Es erübrigt noch zu beweisen, dass sie eine Lösung der Gleichung (11) ist. Nun gestattet jedes Glied der Reihe (12) die Bildung der zweiten Ableitung nach x und y, und infolge von (β) lautet die aus diesen zweiten Ableitungen der Glieder von (12) gebildete Reihe wie folgt:

$$(13) \qquad \begin{cases} \sin z_1 + (\sin z_2 - \sin z_1) + (\sin z_3 - \sin z_2) + \cdots \\ \qquad + (\sin z_n - \sin z_{n-1}) + \cdots. \end{cases}$$

Die Summe der ersten n Glieder von (13) ist gleich $\sin z_n$ und convergiert mit wachsendem n **gleichmässig** gegen $\sin z$, wie z_n gegen z. Die Reihe (13) ist demnach ebenfalls gleichmässig convergent, und ihre Summe ist gleich $\sin z$. Also gestattet die durch die Reihe (12) dargestellte Function z die Bildung der zweiten Ableitung $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, und es ist:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \sin z,$$

womit der Beweis des oben angegebenen Satzes geführt ist.

§ 250. **Eindeutigkeit der Lösung.**

Wir setzen nun voraus, es seien $\varphi(x)$, $\psi(y)$ analytische Functionen von x bez. y, die sich also in Taylor'sche Potenzreihen entwickeln lassen. Auch $\sin z_1$ lässt sich dann in eine solche, nach Potenzen von x und y fortschreitende Reihe entwickeln. Wenn wir nun die Reihe (α) der gebildeten Functionen z_n betrachten, so sehen wir, dass jede dieser Functionen in eine solche Potenzreihe entwickelbar ist. Da die Reihe (12) gleichmässig convergent ist, so können wir unsere Lösung z ebenfalls in eine Potenzreihe:

$$z = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{mn} x^m y^n$$

entwickeln. Beachten wir dann, dass die für z gültigen Anfangsbedingungen für $x = 0$, $y = 0$ alle Ableitungen $\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$ völlig bestimmen, so sehen wir, dass die gefundene Lösung die einzige analytische Lösung der Aufgabe ist.

Wir können somit den Satz über pseudosphärische Flächen in § 247 folgendermassen vervollständigen:

Sind die beiden gegebenen Curven C, C' analytische Curven, so giebt es eine und nur eine analytische pseudosphärische Fläche, die sie zu Haupttangentencurven hat.

Wir machen noch darauf aufmerksam, dass der oben eingeschlagene Weg den Fall, in dem sich eine der beiden Functionen $\varphi(x)$, $\psi(y)$ oder beide auf Constanten reducieren, nicht ausschliesst. Geometrisch heisst dieses (nach § 247), dass eine der beiden Curven C, C' oder beide in Gerade ausarten können. Wir haben also das besondere Ergebnis: Zwei einander schneidende Gerade bestimmen eine und nur eine (analytische) pseudosphärische Fläche von gegebenem Radius, die durch sie hindurchgeht.

In diesem Falle erhellt sofort, dass die aufeinanderfolgenden Functionen $z_2, z_3, \ldots z_n, \ldots$ Functionen des Products xy sind. Dasselbe ist demnach mit der zugehörigen Lösung z von (11) der Fall.

Zum Schlusse wollen wir auf einige Folgerungen hinweisen, welche die Theorie der Abwickelbarkeit und zwar diejenigen Verbiegungen betreffen, bei welchen eine Haupttangentencurve starr bleibt (vgl. S. 207)*).

---

*) Ausführlicher entwickelt findet der Leser diese Folgerungen in einer Bemerkung des Verfassers in den Rendiconti dell' Accademia dei Lincei, Februar 1894.

Bleibt von den beiden Curven C, C' die Curve C fest, während sich C' beliebig ändert, so sind die auf diese Weise bestimmten unendlich vielen pseudosphärischen Flächen derart auf einander abwickelbar, dass die Haupttangentencurve C starr bleibt. Wenn ferner während der Änderung von C' der Winkel ω, den C' mit C bildet, fest bleibt, so bleiben die Hauptkrümmungsradien längs C ebenfalls ungeändert, und die beiden Mäntel der Evolutenfläche werden so verbogen, dass die entsprechende Haupttangentencurve starr bleibt.

§ 251. Die pseudosphärischen Strahlensysteme.

Die vorstehenden allgemeinen Sätze verschaffen uns zwar über das Vorhandensein von Flächen mit constantem Krümmungsmass, die bestimmten Bedingungen genügen, Gewissheit, geben uns aber nicht die Mittel an die Hand, einzelne Flächen dieser Art anders als durch Reihenentwicklungen zu bestimmen. Nun führen für die Flächen mit negativem constantem Krümmungsmass die Sätze über pseudosphärische Strahlensysteme (vgl. S. 283 und 332) zu besonderen Transformationen dieser Flächen, mittels deren sich aus einer bekannten pseudosphärischen Fläche unendlich viele neue ableiten lassen. Indem wir nun zu dieser Theorie übergehen, fassen wir zunächst die bisherigen Ergebnisse in dem folgenden Satze zusammen:

Ist eine pseudosphärische Fläche S vom Radius R gegeben und ist σ ein beliebig gewählter Winkel, so giebt es ∞^1 pseudosphärische Strahlensysteme, für die S der eine Mantel der Brennfläche ist. Die Entfernung der Grenzpunkte auf jedem Congruenzstrahl ist gleich R und die Entfernung der Brennpunkte gleich $R \cos\sigma$. Der zweite Brennflächenmantel S' ist ebenfalls eine pseudosphärische Fläche vom Radius R. Auf S und S' entsprechen einander die Krümmungslinien sowie die Haupttangentencurven, und die Bogen entsprechender Haupttangentencurven sind einander gleich.

Wir setzen nun, wie vorhin, R gleich Eins, wählen für σ einen beliebigen Wert σ_1 und construieren wirklich ein pseudosphärisches Strahlensystem, für das S der erste Mantel der Brennfläche und $\cos\sigma_1$ die Entfernung der Brennpunkte sei. Es seien ferner S_1 der zweite Mantel der Brennfläche, die Punkte $F(x, y, z)$, $F_1(x_1, y_1, z_1)$ zwei entsprechende Brennpunkte anf S bez. S_1 und ω_1 der Winkel zwischen der Strecke FF_1 und der Richtung (X'', Y'', Z'') der Krümmungslinie: $u - v =$ Const. Dann haben wir offenbar:

$$(14)\quad \begin{cases} x_1 = x + \cos\sigma_1 (X' \sin\omega_1 + X'' \cos\omega_1), \\ y_1 = y + \cos\sigma_1 (Y' \sin\omega_1 + Y'' \cos\omega_1), \\ z_1 = z + \cos\sigma_1 (Z' \sin\omega_1 + Z'' \cos\omega_1). \end{cases}$$

Um die unbekannte Function $\omega_1(u, v)$ zu bestimmen, stellen wir die Bedingung dafür auf, dass das so construierte Strahlensystem ein pseudosphärisches ist. Dazu differenzieren wir die Gleichungen (14), berücksichtigen (a), (b), S. 443, und erhalten zunächst:

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \left[-\sin\omega + \cos\sigma_1 \cos\omega_1 \dfrac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial u}\right] X' + \\ \qquad + \left[\cos\omega - \cos\sigma_1 \sin\omega_1 \dfrac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial u}\right] X'' - \cos\sigma_1 \sin(\omega_1 + \omega) X, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \left[\sin\omega + \cos\sigma_1 \cos\omega_1 \dfrac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial v}\right] X' + \\ \qquad + \left[\cos\omega - \cos\sigma_1 \sin\omega_1 \dfrac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial v}\right] X'' + \cos\sigma_1 \sin(\omega_1 - \omega) X \end{cases}$$

nebst analogen Gleichungen für y_1 und z_1. Stellen wir nun die Bedingung dafür auf, dass die Strecke FF_1 die Fläche S_1 in F_1 berührt, d. h. setzen wir die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u} & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} & \dfrac{\partial z_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} & \dfrac{\partial y_1}{\partial v} & \dfrac{\partial z_1}{\partial v} \end{vmatrix}$$

gleich Null, so finden wir:

$$\cos\sigma_1 \sin(\omega_1 - \omega) \frac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial u} + \cos\sigma_1 \sin(\omega_1 + \omega) \frac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial v} =$$
$$= 2\sin(\omega_1 + \omega)\sin(\omega_1 - \omega).$$

Da ferner auf S_1 die Curven u, v Haupttangentencurven und u, v ihre Bogen sind, so haben wir notwendigerweise:

$$\sum \left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = 1, \quad \sum \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

also:

$$\left[\cos\sigma_1 \frac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial u} - \sin(\omega_1 + \omega)\right]^2 = \sin^2\sigma_1 \sin^2(\omega_1 + \omega),$$
$$\left[\cos\sigma_1 \frac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial v} - \sin(\omega_1 - \omega)\right]^2 = \sin^2\sigma_1 \sin^2(\omega_1 - \omega).$$

Wenn wir diese Gleichungen mit den vorhergehenden vergleichen, so sehen wir, dass wir unbeschadet der Allgemeinheit die Gleichungen für ω_1 in der Form:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_1-\omega)}{\partial u} = \dfrac{1+\sin\sigma_1}{\cos\sigma_1}\sin(\omega_1+\omega), \\[2ex] \dfrac{\partial(\omega_1+\omega)}{\partial v} = \dfrac{1-\sin\sigma_1}{\cos\sigma_1}\sin(\omega_1-\omega) \end{cases}$$

schreiben können. Umgekehrt: Genügt ω_1 diesen beiden Bedingungen, so sehen wir nunmehr unschwer ein, dass das gemäss den Gleichungen (14) construierte entsprechende Strahlensystem in der That pseudosphärisch ist. Es lauten dann nämlich die Gleichungen (15):

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \left[\sin\omega_1\cos(\omega_1+\omega) + \sin\sigma_1\cos\omega_1\sin(\omega_1+\omega)\right]X' + \\ \qquad + \left[\cos\omega_1\cos(\omega_1+\omega) - \sin\sigma_1\sin\omega_1\sin(\omega_1+\omega)\right]X'' - \\ \qquad\qquad - \cos\sigma_1\sin(\omega_1+\omega)X, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = \left[\sin\omega_1\cos(\omega_1-\omega) - \sin\sigma_1\cos\omega_1\sin(\omega_1-\omega)\right]X' + \\ \qquad + \left[\cos\omega_1\cos(\omega_1-\omega) + \sin\sigma_1\sin\omega_1\sin(\omega_1-\omega)\right]X'' + \\ \qquad\qquad + \cos\sigma_1\sin(\omega_1-\omega)X; \end{cases}$$

dazu kommen analoge Gleichungen in y_1 und z_1. Demnach erhalten wir, wenn wir die auf die Fläche S_1 bezüglichen Grössen mit dem Index 1 versehen (vgl. § 245, (b), S. 443):

$$(18)\quad \begin{cases} X_1 = -X'\cos\sigma_1\cos\omega_1 + X''\cos\sigma_1\sin\omega_1 - X\sin\sigma_1, \\ X_1' = X'(\sin\omega_1\sin\omega - \sin\sigma_1\cos\omega_1\cos\omega) + \\ \qquad + X''(\cos\omega_1\sin\omega + \sin\sigma_1\sin\omega_1\cos\omega) + X\cos\sigma_1\cos\omega, \\ X_1'' = X'(\sin\omega_1\cos\omega + \sin\sigma_1\cos\omega_1\sin\omega) + \\ \qquad + X''(\cos\omega_1\cos\omega - \sin\sigma_1\sin\omega_1\sin\omega) - X\cos\sigma_1\sin\omega. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$(19)\quad dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = du^2 + 2\cos 2\omega_1\,du\,dv + dv^2,$$

$$(20)\quad X_1X + Y_1Y + Z_1Z = -\sin\sigma_1,$$

und diese Gleichungen liefern den gewünschten Nachweis (vgl. § 151).

§ 252. Ableitung der neuen pseudosphärischen Flächen durch Quadraturen.

Die Function $\omega_1(u, v)$ hat für die transformierte pseudosphärische Fläche S_1 dieselbe Bedeutung wie ω für die ursprüngliche Fläche: sie giebt nämlich den halben Winkel der Haupttangentencurven auf der neuen Fläche an. Schon hieraus folgt, dass ω_1 ebenso wie ω eine Lösung der Gleichung (5):

$$(A)\quad \frac{\partial^2 2\vartheta}{\partial u\,\partial v} = \sin 2\vartheta$$

ist. Indem wir nun aber unsere Gleichungen vom rein analytischen Gesichtspunkt betrachten, dürfte es vorteilhaft sein, auf die Folgerungen hinzuweisen, die sich aus ihnen für die Integration der Gleichung (A) ergeben.

Da ω eine Lösung von (A) ist, so ist für die beiden simultanen Gleichungen (16), denen ω_1 genügen muss, die Integrabilitätsbedingung identisch erfüllt, wie erhellt, wenn die erste dieser Gleichungen nach v, die zweite nach u differenziert und dann subtrahiert wird. Demnach enthält die allgemeine Lösung $\omega_1(u, v)$ der Gleichungen (16) eine willkürliche Constante C. Wir können die Gleichungen (16) in die folgende totale Differentialgleichung für ω_1 zusammenfassen:

$$(16^*) \qquad d\omega_1 = \left[\frac{1+\sin\sigma_1}{\cos\sigma_1}\sin(\omega_1+\omega) + \frac{\partial\omega}{\partial u}\right]du + \left[\frac{1-\sin\sigma_1}{\cos\sigma_1}\sin(\omega_1-\omega) - \frac{\partial\omega}{\partial v}\right]dv.$$

Wird als Unbekannte

$$\operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2} = \varLambda$$

eingeführt, so geht sie in eine Gleichung vom Riccati'schen Typus:

$$d\varLambda = (a\varLambda^2 + b\varLambda + c)du + (a'\varLambda^2 + b'\varLambda + c')dv$$

über, wo $a, b, c; a', b', c'$ bekannte Functionen von u, v sind.

Wir brauchen also nur eine particuläre Lösung ω_1 des Systems (16) oder der Gleichung (16*) zu kennen, um aus ihr mittels Quadraturen die allgemeine Lösung ableiten zu können.

Eliminieren wir andrerseits aus den Gleichungen (16) ω, indem wir sie wie vorhin differenzieren und addieren, so ergiebt sich, dass ω_1 auch eine Lösung von (A) ist.

Auf diese Weise erhalten wir aus einer bekannten Lösung der Gleichung (A) durch Integration der Gleichungen (16) eine neue Lösung ω_1 mit einer willkürlichen Constanten. Gehen wir nun, anstatt von ω, von ω_1 aus (wobei wir σ_1 ungeändert lassen), so erhalten wir wieder die Gleichungen:

$$\frac{\partial(\omega_2-\omega_1)}{\partial u} = \frac{1+\sin\sigma_1}{\cos\sigma_1}\sin(\omega_2+\omega_1),$$

$$\frac{\partial(\omega_2+\omega_1)}{\partial v} = \frac{1-\sin\sigma_1}{\cos\sigma_1}\sin(\omega_2-\omega_1),$$

von denen bereits die particuläre Lösung:

$$\omega_2 = \pi + \omega$$

bekannt ist. Es ist demnach nur eine neue Quadratur erforderlich, um die allgemeine Lösung ω_2, die eine neue willkürliche Constante C' enthält, zu finden. Hiernach ist klar, dass die unbegrenzte Anwendung des Transformationsverfahrens unter den getroffenen Voraussetzungen lediglich successive Quadraturen erfordert. Diese vorläufigen Bemerkungen werden später in § 259 eine erwähnenswerte Ergänzung finden.

§ 253. Die Bäcklund'sche Transformation.

Die Transformation, mittels der wir von der pseudosphärischen Fläche S zur abgeleiteten Fläche S_1 gelangen, mag nach dem Mathematiker Bäcklund, der sie zuerst in ihrer ganzen Allgemeinheit untersucht hat, die Bäcklund'sche Transformation heissen. Wir bezeichnen sie symbolisch mit B_{σ_1}, indem wir die Constante σ_1, mittels deren sie gebildet ist, markieren. Somit können wir die bisherigen Ergebnisse folgendermassen zusammenfassen:

Mittels der Bäcklund'schen Transformation B_{σ_1} lassen sich aus einer pseudosphärischen Fläche S einfach unendlich viele neue pseudosphärische Flächen ableiten. Es genügt die Kenntnis nur einer der abzuleitenden Flächen, um alle übrigen mittels Quadraturen zu finden, und es erfordert die Anwendung der Transformation B_{σ_1} auf die neuen Flächen unter dieser Vorausetzung wieder nur Quadraturen.

Wir bemerken ferner, dass, wenn P ein beliebiger Punkt von S ist, die entsprechenden Punkte P_1 auf den ersten mittels der Bäcklund'schen Transformation B_{σ_1} abgeleiteten Flächen auf der Peripherie des Kreises liegen, der in der Tangentialebene um P mit dem Radius $\cos\sigma_1$ beschrieben ist. Die bekannte Eigenschaft der Gleichungen vom Riccati'schen Typus, dass das Doppelverhältnis von vier particulären Lösungen eine Constante ist, wird geometrisch durch den Satz ausgedrückt:

Vier mittels einer Bäcklund'schen Transformation B_{σ_1} aus einer pseudosphärischen Fläche S abgeleitete Flächen schneiden jeden der Kreise, die in den Tangentialebenen von S um die Berührungspunkte mit dem Radius $\cos\sigma_1$ beschrieben werden, in je vier Punkten, deren Doppelverhältnis constant ist.

Es mag ferner bemerkt werden, dass diese Kreise isogonale Trajectorien der abgeleiteten Flächen unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \sigma_1$ sind.

§ 254. Unendlich kleine Verbiegungen der pseudosphärischen Flächen.

Da ein pseudosphärisches Strahlensystem ein W-Strahlensystem ist (vgl. Kap. 12, S. 332), so ist jeder Mantel der Brennfläche einer unendlich kleinen Verbiegung fähig, bei der sich jeder Punkt parallel der Normale im entsprechenden Punkte des anderen Mantels verschiebt. Daraus folgt: Jede pseudosphärische Fläche S ist ∞^1 unendlich kleiner Verbiegungen fähig, bei denen die Richtungen, in denen sich die Punkte verschieben, gegen die Fläche um einen beliebigen constanten Winkel σ_1 geneigt sind.

Die Verbiegung ist bestimmt, wenn für einen Flächenpunkt die Verschiebungsrichtung willkürlich festgesetzt wird. Wir bemerken ferner ohne Beweis, den wir dem Leser überlassen, dass die hier betrachteten Verbiegungen einer pseudosphärischen Fläche S die einzigen sind, bei denen die Richtungen, in denen sich die einzelnen Punkte verschieben, mit den Tangentialebenen einen constanten Winkel bilden. Wir wollen nun den unendlich kleinen Betrag $\varepsilon\varrho$ der Verschiebung suchen, wo ϱ eine Function von u und v und ε eine unendlich kleine Constante ist. Die Bedingungen (vgl. § 154, (2), S. 289):

$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(\varrho X_1)}{\partial u} = 0, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial(\varrho X_1)}{\partial v} = 0,$$
$$\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial(\varrho X_1)}{\partial v} + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial(\varrho X_1)}{\partial u} = 0$$

geben infolge der Gleichungen (b) und (18) übereinstimmend:

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial u} = -\dfrac{1+\sin\sigma_1}{\cos\sigma_1}\cos(\omega_1+\omega), \\ \dfrac{\partial \log \varrho}{\partial v} = -\dfrac{1-\sin\sigma_1}{\cos\sigma_1}\cos(\omega_1-\omega). \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingung ist infolge der Gleichungen (16) identisch erfüllt, d. h. der Ausdruck:

$$(1+\sin\sigma_1)\cos(\omega_1+\omega)\,du + (1-\sin\sigma_1)\cos(\omega_1-\omega)\,dv$$

ist ein totales Differential, und aus den Gleichungen (21) selbst ergiebt sich (wie auch leicht aus denjenigen in Kap. XI folgt), dass ϱ eine Lösung der Gleichung für die unendlich kleinen Verbiegungen:

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial u\,\partial v} = \varrho\cos 2\omega$$

ist. Andrerseits folgt aber aus (21) auch:

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{1}{\varrho}\cos 2\omega_1,$$

woraus erhellt, dass die Lösung ϱ von (22) genau diejenige ist, welche bei der Moutard'schen Transformation (S. 312) den Übergang von der Laplace'schen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = z \cos 2\omega \tag{23}$$

zur Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = z \cos 2\omega_1, \tag{23*}$$

d. h. den Übergang von der Fläche S zu ihrer Bäcklund'schen Transformierten S_1 vermittelt, da eben bei der Moutard'schen Transformation die Integrale X, Y, Z von (23) in die Integrale X_1, Y_1, Z_1 von (23*) übergehen. Endlich mag noch bemerkt werden, dass, während bei der in Rede stehenden Verbiegung die Punkte von S Verschiebungen, die proportional ϱ sind, erfahren, die Punkte von S_1 bei der entsprechenden Verbiegung solche erleiden, die dem reciproken Wert $\frac{1}{\varrho}$ proportional sind.

§ 255. Die Complementärtransformation.

Wir betrachten nun den besonders interessanten Fall, in dem der Winkel σ_1 gleich Null ist. Dann sind die Fläche S und eine Fläche S_1 die beiden Mäntel der Evolutenfläche einer W-Fläche, deren Hauptkrümmungsradien durch die Gleichung:

$$r_1 - r_2 = \text{Const.}$$

verbunden sind. S_1 ist dann die Complementärfläche von S bezüglich einer Schar von geodätischen Linien, die von einem festen Punkte im Unendlichen von S ausgehen, also bezüglich einer Schar von geodätischen Parallelen. Die entsprechende Bäcklund'sche Transformation B_0 heisse die Complementärtransformation (vgl. S. 254 und 351). Die ∞^1 pseudosphärischen Flächen S_1, die sich mittels der Complementärtransformation aus S ergeben, haben zu Orthogonaltrajectorien die Kreise, die in den Tangentialebenen von S um die Berührungspunkte mit dem Radius Eins beschrieben werden. Es liegt somit ein Ribaucour'sches Cykelsystem vor (§ 186, S. 351). Die Gleichungen (16) lauten in diesem Falle einfach:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial u} &= \sin(\omega_1 + \omega), \\ \frac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial v} &= \sin(\omega_1 - \omega). \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Als Differentialgleichung der geodätischen Parallelen, die auf S von den Strahlen des pseudosphärischen Strahlensystems umhüllt werden, ergiebt sich sofort:

(25) $$\sin(\omega_1 + \omega)du + \sin(\omega_1 - \omega)dv = 0,$$

demnach als Differentialgleichung der dazu senkrechten (parallelen) Grenzkreise (vgl. § 34, S. 66, (13)):

(26) $$\cos(\omega_1 + \omega)du + \cos(\omega_1 - \omega)dv = 0.$$

Die linke Seite von (26) ist, wie bereits im vorigen Paragraphen bemerkt worden ist, ein vollständiges Differential. Wird

$$\psi = \int[\cos(\omega_1 + \omega)\,du + \cos(\omega_1 - \omega)dv]$$

gesetzt, so ist

$$\varDelta_1\psi = 1, \quad \varDelta_2\psi = 1,$$

wo die Differentialparameter bezüglich des Linienelements von S berechnet sind. Daraus folgt (§ 39, S. 74), dass e^{ψ} ein Multiplicator der linken Seite von (25) ist. Wenn wir nun mit τ die Function bezeichnen, deren vollständiges Differential jene linke Seite nach Multiplication mit e^{ψ} wird, so haben wir:

$$d\psi = \cos(\omega_1 + \omega)du + \cos(\omega_1 - \omega)dv,$$
$$e^{-\psi}d\tau = \sin(\omega_1 + \omega)du + \sin(\omega_1 - \omega)dv.$$

Daraus folgt die Gleichung:

(27) $$du^2 + 2\cos 2\omega\,du\,dv + dv^2 = d\psi^2 + e^{-2\psi}d\tau^2,$$

die zeigt, dass das Quadrat des Linienelements von S auf die geodätische Normalform der Fläche gebracht ist.

Auf der Complementärfläche S_1 dagegen lautet die Differentialgleichung der von den Strahlen umhüllten geodätischen Parallelen:

$$\sin(\omega_1 + \omega)du - \sin(\omega_1 - \omega)dv = 0,$$

und es ist $e^{-\psi}$ ein Multiplicator der linken Seite. Setzen wir:

$$d\tau_1 = e^{-\psi}[\sin(\omega_1 + \omega)du - \sin(\omega_1 - \omega)dv],$$

so ergiebt sich in ähnlicher Weise:

(28) $$du^2 + 2\cos 2\omega_1\,du\,dv + dv^2 = d\psi^2 + e^{2\psi}\,d\tau_1^2.$$

Bezeichnen wir endlich mit ξ, η, ζ die Richtungscosinus der Strahlen des Systems, d. h. setzen wir:

$$\xi = x_1 - x, \quad \eta = y_1 - y, \quad \zeta = z_1 - z, \quad (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1),$$

so finden wir:

(29) $$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = e^{-2\psi}d\tau^2 + e^{2\psi}d\tau_1^2.$$

Die Curven τ, τ_1 auf der Kugel sind die Bilder der abwickelbaren Flächen des Strahlensystems und teilen die Kugeloberfläche in unendlich kleine Rechtecke von constantem Inhalt.

Die Gleichungen des vorliegenden Paragraphen rühren sämtlich

von Darboux her, der sie als analytischen Ausdruck für die Complementärtransformation gefunden hat.

§ 256. Die Lie'sche Transformation.

Im Zusammenhange mit der Bäcklund'schen Complementärtransformation der pseudosphärischen Flächen ist hier eine Transformation anderer Art, die Lie'sche Transformation, zu betrachten. Sie beruht auf der einfachen Bemerkung, dass aus einer bekannten Lösung $\omega(u, v)$ der grundlegenden Gleichung (5):

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin \omega \cos \omega$$

eine neue mit einer willkürlichen Constanten k behaftete Lösung $\Omega(u, v)$ abgeleitet werden kann in der Weise, dass

$$\Omega(u, v) = \omega\left(ku, \frac{v}{k}\right)$$

gesetzt wird*). Der Lösung $\omega(u, v)$ entsprach eine pseudosphärische Fläche S; der neuen Lösung Ω wird eine neue, gestaltlich völlig bestimmte, pseudosphärische Fläche Σ entsprechen. Diese möge die Lie'sche Transformierte der Fläche S heissen. Um die Fläche Σ zu erhalten, müssen wir eine Riccati'sche Differentialgleichung integrieren und dazu das Quadrat des Linienelements auf der Kugel wirklich auf die Form:

$$ds'^2 = du^2 - 2\cos 2\Omega \, du \, dv + dv^2$$

bringen.

Wir setzen nun zur besseren Vergleichung mit den Formeln der voraufgehenden Paragraphen:

$$k = \frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma}$$

und bezeichnen symbolisch mit L_σ diejenige Lie'sche Transformation, welche die Fläche, die der Lösung $\omega(u, v)$ entspricht, in die Fläche überführt, die der Lösung

$$\Omega(u, v) = \omega\left(\frac{1 + \sin \sigma}{\cos \sigma} u, \quad \frac{1 - \sin \sigma}{\cos \sigma} v\right)$$

entspricht. Dann ist die dem umgekehrten Wege entsprechende oder inverse Transformation L_σ^{-1} einfach $L_{-\sigma}$.

Sind nun ω und ω_1 zwei Lösungen der Fundamentalgleichung, die durch die Gleichungen (24) mit einander verbunden sind, d. h. ent-

---

*) Offenbar gilt die zu Grunde liegende Bemerkung für alle Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = F(\omega).$$

sprechen sie zwei pseudosphärischen Complementärflächen, und bezeichnen wir mit Ω und Ω_1 die neuen Lösungen, so erhalten wir sofort:

$$\frac{\partial(\Omega_1 - \Omega)}{\partial u} = \frac{1 + \sin\sigma}{\cos\sigma} \sin(\Omega_1 + \Omega),$$

$$\frac{\partial(\Omega_1 + \Omega)}{\partial v} = \frac{1 - \sin\sigma}{\cos\sigma} \sin(\Omega_1 - \Omega).$$

Dieses sind die Formeln (16), S. 453, für die Bäcklund'sche Transformation. Nun gelangen wir von Ω zu ω mittels der inversen Lie'schen Transformation L_σ^{-1}, von ω zu ω_1 mittels der Complementärtransformation B_0, von ω_1 zu Ω_1 mittels L_σ und demnach von Ω zu Ω_1 mittels der zusammengesetzten Transformation $L_\sigma B_0 L_\sigma^{-1}$. Da wir andrerseits von Ω zu Ω_1 auch mittels der Bäcklund'schen Transformation B_σ gelangen, so können wir symbolisch schreiben:

$$B_\sigma = L_\sigma B_0 L_\sigma^{-1}.$$

Es kann somit, wie Lie bemerkt hat, die Bäcklund'sche Transformation aus Lie'schen Transformationen und einer Complementärtransformation zusammengesetzt werden. Das thut jedoch der Bedeutung der Bäcklund'schen Transformation keinerlei Abbruch; sie kann wie die Complementärtransformation durch eine geometrische Construction im Raume veranschaulicht werden, während für die Lie'sche Transformation nichts derartiges gilt.

Anmerkung. — Eine Klasse von pseudosphärischen Flächen giebt es, die bisher nicht untersucht worden sind und auf die wir kurz hinweisen wollen. Jede Fläche der beregten Klasse besitzt die Eigenschaft, mit ihren sämtlichen Lie'schen Transformierten zusammenzufallen. Um zu diesen Flächen zu gelangen, haben wir nur diejenigen Lösungen ω der Fundamentalgleichung zu suchen, welche Functionen des Products uv sind. Wird

$$2\omega = f(\tau), \quad \tau = uv$$

gesetzt, so ist f aus der Differentialgleichung:

$$\tau f'' + f' = \sin f$$

zu bestimmen, die, wenn $\tau = e^x$ gesetzt wird, die Form:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = e^x \sin f$$

annimmt. Unter diesen Flächen befinden sich auch die Flächen, auf denen zwei einander schneidende Gerade liegen (§ 250).

§ 257. Der Vertauschbarkeitssatz.

Als sehr fruchtbringend für die fortgesetzte Anwendung der Methoden zur Transformation der pseudosphärischen Flächen erweist sich ein Satz, den der Verfasser Vertauschbarkeitssatz genannt hat*). Derselbe lautet wie folgt:

Sind S_1 und S_2 zwei pseudosphärische Flächen, die mit ein und derselben pseudosphärischen Fläche S durch zwei Bäcklund'sche Transformationen B_{σ_1}, B_{σ_2} mit verschiedenen Constanten σ_1, σ_2 verknüpft sind, so giebt es eine vierte pseudosphärische Fläche S_3, die mit den Flächen S_1, S_2 bezüglich durch Bäcklund'sche Transformationen B'_{σ_2}, B'_{σ_1}, mit den vertauschten Constanten σ_2, σ_1, verknüpft ist.

Augenscheinlich gelangt man von S zu S_3 entweder, indem man zuerst B_{σ_1}, dann B'_{σ_2} oder indem man zuerst B_{σ_2}, dann B'_{σ_1} ausführt, d. h. es ist symbolisch:

$$B'_{\sigma_2} B_{\sigma_1} = B'_{\sigma_1} B_{\sigma_2};$$

daher die Bezeichnung: Vertauschbarkeitssatz.

Zum Beweise desselben gehen wir auf die Gleichungen (14), § 251, S. 452, angewandt auf die beiden Flächen S_1 und S_2, zurück, nämlich auf die Gleichungen:

$$(30)\qquad \begin{cases} x_1 = x + \cos\sigma_1 (X' \sin\omega_1 + X'' \cos\omega_1), \\ x_2 = x + \cos\sigma_2 (X' \sin\omega_2 + X'' \cos\omega_2) \end{cases}$$

nebst den analogen in y und z, wo zwischen ω_1, ω; ω_2, ω die folgenden Beziehungen bestehen:

$$(31)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_1 - \omega)}{\partial u} = \dfrac{1 + \sin\sigma_1}{\cos\sigma_1} \sin(\omega_1 + \omega), \\[2ex] \dfrac{\partial(\omega_1 + \omega)}{\partial v} = \dfrac{1 - \sin\sigma_1}{\cos\sigma_1} \sin(\omega_1 - \omega); \end{cases}$$

$$(31^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_2 - \omega)}{\partial u} = \dfrac{1 + \sin\sigma_2}{\cos\sigma_2} \sin(\omega_2 + \omega), \\[2ex] \dfrac{\partial(\omega_2 + \omega)}{\partial v} = \dfrac{1 - \sin\sigma_2}{\cos\sigma_2} \sin(\omega_2 - \omega). \end{cases}$$

Wir wollen nun zum Beweise zunächst annehmen, dass entsprechend dem Wortlaut des Satzes die vierte Fläche S_3 existiere, und wollen die sich auf S_3 beziehenden Grössen mit dem Index 3 versehen. Da nun S_3 mit S_1 durch eine Transformation B'_{σ_2} verknüpft ist, müssen wir infolge der Gleichungen (14) und (18), § 251, haben:

---

*) S. die Bemerkung des Verfassers: Sulla trasformazione di Bäcklund, Rendiconti dell' Accademia dei Lincei, 5. Serie, 1. Bd., 2. Halbjahr.

$$x_3 = x_1 + \cos\sigma_2 \sin\omega_3[(\sin\omega_1 \sin\omega - \sin\sigma_1 \cos\omega_1 \cos\omega)X' +$$
$$+ (\cos\omega_1 \sin\omega + \sin\sigma_1 \sin\omega_1 \cos\omega)X'' + \cos\sigma_1 \cos\omega X] +$$
$$+ \cos\sigma_2 \cos\omega_3[\sin\omega_1 \cos\omega + \sin\sigma_1 \cos\omega_1 \sin\omega)X' +$$
$$+ (\cos\omega_1 \cos\omega - \sin\sigma_1 \sin\omega_1 \sin\omega)X'' - \cos\sigma_1 \sin\omega X].$$

Andrerseits ist auch, da S_3 mit S_2 durch B'_{σ_1} verknüpft ist:

$$x_3 = x_2 + \cos\sigma_1 \sin\omega_3[(\sin\omega_2 \sin\omega - \sin\sigma_2 \cos\omega_2 \cos\omega)X' +$$
$$+ (\cos\omega_2 \sin\omega + \sin\sigma_2 \sin\omega_2 \cos\omega)X'' + \cos\sigma_2 \cos\omega X] +$$
$$+ \cos\sigma_1 \cos\omega_3[(\sin\omega_2 \cos\omega + \sin\sigma_2 \cos\omega_2 \sin\omega)X' +$$
$$+ (\cos\omega_2 \cos\omega - \sin\sigma_2 \sin\omega_2 \sin\omega)X'' - \cos\sigma_2 \sin\omega X].$$

Aus der Vergleichung der beiden Ausdrücke für x_3 und unter Berücksichtigung der Gleichungen (30) folgern wir:

$$\cos\sigma_1 \sin\omega_1 + \cos\sigma_2 \sin\omega_3(\sin\omega_1 \sin\omega - \sin\sigma_1 \cos\omega_1 \cos\omega) +$$
$$+ \cos\sigma_2 \cos\omega_3(\sin\omega_1 \cos\omega + \sin\sigma_1 \cos\omega_1 \sin\omega) =$$
$$= \cos\sigma_2 \sin\omega_2 + \cos\sigma_1 \sin\omega_3(\sin\omega_2 \sin\omega - \sin\sigma_2 \cos\omega_2 \cos\omega) +$$
$$+ \cos\sigma_1 \cos\omega_3(\sin\omega_2 \cos\omega + \sin\sigma_2 \cos\omega_2 \sin\omega),$$
$$\cos\sigma_1 \cos\omega_1 + \cos\sigma_2 \sin\omega_3(\cos\omega_1 \sin\omega + \sin\sigma_1 \sin\omega_1 \cos\omega) +$$
$$+ \cos\sigma_2 \cos\omega_3(\cos\omega_1 \cos\omega - \sin\sigma_1 \sin\omega_1 \sin\omega) =$$
$$= \cos\sigma_2 \cos\omega_2 + \cos\sigma_1 \sin\omega_3(\cos\omega_2 \sin\omega + \sin\sigma_2 \sin\omega_2 \cos\omega) +$$
$$+ \cos\sigma_1 \cos\omega_3(\cos\omega_2 \cos\omega - \sin\sigma_2 \sin\omega_2 \sin\omega).$$

Multiplicieren wir diese Gleichungen der Reihe nach das erste Mal mit $\sin\omega_1$, $\cos\omega_1$, das zweite Mal mit $\sin\omega_2$, $\cos\omega_2$ und addieren wir jedes Mal, so ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\cos\sigma_1 \sin\sigma_2 \sin(\omega_2 - \omega_1)\sin(\omega_3 - \omega) +$$
$$+ [\cos\sigma_1 \cos(\omega_2 - \omega_1) - \cos\sigma_2]\cos(\omega_3 - \omega) = \cos\sigma_1 - \cos\sigma_2 \cos(\omega_2 - \omega_1),$$
$$- \cos\sigma_2 \sin\sigma_1 \sin(\omega_2 - \omega_1)\sin(\omega_3 - \omega) +$$
$$+ [\cos\sigma_2 \cos(\omega_2 - \omega_1) - \cos\sigma_1]\cos(\omega_3 - \omega) = \cos\sigma_2 - \cos\sigma_1 \cos(\omega_2 - \omega_1).$$

Lösen wir sie nach $\sin(\omega_3 - \omega)$ und $\cos(\omega_3 - \omega)$ auf, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$(32)\quad \begin{cases} \sin(\omega_3 - \omega) = \dfrac{(\sin\sigma_1 - \sin\sigma_2)\sin(\omega_2 - \omega_1)}{\cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos(\omega_2 - \omega_1) + \sin\sigma_1 \sin\sigma_2 - 1}, \\ \cos(\omega_3 - \omega) = \dfrac{\cos\sigma_1 \cos\sigma_2 + (\sin\sigma_1 \sin\sigma_2 - 1)\cos(\omega_2 - \omega_1)}{\cos\sigma_1 \cos\sigma_2 \cos(\omega_2 - \omega_1) + \sin\sigma_1 \sin\sigma_2 - 1}. \end{cases}$$

Sie sind mit einander verträglich, weil die Summe der Quadrate der rechten Seiten gleich Eins ist.

Wir können sie durch die nachstehende eine Gleichung ersetzen:

$$(33)\qquad \operatorname{tang}\frac{\omega_3-\omega}{2}=\frac{\cos\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}{\sin\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}}\operatorname{tang}\frac{\omega_1-\omega_2}{2}.$$

§ 258. **Fortsetzung.**

Die voraufgehende Rechnung hat uns unter der Voraussetzung der Existenz der vierten Fläche S_3 zur Gleichung (33) (oder zu den Gleichungen (32)) geführt, durch die diese Fläche bestimmt werden müsste. Nun können wir leicht bestätigen, dass die so gefundene Fläche S_3 in der That allen Bedingungen des Vertauschbarkeitssatzes genügt. Hierzu brauchen wir nur nachzuweisen, dass die durch die Gleichung (33) bestimmte Function ω_3 mit ω_1 bez. ω_2 durch die Gleichungenpaare:

$$(c)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_3-\omega_1)}{\partial u}=\dfrac{1+\sin\sigma_2}{\cos\sigma_2}\sin(\omega_3+\omega_1), \\ \dfrac{\partial(\omega_3+\omega_1)}{\partial v}=\dfrac{1-\sin\sigma_2}{\cos\sigma_2}\sin(\omega_3-\omega_1); \end{cases}$$

$$(d)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\omega_3-\omega_2)}{\partial u}=\dfrac{1+\sin\sigma_1}{\cos\sigma_1}\sin(\omega_3+\omega_2), \\ \dfrac{\partial(\omega_3+\omega_2)}{\partial v}=\dfrac{1-\sin\sigma_1}{\cos\sigma_1}\sin(\omega_3-\omega_2) \end{cases}$$

verknüpft ist, die besagen, dass man von S_1 zu S_3 mittels der Bäcklund'schen Transformation B'_{σ_2} und von S_2 zu S_3 mittels der Transformation B'_{σ_1} gelangt.

Um nun z. B. die Gleichungen (c) zu beweisen, brauchen wir nur die Gleichung (33) nach u und v zu differenzieren, die Gleichungen (32) zu berücksichtigen und in geeigneter Weise mit den Gleichungen (31) zu combinieren. Ähnliches gilt für die Gleichungen (d).

Nachdem somit der Vertauschbarkeitssatz bewiesen ist, mag bemerkt werden, dass vier entsprechende Punkte auf den vier pseudosphärischen Flächen S, S_1, S_2, S_3 die Ecken eines windschiefen Vierecks sind, in dem zwei Gegenseiten die constante Länge $\cos\sigma_1$, die beiden anderen die constante Länge $\cos\sigma_2$ behalten. Das Viereck bewegt sich, ohne dass sich die Seitenlängen ändern, so im Raume, dass seine vier Ecken die vier pseudosphärischen Flächen beschreiben und die in einer Ecke zusammenstossenden Seiten in der Tangentialebene der entsprechenden Fläche liegen.

§ 259. Folgerungen aus dem Vertauschbarkeitssatz.

Wir wollen nun voraussetzen, dass von einer pseudosphärischen Fläche S, die der Lösung ω der Fundamentalgleichung (5) entspreche, alle Bäcklund'schen Transformierten bekannt seien, d. h., dass wir für jeden Wert der Constanten σ das Gleichungensystem:

$$(34)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi-\omega)}{\partial u} = \dfrac{1+\sin\sigma}{\cos\sigma}\sin(\varphi+\omega), \\[2ex] \dfrac{\partial(\varphi+\omega)}{\partial v} = \dfrac{1-\sin\sigma}{\cos\sigma}\sin(\varphi-\omega), \end{cases}$$

in dem die Lösung $\varphi(u, v, \sigma, C)$ der Fundamentalgleichung (5) mit den beiden willkürlichen Constanten σ und C bekannt sei, integrieren können. Dann folgt aus dem Vertauschbarkeitssatz:

Für jede der aus S ableitbaren pseudosphärischen Flächen können alle Bäcklund'schen Transformierten lediglich durch algebraische Rechnungen und Differentiationen bestimmt werden.

Es sei nämlich S_1 eine Bäcklund'sche Transformierte von S, die der Lösung der Gleichung (5)

$$\omega_1 = \varphi(u, v, \sigma_1, C)$$

entspreche, und Σ die durch die erzeugende Transformation B_σ erhaltene Transformierte von S_1. Bezeichnen wir mit Ω die Lösung der zugehörigen Gleichung (5) und berücksichtigen wir die Gleichung (33), so erhalten wir:

$$(35)\qquad \operatorname{tang}\frac{\Omega-\omega}{2} = \frac{\cos\dfrac{\sigma_1+\sigma}{2}}{\sin\dfrac{\sigma_1-\sigma}{2}}\operatorname{tang}\frac{\omega_1-\varphi(u, v, \sigma, C)}{2}.$$

Diese Gleichung bestimmt uns Σ in endlicher Form, nur nicht in dem Falle: $\sigma_1 = \sigma$.

Indem wir aber diesen Ausnahmefall als Grenzfall auffassen, können wir auch für ihn leicht die zugehörige Gleichung finden. Zu diesem Zwecke denken wir uns in der Function $\varphi(u, v, \sigma, C)$ σ sich σ_1 nähern und für C eine willkürliche Function von σ_1 gewählt, die für $\sigma = \sigma_1$ in C_1 übergeht.

In der Grenze, für $\sigma = \sigma_1$, wird die Gleichung (35) unbestimmt. Wird jedoch auf der rechten Seite für den Quotienten $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\omega_1-\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\sigma_1-\sigma}{2}}$, der die Gestalt $\dfrac{0}{0}$ annimmt, der Quotient der Differentialquotienten nach σ gesetzt, so ergiebt sich:

$$\operatorname{tang}\frac{\Omega-\omega}{2}=\cos\sigma_1\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}+\frac{\partial\varphi}{\partial C}\frac{dC}{d\sigma}\right]_{\sigma=\sigma_1}$$

oder:

(35*) $$\operatorname{tang}\frac{\Omega-\omega}{2}=\cos\sigma_1\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}+C'\frac{\partial\varphi}{\partial C}\right]_{\sigma=\sigma_1},$$

wo C' eine neue willkürliche Constante ist. Nun lässt sich leicht direct nachweisen, dass sich aus dieser Gleichung eben die mittels B_{σ_1} gefundenen Bäcklund'schen Transformierten von S_1 ergeben. Dazu brauchen wir nur die Gleichungen (34) nach σ zu differenzieren, dann in ihnen σ gleich σ_1 zu setzen und die so erhaltenen Gleichungen mit denen zu combinieren, die durch Differentiation der Gleichung (35*) nach u und v entstehen.

Das Ergebnis lässt sich auch folgendermassen aussprechen:

Bei fortgesetzter und unbeschränkter Anwendung der Bäcklund'schen Transformation auf eine pseudosphärische Fläche und auf die nach einander aus dieser Fläche abgeleiteten Flächen braucht nur die erste, auf die erzeugende Transformation B_σ bezügliche Riccati'sche Differentialgleichung integriert zu werden; dann sind die weiterhin nach einander auftretenden Riccati'schen Differentialgleichungen unmittelbar gleichzeitig mit dieser integriert.

Aus den Untersuchungen Lies über die fortgesetzte Anwendung der Complementärtransformation folgt, dass die aus einer Ausgangsfläche abgeleiteten Flächen in Wirklichkeit in jedem Falle eine Mannigfaltigkeit unendlich hoher Ordnung bilden. Nun erscheint es sehr bemerkenswert, dass nach Ausführung der ersten allgemeinen Bäcklund'schen Transformation, die zwei willkürliche Constanten hineinbringt, das Hineinbringen der weiterhin nach einander in unbegrenzter Anzahl auftretenden Constanten lediglich algebraische Rechnungen und Differentiationen erfordert.

§ 260. Geodätische Linien auf den abgeleiteten Flächen.

Unter Beibehaltung der zu Beginn des vorigen Paragraphen getroffenen Voraussetzung beweisen wir nun Folgendes:

Für jede Fläche S_n der aus S abgeleiteten Reihe von Flächen lässt sich ohne irgend eine Integration die Gleichung der geodätischen Linien in endlicher Gestalt angeben.

Bezeichnen wir nämlich mit ω_n die der Fläche S_n entsprechende Lösung von (5), so können wir nach dem Vorstehenden allein durch

algebraische Rechnungen und Differentiationen die allgemeinste Lösung φ des Systems:

$$(36)\qquad \frac{\partial(\varphi - \omega_n)}{\partial u} = \sin(\varphi + \omega_n), \quad \frac{\partial(\varphi + \omega_n)}{\partial v} = \sin(\varphi - \omega_n)$$

angeben. Sie ist eine Function $\varphi(u, v, C)$ mit einer willkürlichen Constanten C. Differenzieren wir nun diese Gleichungen nach C, so erhalten wir, wenn

$$\psi = \log \frac{\partial \varphi}{\partial C}$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \cos(\varphi + \omega_n), \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = \cos(\varphi - \omega_n).$$

Daraus folgt, dass die Function ψ mit der nicht additiven Constanten C ein Integral der Gleichung:

$$\Delta_1 \psi = 1$$

ist, wo $\Delta_1 \psi$ der erste Differentialparameter von ψ bezüglich der Form:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos 2\omega_n\, du\, dv + dv^2$$

ist, die das Quadrat des Linienelements von S_n darstellt. Infolge von Satz (B), § 86, S. 170, kommen wir also zu dem gewünschten Ergebnis:

Die endliche Gleichung der geodätischen Linien auf S_n lautet:

$$(37)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial C^2} = C' \frac{\partial \varphi}{\partial C},$$

worin C' eine neue willkürliche Constante ist.

§ 261. Dinis pseudosphärische Schraubenflächen.

Die obigen Ergebnisse wenden wir nun auf die Untersuchung einer (unendlichen) Reihe von pseudosphärischen Flächen an, für die sich die laufenden Punktcoordinaten durch gewöhnliche Kreis- und Exponentialfunctionen der Parameter u, v der Haupttangentencurven ausdrücken.

Diese Flächenreihe erhalten wir am einfachsten, wenn wir von der evidenten Lösung: $\omega = 0$ der Fundamentalgleichung (5) ausgehen. Es ist klar, dass die Formeln für die Bäcklund'sche Transformation auch in diesem Falle anwendbar bleiben, wofern gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
x &= 0, & y &= 0, & z &= u + v,\\
X &= \cos(u - v), & Y &= \sin(u - v), & Z &= 0,\\
X' &= -\sin(u - v), & Y' &= \cos(u - v), & Z' &= 0,\\
X'' &= 0, & Y'' &= 0, & Z'' &= 1.
\end{aligned}$$

Durch diese Werte wird den Fundamentalgleichungen (a) und (b), S. 443, Genüge geleistet; nur tritt hier der besondere Umstand ein, dass sich die Ausgangsfläche S auf die z-Axe zusammenzieht.

Wenden wir auf diese Lösung: $\omega = 0$ die allgemeine Bäcklund'sche Transformation B_σ an, um zu einer neuen Lösung φ zu gelangen, so finden wir, dass φ durch die simultanen Gleichungen (16), § 251, S. 453:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{1 + \sin\sigma}{\cos\sigma} \sin\varphi, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{1 - \sin\sigma}{\cos\sigma} \sin\varphi$$

bestimmt ist. Durch Integration ergiebt sich:

$$\text{(38)} \qquad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} = C e^{\frac{u + v + \sin\sigma(u - v)}{\cos\sigma}},$$

wo die willkürliche Integrationsconstante C ohne Einfluss auf die Beschaffenheit der Fläche gleich Eins gesetzt werden kann.

§ 262. Gestalt der Dini'schen Flächen.

Untersuchen wir nun, wie die entsprechenden Flächen aussehen. Aus den Gleichungen (14), § 251, S. 452, erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichungen:

$$\sin\varphi = \frac{1}{\cosh\alpha}, \quad \cos\varphi = -\operatorname{tangh}\alpha, \quad \alpha = \frac{u + v + \sin\sigma(u - v)}{\cos\sigma}$$

für unsere Flächen S_1:

$$x_1 = -\cos\sigma \frac{\sin(u - v)}{\cosh\alpha}, \quad y_1 = \cos\sigma \frac{\cos(u - v)}{\cosh\alpha},$$

$$z_1 = u + v - \cos\sigma \operatorname{tang}\alpha.$$

Führen wir die Parameter der Krümmungslinien:

$$U = u + v, \quad V = u - v$$

ein, so können wir statt dieser Gleichungen die folgenden schreiben:

$$\text{(39)} \qquad x_1 = -\cos\sigma \frac{\sin V}{\cosh\alpha}, \quad y_1 = \cos\sigma \frac{\cos V}{\cosh\alpha},$$

$$z_1 = U - \cos\sigma \operatorname{tangh}\alpha = \cos\sigma(\alpha - \operatorname{tangh}\alpha) - V\sin\sigma,$$

$$\alpha = \frac{U + V\sin\sigma}{\cos\sigma}.$$

Die vorstehenden Gleichungen zeigen uns, dass die fraglichen Flächen Schraubenflächen sind. Die Meridiancurve $V = 0$, die durch die Gleichungen:

$$y_1 = \frac{\cos\sigma}{\cosh\alpha}, \quad z_1 = \cos\sigma(\alpha - \operatorname{tangh}\alpha)$$

bestimmt ist, ist eine Tractrix, für welche die Axe Asymptote und die constante Länge der Tangente gleich $\cos\sigma$ ist. Der Parameter der Schraubung ist gleich $\sin\sigma$. Es sind dieses die merkwürdigen pseudosphärischen Schraubenflächen, die zuerst Dini gefunden hat*).

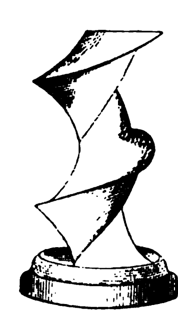


Fig. 15. Dini'sche Schraubenfläche.

Ihre Krümmungslinien $V = \text{Const.}$ sind die Meridiancurven (Tractricen); die Krümmungslinien des zweiten Systems $U = \text{Const.}$ liegen wegen der Gleichung:

$$x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - U)^2 = \cos^2\sigma$$

auf Kugeln vom Radius $\cos\sigma$, deren Mittelpunkte auf der Axe liegen. Aus den nachstehenden Werten für die Richtungscosinus der Normale der Schraubenfläche S_1 (§ 453, Gl. (18)):

$$X_1 = \cos\sigma \operatorname{tangh}\alpha \sin V - \sin\sigma \cos V,$$
$$Y_1 = -\cos\sigma \operatorname{tangh}\alpha \cos V - \sin\sigma \sin V,$$
$$Z_1 = \frac{\cos\sigma}{\cosh\alpha}$$

leiten wir die beiden Gleichungen ab:

$$-(X_1 \cos V + Y_1 \sin V) = \sin\sigma,$$
$$X_1 x_1 + Y_1 y_1 + Z_1(z_1 - U) = 0.$$

Die erste besagt, dass die Senkrechte auf der Meridianebene mit der Flächennormale den Winkel $\frac{\pi}{2} - \sigma$ bildet, die zweite, dass die Kugeln, auf denen die Krümmungslinien $U = \text{Const.}$ liegen, die Schraubenfläche orthogonal schneiden.

Daraus folgt auch, dass die Curven $U = \text{Const.}$ Loxodromen der Kugeln sind, auf denen sie liegen, und dass sie die Meridiane der Kugeln in Ebenen durch die Axe unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \sigma$ schneiden. Ferner sind diese Curven U geodätische Kreise vom Radius $\cos\sigma < 1$ und haben demnach einen reellen Mittelpunkt. Das Quadrat des Linienelements der Schraubenfläche ist:

$$ds^2 = 4(\cos^2\varphi\, dU^2 + \sin^2\varphi\, dV^2),$$

*) Lassen wir die Bedingung fallen, dass der Radius R der pseudosphärischen Fläche gleich Eins sein soll, so können wir das Ergebnis folgendermassen aussprechen: Wird einer Tractrix vom Parameter h eine Schraubung vom Parameter m um die Asymptote erteilt, so ist die entstehende Schraubenfläche eine pseudosphärische Fläche vom Radius $R = \sqrt{h^2 + m^2}$.

d. h.:

$$ds^2 = 4\left(\operatorname{tangh}^2 \alpha \, dU^2 + \frac{dV^2}{\cosh^2 \alpha}\right).$$

Es ist leicht einzusehen, dass die Schraubenlinien $\alpha =$ Const. geodätisch parallele Kreise mit imaginärem Mittelpunkt sind und dass somit die Schraubenfläche auf die pseudosphärische Rotationsfläche vom hyperbolischen Typus derart abwickelbar ist, dass sich die Schraubenlinien mit den Parallelkreisen decken.

Die Sätze der voraufgehenden Paragraphen geben uns Gewissheit darüber, dass die unbegrenzt fortgesetzte Anwendung des Bäcklund'schen Transformationsverfahrens auf die Dini'schen pseudosphärischen Schraubenflächen, insbesondere auf die Pseudosphäre ($\sigma = 0$), nur algebraische Rechnungen und Differentiationen erheischt.

Nehmen wir z. B. eine specielle Dini'sche Schraubenfläche, die den Gleichungen:

$$\operatorname{tang} \frac{\omega_1}{2} = e^{\alpha_1}, \qquad \alpha_1 = \frac{u + v + \sin \sigma_1 (u - v)}{\cos \sigma_1}$$

entspricht, so erhalten wir infolge von (35) ihre erzeugende Bäcklund'sche Transformierte mit constantem σ mittels der Gleichung:

(40)
$$\operatorname{tang} \frac{\Omega}{2} = \frac{\cos \frac{\sigma_1 + \sigma}{2}}{\sin \frac{\sigma_1 - \sigma}{2}} \, \frac{e^{\alpha_1} - e^{\alpha}}{1 + e^{\alpha_1 + \alpha}},$$

wenn $\alpha = \frac{u + v + \sin \sigma (u - v)}{\cos \sigma}$ ist. In dem besonderen Falle: $\sigma = \sigma_1$ müssen wir dagegen Gleichung (35*) benutzen, aus der sich

(40*)
$$\operatorname{tang} \frac{\Omega}{2} = \frac{u - v + \sin \sigma_1 (u + v) + C'}{\cos \sigma_1 \cosh \alpha_1}$$

ergiebt.

§ 263. Complementärfläche der Pseudosphäre.

Wir wollen nun die Complementärfläche der Pseudosphäre, die dem Werte $\sigma_1 = 0$ in der letzten Gleichung entspricht, näher untersuchen. Da der Wert von C' ohne Einfluss auf die Gestalt der Fläche ist, können wir ohne weiteres C' gleich Null setzen. Dann ist:

$$\operatorname{tang} \frac{\Omega}{2} = \frac{u - v}{\cosh (u + v)} = \frac{V}{\cosh U},$$

$$\sin \Omega = \frac{2 V \cosh U}{\cosh^2 U + V^2}, \qquad \cos \Omega = \frac{\cosh^2 U - V^2}{\cosh^2 U + V^2}.$$

Geometrisch leuchtet ein, dass die Schar der geodätischen Linien der Pseudosphäre, bezüglich deren die Complementärfläche construiert

ist, aus den geodätischen Linien besteht, die einem Meridian in der von der Asymptote abgewandten Richtung parallel sind.

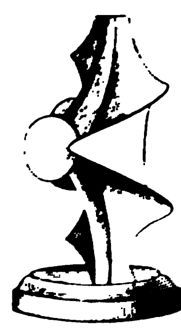


Fig. 16. Complementärfläche der Pseudosphäre *).

Die Anwendung der Gleichungen der voraufgehenden Paragraphen ergiebt als Parameterdarstellung dieser Fläche:

$$x = \frac{2\cosh U}{\cosh^2 U + V^2}(V\cos V - \sin V),$$

$$y = \frac{2\cosh U}{\cosh^2 U + V^2}(V\sin V + \cos V),$$

$$z = U - \frac{2\sinh U\cosh U}{\cosh^2 U + V^2}.$$

Da

$$(V\sin V + \cos V)x - (V\cos V - \sin V)y = 0$$

ist, so ist klar, dass die Krümmungslinien $V = \text{Const.}$ in Ebenen durch die z-Axe liegen. Da sich ferner bei der Drehung dieser Fläche um die Axe die ∞^1 pseudosphärischen Flächen des aus der Pseudosphäre ableitbaren Cykelsystems ergeben, so folgt, dass die Krümmungslinien $U = \text{Const.}$ auf Kugeln liegen, die die Fläche orthogonal schneiden und deren Mittelpunkte die Axe erfüllen.

Berücksichtigen wir, dass die Hauptkrümmungsradien

$$r_2 = \operatorname{cotg}\Omega = \frac{\cosh^2 U - V^2}{2V\cosh U}, \quad -r_1 = \operatorname{tang}\Omega = \frac{2V\cosh U}{\cosh^2 U - V^2}$$

sind, so sehen wir, dass die Fläche die beiden singulären Curven:

$$V = 0, \quad V = \cosh U$$

als Rückkehrkanten besitzt. Erstere ist eine ebene Curve, die sich aus der Meridiantractrix der Pseudosphäre in der Weise ergiebt, dass auf der Tangente vom Berührungspunkt nach der der Asymptote abgewandten Richtung die Längeneinheit abgetragen wird; dann ist der Ort der Endpunkte eben diese Curve. Die zweite Rückkehrkante ist eine Raumcurve.

Ohne die Rechnungen durchzuführen, die sich nach den Ergebnissen des Vertauschbarkeitssatzes lediglich durch Differentiationen erledigen lassen, geben wir endlich noch an, dass das Quadrat des Linienelements der Fläche durch

$$ds^2 = \left(\frac{\cosh^2 U - V^2}{\cosh^2 U + V^2}\right)^2 du^2 + \frac{4V^2\cosh^2 U}{(\cosh^2 U + V^2)^2}\, dV^2$$

*) Diese, wie auch die vorige Abbildung, sind dem Modellverzeichnis von L. Brill in Darmstadt entnommen.

gegeben ist. Es geht in die typische Form:

$$ds^2 = d\alpha^2 + e^{2\alpha} d\beta^2$$

über, wenn

$$\alpha = \log \frac{\cosh U}{\cosh^2 U + V^2}, \quad \beta = U - V^2 \operatorname{tangh} U$$

gesetzt wird.

Die hier betrachtete Fläche ist nur ein besonderer Fall der Enneper'schen pseudosphärischen Flächen mit einer Schar ebener Krümmungslinien, bei denen elliptische Functionen auftreten. Zu dieser Klasse gehören auch die Complementärflächen der pseudosphärischen Rotationsflächen vom elliptischen und hyperbolischen Typus. Bei allen Enneper'schen Flächen mit negativem oder positivem constantem Krümmungs mass gehen die Ebenen der Krümmungslinien des einen Systems durch eine feste Gerade (die Flächenaxe), während die Krümmungslinien des zweiten Systems auf Kugeln liegen, die die Fläche orthogonal schneiden und deren Mittelpunkte die Axe erfüllen.

§ 264. Flächen mit positivem constantem Krümmungsmass.

Wir wollen nun einen kurzen Überblick über die Flächen mit positivem constantem Krümmungsmass geben, deren Theorie bis jetzt sehr wenig entwickelt ist. Insbesondere ist für diese Flächen keine Transformation bekannt, die der Bäcklund'schen Transformation der pseudosphärischen Flächen analog wäre. Die bekannten Flächen dieser Klasse beschränken sich auf die Rotations-, Schrauben- und Enneper'schen Flächen.

Wir suchen zunächst den Ausdruck für das Quadrat des Linienelements der Fläche mit dem Krümmungsmass $K = +1$, bezogen auf die Krümmungslinien u, v:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2.$$

Indem wir hierzu die allgemeinen Ergebnisse des Kapitels IX verwerten, bemerken wir, dass, da

$$r_1 r_2 = 1$$

ist, wir also, wenn wir $r_1 > 1$, $r_2 < 1$ voraussetzen und mit ϑ eine Hilfsfunction von u, v bezeichnen,

$$r_1 = \operatorname{cotgh} \vartheta, \quad r_2 = \operatorname{tangh} \vartheta$$

setzen können. Die Fundamentalgleichungen (1), § 123, S. 234, geben uns dann:

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \log \sinh \vartheta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial \log \cosh \vartheta}{\partial u}$$

und zeigen, dass bei Einführung geeigneter neuer Parameter u, v

$$\sqrt{E} = \sinh\vartheta, \quad \sqrt{G} = \cosh\vartheta$$

gesetzt werden kann. Aus der Gleichung (2) desselben Paragraphen, S. 235, ergiebt sich dann als charakteristische Gleichung:

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = -\sinh\vartheta\cosh\vartheta.$$

Während das Quadrat des Linienelements der Fläche die Form:

$$ds^2 = \sinh^2\vartheta du^2 + \cosh^2\vartheta dv^2$$

hat, ist das der Bildkugel durch

$$ds'^2 = \cosh^2\vartheta du^2 + \sinh^2\vartheta dv^2$$

gegeben.

Andrerseits wird für denselben Wert von ϑ den angeführten Grundgleichungen auch Genüge geleistet, wenn

$$\sqrt{E} = \cosh\vartheta, \quad \sqrt{G} = \sinh\vartheta,$$

$$r_1 = \operatorname{tangh}\vartheta, \quad r_2 = \operatorname{cotgh}\vartheta$$

gesetzt wird, wodurch das Linienelement der Fläche und dasjenige der Bildkugel vertauscht werden. Wir können also den Satz aussprechen:

Die Bestimmung der Flächen mit positivem constantem Krümmungsmass $K = +1$ hängt von der partiellen Differentialgleichung:

$$(41) \qquad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = -\sinh\vartheta\cosh\vartheta$$

ab. Jeder Lösung ϑ dieser Gleichung entsprechen zwei verschiedene Flächen S und S' mit dem Krümmungsmass $K = +1$ (sie mögen als conjugiert bezeichnet werden), für welche die Quadrate der Linienelemente, bezogen auf die Krümmungslinien u, v, durch die Ausdrücke:

$$ds^2 = \sinh^2 du^2 + \cosh^2 dv^2,$$

$$ds'^2 = \cosh^2 du^2 + \sinh^2 dv^2$$

gegeben sind, während die Hauptkrümmungsradien die Werte:

$$r_1 = \operatorname{cotgh}\vartheta, \quad r_2 = \operatorname{tangh}\vartheta,$$

$$r_1' = \operatorname{tangh}\vartheta, \quad r_2' = \operatorname{cotgh}\vartheta$$

haben. Das Linienelement der einen ist gleich demjenigen der Bildkugel der anderen.

Sowohl S als auch S' sind auf die Bildkugel (vom Radius Eins) abwickelbar, und die Abwickelung kann in der Weise vorgenommen werden, dass die Krümmungslinien von S auf die sphärischen Bilder der Krümmungslinien von S' zu liegen kommen und umgekehrt.

Da sich die geodätischen Linien auf S mit den grössten Kreisen auf der Kugel decken und jeder der letzteren das Bild der Curve ist, längs deren ein der Fläche S' umbeschriebener Cylinder die Curve berührt, so sehen wir, dass den geodätischen Linien von S auf der conjugierten Fläche S' die Schattencurven entsprechen.

Diese (involutorische) Transformation der Flächen mit positivem constantem Krümmungsmass ist von Hazzidakis angegeben worden*).

§ 265. Zusammenhang mit Flächen constanter mittlerer Krümmung.

Eine einfache Angabe von Bonnet verknüpft die Flächen positiven constanten Krümmungsmasses mit denjenigen constanter mittlerer Krümmung, nämlich der Satz:

Die beiden Flächen, die einer Fläche S mit dem Krümmungsmass $K = +1$ parallel und von ihr um die positive bez. negative Längeneinheit entfernt sind, besitzen die constante mittlere Krümmung $H = \pm 1$.

Sind nämlich r_1, r_2 die Hauptkrümmungsradien von S, sodass

$$r_1 r_2 = 1$$

ist, und betrachten wir eine Fläche Σ, die zu S parallel und von ihr um l entfernt ist, so sind

$$\varrho_1 = r_1 + l, \quad \varrho_2 = r_2 + l$$

die Hauptkrümmungsradien von Σ. Demnach ist:

$$(\varrho_1 - l)(\varrho_2 - l) = 1.$$

Wird l gleich ± 1 gesetzt, so folgt:

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \pm 1.$$

Umgekehrt besitzt eine Fläche mit der constanten mittleren Krümmung ± 1 zwei Parallelflächen mit der Totalkrümmung $+1$ im Abstande ± 1.

Aus dem Satze des vorigen Paragraphen folgern wir sofort den nachstehenden:

Das Quadrat des Linienelements jeder Fläche mit der constanten mittleren Krümmung ± 1, bezogen auf die Krümmungslinien u, v, nimmt die Form:

$$ds^2 = e^{\pm 2\vartheta}(du^2 + dv^2) \tag{42}$$

an, wo ϑ eine Function von u und v ist, die der Gleichung (41) genügt. Umgekehrt: Ist ϑ eine Lösung von (41), so ent-

*) Crelles Journal, 88. Bd.

sprechen ihr zwei Paar Parallelflächen mit der constanten mittleren Krümmung ± 1. Die Hauptkrümmungsradien des ersten Paares haben dann die Werte:

$$r_1 = \frac{e^{\pm\vartheta}}{\sinh\vartheta}, \quad r_2 = \frac{\pm e^{\pm\vartheta}}{\cosh\vartheta}, \tag{43}$$

während sich für das zweite Paar r_1 und r_2 mit einander vertauschen.

Daraus folgt insbesondere: Die Krümmungslinien auf den Flächen constanter mittlerer Krümmung bilden ein Isothermensystem.

Wir bemerken ferner, dass jede Fläche des einen der beiden Paare auf eine des anderen Paares so abwickelbar ist, dass die Krümmungslinien einander entsprechen, während sich die Hauptkrümmungsradien mit einander vertauschen. . Die Gleichungen (1), § 123, S. 234:

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial v} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial u} = 0$$

beweisen, dass nur die Flächen constanter mittlerer Krümmung Verbiegungen von dieser Art gestatten. Denn giebt es eine solche Verbiegung, so bestehen neben den obigen Gleichungen auch die folgenden:

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v} + \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial v} = 0,$$

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial \frac{1}{r_2}}{\partial u} = 0,$$

die von den vorhergehenden entsprechend subtrahiert

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = 0$$

ergeben.

§ 266. Verbiegungen von Flächen constanter mittlerer Krümmung.

Für die Flächen mit positivem constantem Krümmungsmass giebt es eine Transformation, die der Lie'schen für die pseudosphärischen Flächen analog ist. Wir erhalten sie, wenn wir beachten, dass, wenn $\vartheta(u, v)$ eine Lösung der Gleichung (41) ist, die Function:

$$\Theta(u, v) = \vartheta(u\cos\sigma - v\sin\sigma,\ u\sin\sigma + v\cos\sigma)$$

wieder eine Lösung von (41) ist, welcher Wert auch der Constanten σ erteilt werden mag.

Die geometrische Bedeutung dieser Transformation ergiebt sich am einfachsten, wenn wir sie statt zu den Flächen mit positivem constantem Krümmungsmass zu deren Parallelflächen mit constanter mittlerer Krümmung in Beziehung setzen. Transformieren wir nämlich das Linienelement (42) mittels der Gleichungen:

$$u = u_1 \cos\sigma - v_1 \sin\sigma, \quad v = u_1 \sin\sigma + v_1 \cos\sigma$$

und bezeichnen wir mit ϑ_1 die Functionen u_1, v_1, in welche $\vartheta(u, v)$ hierbei übergeht, so ist das transformierte Linienelement

$$ds = e^{\pm\vartheta_1} \sqrt{du_1^2 + dv_1^2},$$

da ϑ_1 der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2\vartheta_1}{\partial v_1^2} = -\sinh\vartheta_1 \cosh\vartheta_1$$

genügt, nach dem Satze des vorigen Paragraphen das einer Fläche mit der constanten mittleren Krümmung ± 1, deren Krümmungslinien die Curven $u_1 =$ Const., $v_1 =$ Const. sind. Die neue Fläche ist offenbar auf die alte abwickelbar. Da ihre Punkte einander durch die Gleichungen (44) zugeordnet werden, können wir folgenden Satz aussprechen:

Jede Fläche constanter mittlerer Krümmung kann ohne Änderung dieser Krümmung so verbogen werden, dass die neuen Krümmungslinien die unter einem beliebigen constanten Winkel schneidenden Trajectorien der alten sind.

Es ist klar, dass bei diesen Verbiegungen, die denen der Minimalflächen (§ 194, Kap. XIV) ganz analog sind, die einzelnen Hauptkrümmungsradien ungeändert bleiben. Bonnet, von dem die Entdeckung dieser merkwürdigen Verbiegungen herrührt, hat bewiesen, dass es mit Ausnahme einer Klasse von *W*-Flächen, die auf Rotationsflächen abwickelbar sind, keine anderen Flächen giebt, die Verbiegungen unterworfen werden können, bei denen die einzelnen Hauptkrümmungsradien ungeändert bleiben *).

*) Journal de l'Ecole Polytechnique, 42. Heft.

Kapitel XVIII.

Allgemeine Sätze über dreifache orthogonale Flächensysteme.

Krummlinige Coordinaten im Raume. — Der Darboux-Dupin'sche Satz über dreifache Orthogonalsysteme und Folgerungen daraus. — Ausdruck für das Quadrat des Linienelements des Raumes: $ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2$. — Lamé'sche Gleichungen für H_1, H_2, H_3 und Bestimmung des zugehörigen dreifachen Orthogonalsystems. — Liouvilles Satz von den conformen Abbildungen des Raumes. — Hauptkrümmungsradien der Flächen eines dreifachen Systems. — Krümmung und Torsion der Parameterlinien. — Äquidistanzcurven. — Cayley'sche Gleichung. — Combescure'sche Transformation.

---

§ 267. Krummlinige Coordinaten im Raume.

Wie wir uns zur Bestimmung der Lage eines Punktes auf einer gegebenen Fläche auf dieser zwei Scharen von Curven u, v derart gezogen gedacht hatten, dass durch jeden Punkt der Fläche (oder eines passenden Stückes der Fläche) *eine* Curve jeder Schar geht, ebenso können wir auch die Lage eines Punktes im Raume mit Hilfe dreier einander schneidender Flächen bestimmen, von denen jede innerhalb einer einfach unendlichen Schar variiert. Wir brauchen uns hierzu nur den Raum (oder ein Gebiet desselben) von drei Scharen von ∞^1 Flächen derart durchfurcht zu denken, dass durch jeden Raumpunkt eine einzige Fläche jeder der drei Scharen hindurchgeht. Ordnen wir dann jede Fläche einer der drei Scharen eindeutig den Werten eines Parameters ϱ_1 bez. ϱ_2, ϱ_3 zu und kennen wir die Werte der Parameter der drei Flächen, die sich in einem Raumpunkt P durchkreuzen,

$$\varrho_1 = a_1, \quad \varrho_2 = a_2, \quad \varrho_3 = a_3,$$

so ist der Punkt damit bestimmt. Wir nennen a_1, a_2, a_3 die *krummlinigen Coordinaten* von P und die Flächen der drei Scharen:

$$\varrho_1 = \text{Const.}, \quad \varrho_2 = \text{Const.}, \quad \varrho_3 = \text{Const.}$$

die *Parameterflächen*. Sind

$$(1) \qquad \varrho_1(x, y, z) = \varrho_1, \quad \varrho_2(x, y, z) = \varrho_2, \quad \varrho_3(x, y, z) = \varrho_3$$

die Gleichungen der drei Flächenscharen, so erhalten wir durch ihre Auflösung nach x, y, z (wenigstens in dem betrachteten Raumgebiet muss die Auflösung möglich sein):

$$(2) \qquad x = x(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3), \quad y = y(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3), \quad z = z(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3).$$

Die Gleichungen (1) dienen zur Berechnung der krummlinigen Coordinaten eines Punktes, wenn seine Cartesischen Coordinaten bekannt sind, die Gleichungen (2) im umgekehrten Falle. Es ist klar, dass zur Einführung eines Systems krummliniger Coordinaten nur die Veränderlichen x, y, z gleich drei von einander unabhängigen Functionen dreier neuer Veränderlichen ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gesetzt zu werden brauchen.

Eine Gleichung zwischen den krummlinigen Coordinaten eines Punktes:

$$(3) \qquad F(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) = 0$$

stellt offenbar eine Fläche dar, deren gewöhnliche Gleichung sich ergiebt, wenn in (3) für ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ihre Werte (1) in x, y, z eingesetzt werden. Zwei Gleichungen von der Form (3) stellen eine Curve dar. Übrigens ist es öfters zweckmässig, eine Curve analytisch in der Weise zu definieren, dass die krummlinigen Coordinaten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 eines beweglichen Punktes der Curve gleich drei Functionen eines und desselben Parameters t gesetzt werden. Denken wir uns eine Curve in dieser Weise definiert und bezeichnen wir ihr Linienelement mit ds, so folgt:

$$\begin{aligned} ds^2 = &\left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} d\varrho_1 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} d\varrho_2 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_3} d\varrho_3\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho_1} d\varrho_1 + \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} d\varrho_2 + \frac{\partial y}{\partial \varrho_3} d\varrho_3\right)^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho_1} d\varrho_1 + \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} d\varrho_2 + \frac{\partial z}{\partial \varrho_3} d\varrho_3\right)^2. \end{aligned}$$

Setzen wir:

$$H_1^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_1}\right)^2, \quad H_2^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_2}\right)^2, \quad H_3^2 = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_3}\right)^2,$$

$$h_{12} = \sum \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} \frac{\partial x}{\partial \varrho_2}, \quad h_{13} = \sum \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} \frac{\partial x}{\partial \varrho_3}, \quad h_{23} = \sum \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} \frac{\partial x}{\partial \varrho_3},$$

so erhalten wir:

$$(4) \qquad \begin{aligned} ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2 + 2h_{12}\, d\varrho_1 d\varrho_2 + \\ + 2h_{13}\, d\varrho_1 d\varrho_3 + 2h_{23}\, d\varrho_2 d\varrho_3. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen diesen Ausdruck als das Quadrat des Linienelements des Raumes. Dieser Ausdruck ist nichts anderes als die mittels der Substitution (2) transformierte quadratische Differentialform:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Wir nehmen nun an, dass jede Fläche einer der drei Scharen alle Flächen der anderen beiden Scharen orthogonal schneide. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür sind die Gleichungen:

$$h_{12} = 0, \quad h_{13} = 0, \quad h_{23} = 0.$$

In diesem Falle wird die dreifache Flächenschar $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_2$ ein dreifaches Orthogonalsystem genannt.

Wir haben somit das Ergebnis: Das Quadrat des Linienelements des Raumes nimmt in einem dreifachen Orthogonalsystem die Form:

$$ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2$$

an.

§ 268. Darboux-Dupin'scher Satz.

Wir gehen nun zur Untersuchung der dreifachen Orthogonalsysteme über und leiten zunächst den grundlegenden Satz von Dupin ab, der von Darboux erweitert worden ist*).

Wir nehmen an, dass zwei Flächenscharen:

$$\varrho_1(x, y, z) = \varrho_1, \quad \varrho_2(x, y, z) = \varrho_2$$

orthogonal zu einander seien, und sehen zu, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit es eine dritte Schar:

$$\varrho_3(x, y, z) = \varrho_3$$

gebe, die zu beiden orthogonal ist. Infolge der getroffenen Voraussetzung ist:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z} = 0, \tag{5}$$

und im Falle des Vorhandenseins der dritten Schar muss die unbekannte Function $\varrho_3(x, y, z)$ den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z} = 0$$

genügen, d. h. es muss die Proportion bestehen:

---

*) Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3. Bd., 1866. — Die Ausführungen im vorliegenden und im folgenden Paragraphen sind ohne Änderung der Darboux'schen Abhandlung (S. 110 ff.) entnommen.

$$\frac{\partial \varrho_3}{\partial x} : \frac{\partial \varrho_3}{\partial y} : \frac{\partial \varrho_3}{\partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Es ist demnach notwendig und hinreichend, dass für die totale Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \end{vmatrix} dy + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \end{vmatrix} dz = 0$$

die Integrabilitätsbedingung:

$$(6) \qquad \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial y} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \end{vmatrix} \right\} = 0,$$

wo sich die beiden anderen Glieder hinter dem Summenzeichen aus dem angegebenen durch cyklische Vertauschung von x, y, z ergeben, erfüllt sei.

Addieren wir zur linken Seite von (6) die Summe:

$$\sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \sum \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \sum \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x^2} \right),$$

die identisch gleich Null ist, so geht (6) über in:

$$(6^*) \qquad \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial z} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x \partial z} \right) = 0.$$

Aus (5) folgt aber durch Differentiation nach x:

$$\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x \partial z} \right) =$$
$$= - \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial z} \right).$$

Also ist die Integrabilitätsbedingung (6*) äquivalent der Gleichung:

$$(7) \qquad \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial z} \right) = 0.$$

Wir nehmen nun an, dass jede Fläche einer der drei Scharen alle Flächen der anderen beiden Scharen orthogonal schneide. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür sind die Gleichungen:

$$h_{12} = 0, \quad h_{13} = 0, \quad h_{23} = 0.$$

In diesem Falle wird die dreifache Flächenschar $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_2$ ein dreifaches Orthogonalsystem genannt.

Wir haben somit das Ergebnis: Das Quadrat des Linienelements des Raumes nimmt in einem dreifachen Orthogonalsystem die Form:

$$ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2$$

an.

§ 268. Darboux-Dupin'scher Satz.

Wir gehen nun zur Untersuchung der dreifachen Orthogonalsysteme über und leiten zunächst den grundlegenden Satz von Dupin ab, der von Darboux erweitert worden ist*).

Wir nehmen an, dass zwei Flächenscharen:

$$\varrho_1(x, y, z) = \varrho_1, \quad \varrho_2(x, y, z) = \varrho_2$$

orthogonal zu einander seien, und sehen zu, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit es eine dritte Schar:

$$\varrho_3(x, y, z) = \varrho_3$$

gebe, die zu beiden orthogonal ist. Infolge der getroffenen Voraussetzung ist:

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial \varrho_1}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z} = 0,$$

und im Falle des Vorhandenseins der dritten Schar muss die unbekannte Function $\varrho_3(x, y, z)$ den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\frac{\partial \varrho_1}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\frac{\partial \varrho_1}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \varrho_3}{\partial x}\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} + \frac{\partial \varrho_3}{\partial y}\frac{\partial \varrho_2}{\partial y} + \frac{\partial \varrho_3}{\partial z}\frac{\partial \varrho_2}{\partial z} = 0$$

genügen, d. h. es muss die Proportion bestehen:

---

*) Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 3. Bd., 1866. — Die Ausführungen im vorliegenden und im folgenden Paragraphen sind ohne Änderung der Darboux'schen Abhandlung (S. 110 ff.) entnommen.

$$\frac{\partial \varrho_3}{\partial x} : \frac{\partial \varrho_3}{\partial y} : \frac{\partial \varrho_3}{\partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Es ist demnach notwendig und hinreichend, dass für die totale Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} dx + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \end{vmatrix} dy + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \end{vmatrix} dz = 0$$

die Integrabilitätsbedingung:

$$(6) \qquad \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial y} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \end{vmatrix} \right\} = 0,$$

wo sich die beiden anderen Glieder hinter dem Summenzeichen aus dem angegebenen durch cyklische Vertauschung von x, y, z ergeben, erfüllt sei.

Addieren wir zur linken Seite von (6) die Summe:

$$\sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \sum \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \sum \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x^2} \right),$$

die identisch gleich Null ist, so geht (6) über in:

$$(6^*) \qquad \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial z} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x \partial z} \right) = 0.$$

Aus (5) folgt aber durch Differentiation nach x:

$$\left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x^2} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x \partial z} \right) =$$
$$= - \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial z} \right).$$

Also ist die Integrabilitätsbedingung (6*) äquivalent der Gleichung:

$$(7) \qquad \sum \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial x \partial z} \right) = 0.$$

Diese Gleichung können wir nun folgendermassen geometrisch deuten: Wandern wir längs der Schnittcurve zweier Flächen der Scharen (ϱ_1), (ϱ_2):

$$\varrho_1(x, y, z) = \varrho_1, \quad \varrho_2(x, y, z) = \varrho_2$$

und bezeichnen wir mit dem Symbol δ die dieser Wanderung entsprechenden Differentiale, so haben wir:

$$\delta x : \delta y : \delta z = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} & \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Demnach geht (7) über in:

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \delta \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \delta \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial y}\right) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \delta \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial z}\right) = 0.$$

Bedeuten aber X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale der Fläche:

$$\varrho_2(x, y, z) = \varrho_2,$$

so ist:

$$X : Y : Z = \frac{\partial \varrho_2}{\partial x} : \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} : \frac{\partial \varrho_2}{\partial z},$$

und die vorhergehende Gleichung lautet wegen (5):

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \delta X + \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} \delta Y + \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} \delta Z = 0.$$

Andrerseits ist identisch:

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial x} \delta X + \frac{\partial \varrho_2}{\partial y} \delta Y + \frac{\partial \varrho_2}{\partial z} \delta Z = 0,$$

folglich ist die Integrabilitätsbedingung äquivalent der Proportion:

$$\delta x : \delta y : \delta z = \delta X : \delta Y : \delta Z.$$

Dieselbe besagt nun aber (§ 51, S. 98), dass die Schnittcurve zweier Flächen ϱ_1, ϱ_2 eine Krümmungslinie für die zweite, also auch für die erste Fläche ist.

Wir haben somit den Satz von Darboux:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei zu einander orthogonalen Flächenscharen eine dritte zugeordnet werden kann, die zu beiden orthogonal ist, besteht darin, dass jede Fläche der ersten und jede Fläche der zweiten Schar einander in Krümmungslinien schneiden müssen.

Hierin ist der berühmte ältere Satz von Dupin enthalten:

In jedem dreifachen Orthogonalsystem ist die Schnittcurve zweier nicht derselben Schar angehöriger Flächen eine Krümmungslinie für beide.

§ 269. Folgerungen aus dem Darboux-Dupin'schen Satze.

Aus den vorstehenden Sätzen ergiebt sich, dass eine willkürlich gewählte Schar von ∞^1 Flächen:

$$\varrho_1(x, y, z) = \varrho_1$$

im allgemeinen keinem dreifachen Orthogonalsystem angehört. Diese Schar von ∞^1 Flächen bestimmt nämlich eindeutig die Schar von ∞^2 Curven, die alle Flächen orthogonal schneiden*). Gehörte nun die Schar: $\varrho_1(x, y, z) = \varrho_1$ einem dreifachen Orthogonalsystem an und betrachten wir auf einer Fläche ϱ_1 eine Krümmungslinie L, so bildeten alle diejenigen Orthogonaltrajectorien der Schar, welche von den Punkten von L ausgehen, eine Fläche, die alle übrigen Flächen der Schar in Krümmungslinien schneiden müsste.

Es ist sehr bemerkenswert, dass diese geometrische Bedingung, der die Schar: $\varrho_1(x, y, z) = \varrho_1$ genügen muss, sich durch eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung für die Function ϱ_1 ausdrücken lässt. Zu diesem wichtigen Ergebnis, das in der hier gegebenen Fassung von Darboux herrührt**), gelangen wir auf folgende Weise:

Wir betrachten die Krümmungslinien einer und derselben Schar auf allen Flächen $\varrho_1 = \text{Const.}$ Zu dieser Schar von ∞^2 Curven muss es eine Schar von ∞^1 Orthogonalflächen geben, und umgekehrt: Ist dieses der Fall, so gehört die Schar $\varrho_1 = \text{Const.}$ einem dreifachen Orthogonalsystem an (§ 268). Bedeuten also X_1, Y_1, Z_1 die Richtungscosinus der Tangenten dieser Curven, so muss die totale Differentialgleichung (§ 179, S. 330, (4)):

$$X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz = 0$$

integrierbar sein, d. h. es besteht mit Notwendigkeit die Identität:

$$X_1\left(\frac{\partial Y_1}{\partial z} - \frac{\partial Z_1}{\partial y}\right) + Y_1\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} - \frac{\partial X_1}{\partial z}\right) + Z_1\left(\frac{\partial X_1}{\partial y} - \frac{\partial Y_1}{\partial x}\right) = 0. \tag{8}$$

Aus den Fundamentalgleichungen der Flächentheorie (Kap. IV) ergiebt sich aber, dass sich X_1, Y_1, Z_1 durch die ersten und zweiten Differen-

---

*) Diese Curven ergeben sich durch Integration des Systems simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{dx}{\frac{\partial \varrho_1}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial \varrho_1}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial \varrho_1}{\partial z}}.$$

**) Zu der Zurückführung der Bestimmung der dreifachen Orthogonalsysteme auf eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung mit drei Veränderlichen war auf einem anderen Wege Bonnet gelangt.

tialquotienten der Function $\varrho_1(x, y, z)$ ausdrücken lassen; es ist demnach (8) für ϱ_1 eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, die wir in § 275 wirklich aufstellen werden. Aus der Integration dieser Gleichung würden sich alle dreifachen Orthogonalsysteme ergeben.

Als unmittelbare Folgerungen aus diesen allgemeinen Ergebnissen führen wir hier einige einfache Fälle von dreifachen Orthogonalsystemen an. Betrachten wir eine beliebige Schar von ∞^1 Ebenen oder Kugeln und ihre Orthogonaltrajectorien und wird auf einer Ausgangskugel oder in einer Ausgangsebene eine beliebige Curve L fest gewählt, so bilden diejenigen Orthogonaltrajectorien, die von den Punkten von L ausgehen, eine Fläche Σ, die von allen Kugeln bez. Ebenen der Schar orthogonal und daher längs Krümmungslinien geschnitten wird. Also:

Jede Schar von ∞^1 Ebenen oder Kugeln gehört unendlich vielen dreifachen Orthogonalsystemen an.

Um eins derselben zu erhalten, brauchen wir nur auf einer Ausgangskugel oder in einer Ausgangsebene zwei Scharen von orthogonalen Curven L und L' beliebig zu ziehen, dann vervollständigen die entsprechenden Flächen Σ und Σ' das dreifache Orthogonalsystem. Nehmen wir speciell als Ebenenschar ein Ebenenbüschel, so sind die Flächen Σ, Σ' Rotationsflächen, deren Drehaxe die Axe des Büschels ist.

Endlich bemerken wir:

Jede Schar von Parallelflächen gehört einem dreifachen Orthogonalsystem an. Die Flächen der beiden anderen Scharen sind die abwickelbaren Ortsflächen der Normalen längs der Krümmungslinien der Parallelflächen.

§ 270. Linienelement des Raumes.

Wir nehmen nun an, es liege ein dreifaches Orthogonalsystem $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ vor, sodass bei Wahl desselben als System krummliniger Coordinaten das Quadrat des Linienelements des Raumes die Form:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2 \tag{9}$$

annimmt. Zur Vermeidung von Doppeldeutigkeiten schicken wir die folgenden Bemerkungen voraus: Die Functionen H_1^2, H_2^2, H_3^2 sind als Quadratsummen stets positiv und höchstens in isolierten Punkten oder längs isolierter Curven gleich Null. Wir wollen nun stets den Änderungsbereich von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 als so abgegrenzt annehmen, dass diese Functionen überall positiv und von Null verschieden sind. Ferner setzen wir sie nebst ihren ersten und zweiten Differentialquotienten als

endlich, stetig und eindeutig voraus und bezeichnen mit H_1, H_2, H_3 die **positiven** Werte ihrer Quadratwurzeln.

Bedeuten ds_1, ds_2, ds_3 die positiven Bogenelemente derjenigen Curven (Krümmungslinien) des dreifachen Orthogonalsystems, längs deren nur ϱ_1 oder ϱ_2 oder ϱ_3 sich ändert, und wird als die positive Richtung diejenige des betreffenden wachsenden Parameters festgesetzt, so ist:

$$ds_1 = H_1 d\varrho_1, \quad ds_2 = H_2 d\varrho_2, \quad ds_3 = H_3 d\varrho_3.$$

Setzen wir ferner:

$$(10) \quad X_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial x}{\partial \varrho_i}, \quad Y_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial y}{\partial \varrho_i}, \quad Z_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial z}{\partial \varrho_i} \quad (i=1,2,3),$$

so sind X_i, Y_i, Z_i die Cosinus der positiven Richtung der Tangente zur Curve ϱ_i, d. h. der Normale der Fläche $\varrho_i = \text{Const.}$

Nehmen wir weiterhin die positiven Richtungen der x-, der y- und der z-Axe als ebenso orientiert wie die Richtungen X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3 an, so haben wir:

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = +1.$$

Damit das Einsetzen der Functionen H_1, H_2, H_3 von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 in der Gleichung (9) das Linienelement des Raumes liefert, müssen diese Functionen, wie zuerst **Lamé** nachgewiesen hat, sechs charakteristischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung genügen. Diese ergeben sich unmittelbar aus der allgemeinen Theorie der quadratischen Differentialformen (Kap. II) dadurch, dass die für die Differentialform: $H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2$ gebildeten Vier-Indices-Symbole erster Art (Kap. II, § 27) gleich Null gesetzt werden. Andrerseits sind, wie wir sogleich sehen werden, diese sechs Bedingungen, denen H_1, H_2, H_3 genügen müssen, auch hinreichend, wenn es ein entsprechendes dreifaches Orthogonalsystem geben soll. Dieses ist auch, abgesehen von Bewegungen im Raume, völlig bestimmt.

Bevor wir zur Ausführung der bezüglichen Rechnungen schreiten, wollen wir noch darauf hinweisen, dass dieselben Überlegungen ohne irgend welche grössere Schwierigkeit auch auf die Frage nach den Orthogonalsystemen bei n Veränderlichen anwendbar sind, wenn die Gleichung:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + \cdots + H_n^2 d\varrho_n^2$$

zu Grunde gelegt wird.

§ 271. Gleichungen von Lamé.

Wir wenden nun die Christoffel'sche Formel (I), § 24, S. 43, auf die Gleichung (9) an. Bezeichnen wir mit $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}'$ die Christoffel'schen Drei-Indices-Symbole für die Form:

$$H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2,$$

so ist offenbar, wenn i, k, l eine Permutation der drei Indices 1, 2, 3 bedeutet, nach § 24, S. 43, Gleichung (17) und (18), unmittelbar:

$$\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}' = 0, \quad \begin{Bmatrix} i\,k \\ k \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} k\,i \\ k \end{Bmatrix}' = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i},$$

$$\begin{Bmatrix} k\,k \\ k \end{Bmatrix}' = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_k}, \quad \begin{Bmatrix} k\,k \\ l \end{Bmatrix}' = -\frac{H_k}{H_l^2}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_l}.$$

Die angeführten Gleichungen (I) lauten somit:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varrho_i \partial \varrho_k} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k}\frac{\partial x}{\partial \varrho_i} + \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i}\frac{\partial x}{\partial \varrho_k},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \varrho_k^2} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_k}\frac{\partial x}{\partial \varrho_k} - \frac{H_k}{H_i^2}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i}\frac{\partial x}{\partial \varrho_i} - \frac{H_k}{H_l^2}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_l}\frac{\partial x}{\partial \varrho_l},$$

und ihnen genügen auch y und z. Führen wir jedoch die Richtungscosinus:

$$X_k = \frac{1}{H_k}\frac{\partial x}{\partial \varrho_k}$$

ein, so lassen sie sich folgendermassen schreiben:

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_k}{\partial \varrho_i} = \dfrac{1}{H_k}\dfrac{\partial H_i}{\partial \varrho_k} X_i, \quad \dfrac{\partial X_k}{\partial \varrho_l} = \dfrac{1}{H_k}\dfrac{\partial H_l}{\partial \varrho_k} X_l, \\[2ex] \dfrac{\partial X_k}{\partial \varrho_k} = -\dfrac{1}{H_i}\dfrac{\partial H_k}{\partial \varrho_i} X_i - \dfrac{1}{H_l}\dfrac{\partial H_k}{\partial \varrho_l} X_l. \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingungen für dieses System lauten:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_l}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k} X_i\right) = \frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_l}{\partial \varrho_k} X_l\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i} X_i\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_l}\left(\frac{1}{H_l}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_l} X_l\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k} X_i\right) = 0.$$

Werden die Differentiationen ausgeführt und für die Differentialquotienten der X ihre Werte aus (11) eingesetzt, so folgen unter Berücksichtigung des Umstandes, dass den so hervorgehenden Relationen auch die Y und Z genügen müssen, für die H die folgenden beiden

nebst den sich aus ihnen durch Permutation der Indices ergebenden Gleichungen:

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial^2 H_l}{\partial \varrho_i \partial \varrho_k} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i}\frac{\partial H_l}{\partial \varrho_k} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k}\frac{\partial H_l}{\partial \varrho_i},$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial}{\partial \varrho_i}\left(\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i}\right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_k}\left(\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k}\right) + \frac{1}{H_l^2}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_l}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_l} = 0.$$

Schreiben wir diese sechs Gleichungen, welche die angeführten Lamé'schen sind, einzeln hin, so erhalten wir das folgende System:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial_2 H_1}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_2} + \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}, \\ \dfrac{\partial^2 H_2}{\partial \varrho_3 \partial \varrho_1} = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_3} + \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}, \\ \dfrac{\partial^2 H_3}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} + \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}; \end{cases}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}\right) + \dfrac{1}{H_3^2}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_3} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_3}\right) + \dfrac{1}{H_1^2}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial \varrho_3}\left(\dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}\right) + \dfrac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_1}\right) + \dfrac{1}{H_2^2}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_2} = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind, wie bemerkt, nichts anderes, als die Gleichungen:

$$(ik,\ rs)' = 0$$

ausführlich geschrieben.

§ 272. Beweis, dass aus dem Bestehen der Lamé'schen Gleichungen die Existenz eines Orthogonalsystems folgt.

Die Lamé'schen Gleichungen (A) und (B), denen die H genügen müssen und die wir soeben als notwendig erkannt haben, sind für das Vorhandensein des entsprechenden dreifachen Orthogonalsystems auch hinreichend. Um dieses zu beweisen, bemerken wir, dass sich, wenn die H als gegeben vorausgesetzt werden, aus den Gleichungen (11) für die Terne von unbekannten Functionen: X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3; Z_1, Z_2, Z_3 das folgende System totaler homogener linearer Differentialgleichungen ergiebt:

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} d\xi_1 + \left(\dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}\xi_2 + \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}\xi_3\right) d\varrho_1 - \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\xi_2 d\varrho_2 - \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_1}\xi_3 d\varrho_3 = 0, \end{cases}$$

$$
(12)\quad \begin{cases}
d\xi_2 - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}\xi_1 d\varrho_1 + \left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_3}\xi_3 + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\xi_1\right) d\varrho_2 - \\
\qquad\qquad - \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}\xi_3 d\varrho_3 = 0, \\
d\xi_3 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}\xi_1 d\varrho_1 - \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_3}\xi_2 d\varrho_2 + \\
\qquad\qquad + \left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1}\xi_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}\xi_2\right) d\varrho_3 = 0.
\end{cases}
$$

Diesen Gleichungen genügen nämlich, wenn das gesuchte System existiert, die Werte:

$$
\begin{aligned}
\xi_1 &= X_1, & \xi_2 &= X_2, & \xi_3 &= X_3, \\
\xi_1 &= Y_1, & \xi_2 &= Y_2, & \xi_3 &= Y_3, \\
\xi_1 &= Z_1, & \xi_2 &= Z_2, & \xi_3 &= Z_3.
\end{aligned}
$$

Werden nun die Lamé'schen Gleichungen (A) und (B) als erfüllt vorausgesetzt, so ist das System (12) unbeschränkt integrierbar, da die Bedingungen hierfür genau die Gleichungen (A) und (B) sind. Aus der Form dieser Gleichungen (12) geht sofort hervor, dass, wenn ξ_1, ξ_2, ξ_3; η_1, η_2, η_3 zwei verschiedene oder übereinstimmende Lösungssysteme sind, die Identität:

$$d(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3) = 0$$

besteht, d. h.:

$$\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = \text{Const.}$$

ist.

Nach dieser Vorbemerkung erhellt genau ebenso wie in Kap. IV, § 50, dass wir drei Lösungssysteme: X_1, X_2, X_3; Y_1, Y_2, Y_3; Z_1, Z_2, Z_3 finden können, welche die Coefficienten einer orthogonalen Substitution:

$$
\begin{matrix}
X_1, & X_2, & X_3, \\
Y_1, & Y_2, & Y_3, \\
Z_1, & Z_2, & Z_3
\end{matrix}
$$

sind. Dann sind die drei Ausdrücke:

$$\Sigma H_i X_i d\varrho_i, \quad \Sigma H_i Y_i d\varrho_i, \quad \Sigma H_i Z_i d\varrho_i$$

infolge der Gleichungen (12), denen die X, Y und Z genügen, vollständige Differentiale. Setzen wir also:

$$dx = \Sigma H_i X_i d\varrho_i, \quad dy = \Sigma H_i Y_i d\varrho_i, \quad dz = \Sigma H_i Z_i d\varrho_i,$$

so ist in der That:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2.$$

Das gesuchte dreifache Orthogonalsystem ist somit wirklich vorhanden, und der Beweis selbst lässt erkennen (vgl. § 50), dass es bis auf Bewegungen im Raume eindeutig bestimmt ist. Also:

Sind die Lamé'schen Gleichungen erfüllt, so giebt es ein und nur ein entsprechendes dreifaches Orthogonalsystem.

Um dasselbe zu erhalten, müssen wir das System totaler Differentialgleichungen (12), das durch eine einzige Gleichung vom Riccati'schen Typus ersetzt werden kann, integrieren.

§ 273. Conforme Abbildungen des Raumes.

Die Lamé'schen Gleichungen sind von Liouville zur Entscheidung der Frage angewandt worden, ob es möglich ist, den Raum winkeltreu auf sich selbst abzubilden. Liouville ist zu dem wichtigen Satz gelangt:

Die einzig möglichen conformen Abbildungen des Raumes auf sich selbst sind die Ähnlichkeitstransformationen und die Transformationen mittels reciproker Radienvectoren in Verbindung mit Verschiebungen.

Zum Beweise nehmen wir x, y, z als die Coordinaten eines beliebigen Punktes des Raumes (oder Raumgebiets) und ξ, η, ζ als die Coordinaten des bei der vorausgesetzten conformen Abbildung entsprechenden Punktes an, sodass ξ, η, ζ bestimmte Functionen von x, y, z sind. Soll die Abbildung winkeltreu sein, so muss das Verhältnis:

$$\frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

von den Zunahmen dx, dy, dz unabhängig, d. h.:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{1}{\lambda^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

sein, wo λ eine Function von x, y und z ist. Wird nun in den Lamé'schen Gleichungen (A) und (B)

$$x = \varrho_1, \quad y = \varrho_2, \quad z = \varrho_3, \quad H_1 = H_2 = H_3 = \frac{1}{\lambda}$$

gesetzt, so ergeben sich die folgenden:

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$(\beta) \quad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = \frac{1}{\lambda}\left[\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2\right].$$

Nun ergiebt sich aus (α):

$$\lambda = X + Y + Z,$$

wo X nur von x, Y nur von y, Z nur von z abhängt. Setzen wir dieses in den Gleichungen (β) ein, so erhalten wir:

$$(\gamma) \qquad X'' = Y'' = Z'' = \frac{X'^2 + Y'^2 + Z'^2}{2(X + Y + Z)} = \text{Const.} = k.$$

Ist $k = 0$, so folgt hieraus:

$$\lambda = \text{Const.},$$

es ist demnach die entsprechende Transformation einfach eine Ähnlichkeitstransformation. Entgegengesetztenfalls setzen wir $k = \frac{2}{c}$ und erhalten durch Integration:

$$X = \frac{1}{c}\left[(x - a)^2 + b\right],$$

$$Y = \frac{1}{c}\left[(y - a_1)^2 + b_1\right],$$

$$Z = \frac{1}{c}\left[(z - a_2)^2 + b_2\right],$$

wo $a, b;\ a_1, b_1;\ a_2, b_2$ neue Constanten sind. Da aber infolge von (γ)

$$[(x - a)^2 + (y - a_1)^2 + (z - a_2)^2 + b + b_1 + b_2] = \\ = (x - a)^2 + (y - a_1)^2 + (z - a_2)^2$$

sein muss, so folgt daraus:

$$b + b_1 + b_2 = 0.$$

Indem wir nun mit der vom Punkte (x, y, z) beschriebenen Figur eine geeignete Translation vornehmen, können wir demnach λ einfach gleich $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{c}$ machen, d. h. es ist:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{c^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Dieser Gleichung genügen die Werte:

$$\xi = \frac{cx}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = \frac{cy}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \zeta = \frac{cz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

und dieses sind genau die Gleichungen für die Transformation mittels reciproker Radienvectoren bezüglich der Kugel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2.$$

Der Liouville'sche Satz ist somit bewiesen*).

Es mag bemerkt werden, dass die Transformation mittels reciproker Radienvectoren ein dreifaches Orthogonalsystem wieder in ein solches überführt. Hieraus ergiebt sich im Falle einer Schar paralleler Flächen wieder der in § 58 bewiesene Satz, dass bei der Transformation mittels reciproker Radienvectoren die Krümmungslinien wieder in Krümmungslinien übergehen.

*) Einen geometrischen Beweis hat Capelli gegeben (Annali di Matematica, 2. Serie, 14. Bd.).

§ 274. Hauptkrümmungsradien der Parameterflächen.

Wie wir gesehen haben, ist das dreifache Orthogonalsystem der Gestalt nach vollkommen bestimmt, wenn die Functionen H_1, H_2, H_3 bekannt sind. Es müssen sich mithin alle zum System gehörigen Grössen durch H_1, H_2, H_3 und deren Differentialquotienten ausdrücken lassen. Suchen wir nun speciell die Werte für die Hauptkrümmungsradien der Parameterflächen. Es bedeute, wie üblich, ikl eine Permutation der Indices 1, 2, 3 und r_{ik} den Hauptkrümmungsradius der Fläche $\varrho_i =$ Const. längs ihrer Schnittcurve (einer Krümmungslinie) mit der Fläche $\varrho_l =$ Const., d. h. längs der Curve, auf der nur ϱ_k veränderlich ist. Hinsichtlich des Vorzeichens von r_{ik} halten wir an der in Kap. IV, S. 98, getroffenen Abmachung fest. Die Gleichung (11):

$$\frac{\partial X_i}{\partial \varrho_k} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i} X_k = \frac{1}{H_i H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i}\frac{\partial x}{\partial \varrho_k}$$

giebt uns:

$$\frac{1}{r_{ik}} = \frac{1}{H_i H_k}\frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i}.$$

Schreiben wir die sechs dementsprechenden (von Lamé angegebenen) Gleichungen einzeln hin, so erhalten wir:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r_{12}} = \dfrac{1}{H_1 H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}, & \dfrac{1}{r_{23}} = \dfrac{1}{H_2 H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}, & \dfrac{1}{r_{31}} = \dfrac{1}{H_3 H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}, \\ \dfrac{1}{r_{13}} = \dfrac{1}{H_1 H_3}\dfrac{\partial H_3}{\partial \varrho_1}, & \dfrac{1}{r_{21}} = \dfrac{1}{H_2 H_1}\dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}, & \dfrac{1}{r_{32}} = \dfrac{1}{H_3 H_2}\dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_3}. \end{cases}$$

Allgemein wollen wir Parameterlinien ϱ_i die Schnittcurven der Flächen:

$$\varrho_k = \text{Const.}, \quad \varrho_l = \text{Const.}$$

nennen und unter Einführung der Bezeichnungsweise des Kap. I für diese Curven unter α_i, β_i, γ_i; ξ_i, η_i, ζ_i; λ_i, μ_i, ν_i die Richtungscosinus ihrer Tangente, ihrer Haupt-, ihrer Binormale und unter $\frac{1}{R_i}$ und $\frac{1}{T_i}$ ihre erste bez. zweite Krümmung verstehen, wobei die in Kap. I getroffenen Festsetzungen hinsichtlich der Vorzeichen in Kraft bleiben sollen.

Wir haben dann nach § 33, S. 63, unmittelbar:

$$(14)\qquad \cos\alpha_i = X_i, \quad \cos\beta_i = Y_i, \quad \cos\gamma_i = Z_i.$$

Wenn wir diese Gleichungen nach ϱ_i differenzieren, so erhalten wir

unter Berücksichtigung des Umstandes, dass das Bogenelement der Curve ϱ_i:

$$ds_i = H_i d\varrho_i$$

ist, sowie der Frenet'schen Formeln und der Gleichungen (11):

$$(15)\quad \frac{\cos\xi_i}{R_i} = -\frac{X_k}{r_{ki}} - \frac{X_l}{r_{li}},\quad \frac{\cos\eta_i}{R_i} = -\frac{Y_k}{r_{ki}} - \frac{Y_l}{r_{li}},\quad \frac{\cos\zeta_i}{R_i} = -\frac{Z_k}{r_{ki}} - \frac{Z_l}{r_{li}}.$$

Durch Quadrieren und Addieren folgt hieraus:

$$\frac{1}{R_i^2} = \frac{1}{r_{ki}^2} + \frac{1}{r_{li}^2}.$$

Aus den Gleichungen (14) und (15) ergiebt sich ferner:

$$(16)\quad \cos\lambda_i = \pm R_i\frac{X_k}{r_{li}} \mp R_i\frac{X_l}{r_{ki}},\qquad \cos\mu_i = \pm R_i\frac{Y_k}{r_i} \mp R_i\frac{Y_l}{r_{ki}},$$
$$\cos\nu_i = \pm R_i\frac{Z_k}{r_{li}} \mp R_i\frac{Z_l}{r_{ki}},$$

wo die oberen oder die unteren Vorzeichen gelten, je nachdem die Per mutation i, k, l der Indices 1, 2, 3 gerade oder ungerade ist. Nun haben wir infolge der Frenet'schen Formeln:

$$\frac{1}{T_i} = \sum\frac{1}{H_i}\cos\xi_i\frac{\partial\cos\lambda}{\partial\varrho_i},$$

also unter Berücksichtigung der voraufgehenden Gleichungen und (11):

$$\frac{1}{T_i} = \pm\frac{R_i}{H_i}\left[\frac{1}{r_{li}}\frac{\partial}{\partial\varrho_i}\left(\frac{R_i}{r_{ki}}\right) - \frac{1}{r_{ki}}\frac{\partial}{\partial\varrho_i}\left(\frac{R_i}{r_{li}}\right)\right] =$$
$$= \pm\frac{1}{H_i}\frac{\partial}{\partial\varrho_i}\operatorname{arc\,tg}\frac{r_{li}}{r_{ki}}.$$

Nehmen wir, was ohne weiteres erlaubt ist, die Permutation ikl als gerade an und setzen wir:

$$\cos\omega_i = -\frac{R_i}{r_{li}},\quad \sin\omega_i = -\frac{R_i}{r_{ki}},$$

so erhalten wir:

$$\cos\xi_i = \cos\omega_i X_l + \sin\omega_i X_k,\qquad \cos\eta_i = \cos\omega_i Y_l + \sin\omega_i Y_k,$$
$$\cos\zeta_i = \cos\omega_i Z_l + \sin\omega_i Z_k;$$
$$\cos\lambda_i = \sin\omega_i X_l - \cos\omega_i X_k,\qquad \cos\mu_i = \sin\omega_i Y_l - \cos\omega_i Y_k,$$
$$\cos\nu_i = \sin\omega_i Z_l - \cos\omega_i Z_k.$$

Die geometrische Bedeutung des Winkels ω_i ist nach diesen Gleichungen die folgende: er ist der Winkel, den die positive Richtung der Normale der Curve ϱ_i mit der Curve ϱ_l bildet, und es ist:

$$\frac{1}{T_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\omega_i}{\partial\varrho_i}.$$

Im einzelnen haben wir also ausser den Gleichungen (13) noch die folgenden:

$$(17)\qquad \frac{1}{R_1^2}=\frac{1}{r_{21}^2}+\frac{1}{r_{31}^2},\quad \frac{1}{R_2^2}=\frac{1}{r_{32}^2}+\frac{1}{r_{12}^2},\quad \frac{1}{R_3^2}=\frac{1}{r_{13}^2}+\frac{1}{r_{23}^2},$$

$$(18)\qquad \frac{1}{T_1}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\varrho_1},\quad \frac{1}{T_2}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\varrho_2},\quad \frac{1}{T_3}=\frac{1}{H_3}\frac{\partial\omega_3}{\partial\varrho_3},$$

$$(19)\qquad \operatorname{tang}\omega_1=\frac{r_{31}}{r_{21}},\quad \operatorname{tang}\omega_2=\frac{r_{12}}{r_{32}},\quad \operatorname{tang}\omega_3=\frac{r_{23}}{r_{13}}.$$

§ 275. Äquidistanzcurven und Cayley'sche Gleichung.

Das Bogenelement der Parameterlinien ϱ_3,

$$ds_3 = H_3 d\varrho_3,$$

kann auch als das unendlich kleine Stück der Normale der Fläche ϱ_3 zwischen dieser und der nächsten Fläche derselben Schar, $\varrho_3 + d\varrho_3$, angesehen werden. Auf der Fläche ϱ_3 sind also die Curven $H_3 =$ Const. diejenigen, längs deren dieses unendlich kleine Stück der Normale constant ist; sie werden deshalb als die Äquidistanzcurven (Gleichabstandslinien) der Fläche $\varrho_3 =$ Const. bezeichnet*). Da nun die Richtungscosinus der Tangente der Äquidistanzcurve $H_3 =$ Const. proportional dx, dy, dz, d. h. proportional $\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}d\varrho_1+\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}d\varrho_2$ u. s. w. sind, andrerseits aber auch

$$H_3(\varrho_1+d\varrho_1,\ \varrho_2+d\varrho_2,\ \varrho_3)=\text{Const.},$$

d. h.:

$$\frac{\partial H_3}{\partial\varrho_1}d\varrho_1+\frac{\partial H_3}{\partial\varrho_2}d\varrho_2=0$$

ist, so sind hiernach die Richtungscosinus der Tangente proportional den Binomen:

$$\frac{\partial H_3}{\partial\varrho_2}\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}-\frac{\partial H_3}{\partial\varrho_1}\frac{\partial x}{\partial\varrho_2},\quad \frac{\partial H_3}{\partial\varrho_2}\frac{\partial y}{\partial\varrho_1}-\frac{\partial H_3}{\partial\varrho_1}\frac{\partial y}{\partial\varrho_2},\quad \frac{\partial H_3}{\partial\varrho_2}\frac{\partial z}{\partial\varrho_1}-\frac{\partial H_3}{\partial\varrho_1}\frac{\partial z}{\partial\varrho_2},$$

d. h. (§ 274) proportional $\cos\lambda_3$, $\cos\mu_3$, $\cos\nu_3$. Daraus folgt der Satz:

Die Normalebene in einem Punkte einer Äquidistanzcurve auf einer Fläche $\varrho_3 =$ Const. fällt mit der Schmiegungsebene der Orthogonaltrajectorie ϱ_3 dieser Fläche durch den betreffenden Punkt zusammen.

---

*) Nur im Falle, dass H_3 constant wäre (oder von ϱ_3 allein abhinge), würde jede Curve als Äquidistanzcurve aufzufassen sein. Dann wäre aber:

$$\frac{1}{r_{13}}=\frac{1}{r_{23}}=0,\quad \frac{1}{R_3}=0,$$

d. h. die Curven ϱ_3 wären gerade Linien und die Flächen $\varrho_3 =$ Const. einander parallel.

Die Gleichung (17):

$$\frac{1}{R_3^2} = \frac{1}{H_3^2}\left[\frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}\right)^2\right],$$

durch welche die Krümmung dieser Orthogonaltrajectorie bestimmt wird, lässt sich auch, wie folgt, schreiben:

$$(20) \qquad \frac{1}{R_3} = \sqrt{\Delta_1 \log H_3} = \sqrt{\Delta_1 \log n},$$

wenn Δ_1 den ersten Differentialparameter für das Quadrat des Linienelements der Fläche $\varrho_3 = \text{Const.}$ und εn das unendlich kleine Stück der Normale der Fläche $\varrho_3 = \text{Const.}$ bis zur nächsten Fläche bedeutet, wobei ε eine unendlich kleine Constante und n eine Function von ϱ_1 und ϱ_2 ist. Zu beachten ist, dass sowohl der obige Satz als auch die Gleichung (20) allgemein für ein beliebiges System von Flächen und deren Orthogonaltrajectorien gelten *).

In unserem Falle aber, wo es sich um dreifache Orthogonalsysteme handelt, muss die Function n infolge der dritten Lamé'schen Gleichung (A) noch der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 n}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}\frac{\partial n}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}\frac{\partial n}{\partial \varrho_2}$$

oder unter Anwendung der Bezeichnung für die covarianten Differentialquotienten bezüglich der Fläche $\varrho_3 = \text{Const.}$ (§ 26, S. 46, (22)) noch der Gleichung:

$$n_{12} = 0$$

genügen.

Diese Gleichung, auf die wir bereits bei verschiedenen Untersuchungen, speciell bei der Frage nach den Cykelsystemen, zu denen eine gegebene Fläche gehört, gestossen sind, ist in der vorliegenden Bedeutung von Cayley angegeben worden und möge als die Cayley'sche Gleichung bezeichnet werden.

Aus den Eigenschaften der covarianten Differentialquotienten (Kap. II) geht sofort hervor, dass für eine beliebige Fläche S in einem allgemeinen Coordinatensystem u, v die Cayley'sche Gleichung folgendermassen lautet:

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0,$$

wenn

$$Edu^2 + 2F du\, dv + G dv^2,$$
$$Ddu^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2$$

*) S. Morera, Sui sistemi di superficie e le loro traiettorie ortogonali (Rendiconti del Reale Istituto Lombardo, 4. März 1886).

die beiden Fundamentaldifferentialformen von S sind*). Ist nun:

$$\lambda(x, y, z) = \lambda$$

die Gleichung einer Schar von ∞^1 Flächen, die einem dreifachen Orthogonalsystem angehört, so können wir

$$n = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)^2}}$$

setzen. Wenn wir nun dieses in (21) einsetzen, so ergiebt sich offenbar für λ eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung, und zwar die Darboux'sche Gleichung, von der in § 269 die Rede war.

Hieraus lässt sich leicht folgern:

Damit eine Schar von ∞^1 Flächen einem dreifachen Orthogonalsystem angehöre, ist notwendig und hinreichend, dass der unendlich kleine senkrechte Abstand zwischen je zwei auf einander folgenden Flächen der Schar der Cayley'schen Gleichung (21) genügt.

§ 276. Combescure'sche Transformation.

Combescure hat eine wichtige Transformation der dreifachen Orthogonalsysteme angegeben**), zu der später unabhängig von ihm Darboux für den allgemeinen Fall der Orthogonalsysteme mit n Veränderlichen gleichfalls gelangt ist***).

---

*) Als Beispiel werde eine Fläche S betrachtet, die auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, und es sei bei ihr:

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2, \quad r = \varphi(u).$$

Wird

$$n = \int r\,du$$

gesetzt, so ergiebt sich sofort:

$$n_{11}\,du^2 + 2n_{12}\,du\,dv + n_{22}\,dv^2 = r'(du^2 + r^2 dv^2).$$

Daraus folgt: Für die Fläche S ist die Function:

$$n = \int r\,du$$

eine Lösung der Cayley'schen Gleichung.

Ist S im besonderen eine Schraubenfläche, so ist die nächstfolgende Fläche wieder eine Schraubenfläche mit derselben Axe und Ganghöhe. Hierdurch ist die Existenz dreifacher Orthogonalsysteme, die eine Schar von Schraubenflächen mit gemeinsamer Axe und Ganghöhe enthalten, erwiesen. (Vergl. die Abhandlung des Verfassers: Annali di Matematica, 1. Serie, 4. Bd.)

**) Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1. Serie, 4. Bd.

***) Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 2. Serie, 7. Bd.

Auf unsern Fall beschränkt, ist die Aufgabe, die auf die Combescure'sche Transformation führt, die folgende:

Gegeben ist ein dreifaches Orthogonalsystem mittels der Gleichungen:

$$x = x(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3), \quad y = y(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3), \quad z = z(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3);$$

es soll ein zweites:

$$x' = x'(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3), \quad y' = y'(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3), \quad z' = z'(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$$

von der Beschaffenheit gefunden werden, dass in jedem Raumpunkte (x, y, z) die Normalen der drei Flächen des ersten Systems den entsprechenden Normalen im Punkte (x', y', z') des zweiten Systems parallel sind.

Da die Richtungscosinus des Haupttrieders: X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3 für beide Systeme dieselben sein müssen, so ist infolge der Gleichungen (11), § 271, klar, dass dieses auch mit den Grössen:

$$\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k}$$

der Fall sein muss. Führen wir nun mit Darboux die Bezeichnung:

$$\beta_{ki} = \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k}$$

ein, sodass die Gleichungen (11) in:

$$(22) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_k}{\partial \varrho_i} = \beta_{ki} X_i, \\[2ex] \dfrac{\partial X_k}{\partial \varrho_k} = -\beta_{ik} X_i - \beta_{lk} X_l \end{cases}$$

übergehen, so nehmen die Lamé'schen Gleichungen in den β die folgende Gestalt an:

$$(\text{A}^*) \qquad \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \varrho_l} = \beta_{kl}\beta_{li},$$

$$(\text{B}^*) \qquad \frac{\partial \beta_{ik}}{\partial \varrho_i} + \frac{\partial \beta_{ki}}{\partial \varrho_k} + \beta_{li}\beta_{kl} = 0,$$

wo, wie gewöhnlich, ikl eine Permutation der Indices 1, 2, 3 bedeutet*). Die gestellte Aufgabe ist demnach mit der folgenden Frage gleichbedeutend:

Wenn die β_{ki} $(i, k = 1, 2, 3)$ drei Functionen von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ sind, die den Gleichungen (A*) und (B*) genügen, giebt es dann ein oder mehrere Wertsysteme H_1, H_2, H_3, die mit den β durch die Relationen:

) Die Gleichungen (A) ziehen sechs und die Gleichungen (B*) drei Gleichungen zwischen den β nach sich.

$$(23)\quad \begin{cases} \beta_{12} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1}, & \beta_{23} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}, & \beta_{31} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}, \\ \beta_{21} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2}, & \beta_{32} = \frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_3}, & \beta_{13} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_3} \end{cases}$$

verbunden sind?

Eliminieren wir aus diesen Relationen z. B. H_1 und H_2, so erhalten wir für H_3 die drei simultanen Differentialgleichungen:

$$(24)\quad \begin{cases} \frac{\partial^2 H_3}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = \frac{\beta_{12}\beta_{23}}{\beta_{13}}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} + \frac{\beta_{21}\beta_{13}}{\beta_{23}}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}, \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} = \frac{\partial \log \beta_{13}}{\partial \varrho_3}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} + \beta_{13}\beta_{31} H_3, \\ \frac{\partial^2 H_3}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = \frac{\partial \log \beta_{23}}{\partial \varrho_3}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_2} + \beta_{23}\beta_{32} H_3. \end{cases}$$

Umgekehrt, ist H_3 eine Lösung dieses Simultansystems, so wird allen Gleichungen (23) Genüge geleistet, wenn

$$H_1 = \frac{1}{\beta_{13}}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1}, \quad H_2 = \frac{1}{\beta_{23}}\frac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}$$

gesetzt wird. Werden aber die Gleichungen (24) bezüglich nach $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ differenziert und unter Berücksichtigung eben dieser Gleichungen die Werte, die sich dabei für $\frac{\partial^3 H}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2 \partial \varrho_3}$ ergeben, einander gleich gesetzt, so entstehen zufolge (A*) ebenso viele Identitäten. Die allgemeinen Sätze über partielle Differentialgleichungen besagen nun:

Die allgemeinste Lösung H_3 der Gleichungen (24) enthält drei willkürliche Functionen von nur je einer der Veränderlichen. Demnach haben wir das Ergebnis:

Jedem dreifachen Orthogonalsystem entsprechen unendlich viele solche, die drei willkürliche Functionen enthalten und bei denen in jedem Punkte die Orientierung des Haupttrieders die nämliche ist, wie in dem entsprechenden Punkte des ersten Systems.

Von den neuen dreifachen Orthogonalsystemen möge es heissen, dass sie aus dem ursprünglichen mittels der Combescure'schen Transformation erhalten seien. Ihre analytische Bestimmung beruht auf der Integration des Systems (24), worauf sie sich mittels Quadraturen aus den Gleichungen:

$$dx' = \Sigma H_i X_i d\varrho_i, \quad dy' = \Sigma H_i Y_i d\varrho_i, \quad dz' = \Sigma H_i Z_i d\varrho_i$$

ergeben, wobei die X_i, Y_i, Z_i ihre ursprünglichen Werte beibehalten.

Es ist klar, dass in den abgeleiteten Systemen jede einzelne Fläche mit der entsprechenden Fläche des Ausgangssystems die sphärischen Bilder der Krümmungslinien gemein hat.

Anmerkung. — Zur Aufstellung der Combescure'schen Transformation können wir nach Darboux*) in folgender symmetrischer Weise verfahren: Es seien W_1, W_2, W_3 die algebraischen Entfernungen des Punktes (x, y, z) von den Hauptebenen des Punktes $(x'\, y'\, z')$, sodass

$$W_i = \Sigma (x' - x)\, X_i$$

ist. Hieraus folgern wir:

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial W_i}{\partial \varrho_k} = \beta_{ik} W_k$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_k}(H_i W_i) = \frac{\partial H_k}{\partial \varrho_i} W_k + \frac{\partial H_i}{\partial \varrho_k} W_i.$$

Es wird also:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_k}(H_i W_i) = \frac{\partial}{\partial \varrho_i}(H_k W_k).$$

Folglich können wir eine neue unbekannte Function W einführen, durch deren Ableitungen W_1, W_2, W_3 mittels der Gleichungen:

$$W_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial W}{\partial \varrho_1}, \quad W_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial W}{\partial \varrho_2}, \quad W_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial W}{\partial \varrho_3}$$

ausdrückbar sind. Dann kommt aus (α):

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varrho_i \partial \varrho_k} = \frac{\partial \log H_i}{\partial \varrho_k}\frac{\partial W}{\partial \varrho_i} + \frac{\partial \log H_k}{\partial \varrho_i}\frac{\partial W}{\partial \varrho_k},$$

und für die unbekannte Function W bekommen wir somit das symmetrische Gleichungssystem:

$$(\beta) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = \dfrac{\partial \log H_1}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial W}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial \log H_2}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial W}{\partial \varrho_2}, \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = \dfrac{\partial \log H_2}{\partial \varrho_3}\dfrac{\partial W}{\partial \varrho_2} + \dfrac{\partial \log H_3}{\partial \varrho_2}\dfrac{\partial W}{\partial \varrho_3}, \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial \varrho_3 \partial \varrho_1} = \dfrac{\partial \log H_3}{\partial \varrho_1}\dfrac{\partial W}{\partial \varrho_3} + \dfrac{\partial \log H_1}{\partial \varrho_3}\dfrac{\partial W}{\partial \varrho_1}. \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingungen für dieses System werden identisch erfüllt, woraus folgt, dass die allgemeine Lösung W drei willkürliche Functionen enthält, da die Werte von W längs dreier von einem Punkte P ausgehender Parameterlinien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ganz beliebig vorgeschrieben werden können. Ist umgekehrt W irgend eine Lösung des Systems (β), so bestimmt die Gleichung:

$$x' = x + \frac{1}{H_1}\frac{\partial W}{\partial \varrho_1} X_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial W}{\partial \varrho_2} X_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial W}{\partial \varrho_3} X_3$$

nebst den analogen für y', z' ein neues, durch Combescure'sche Transformation abgeleitetes Orthogonalsystem.

*) Darboux, Leçons u. s. w., S. 288 u. f.

Kapitel XIX.

Untersuchung einiger specieller dreifacher Orthogonalsysteme.

Systeme, die eine Schar von Rotationsflächen enthalten. — Osculierende Cykelsysteme. — Combescure'sche Transformation der normalen Kreissysteme. — Die abgeleiteten Systeme sind die allgemeinsten, die eine Schar von ebenen Krümmungslinien haben. — Charakteristische Elemente dieser Systeme und ihre Bestimmung mittels Quadraturen. — Dreifaches Orthogonalsystem der confocalen Mittelpunktsflächen zweiten Grades. — Elliptische Coordinaten. — Geodätische Linien auf den Mittelpunktsflächen zweiten Grades. — Sätze von Chasles und Liouville. — Geodätische Linien auf dem Ellipsoid. — Satz von Joachimsthal. — Geodätische Linien durch die Nabelpunkte. — Die Krümmungslinien als geodätische Ellipsen und Hyperbeln, welche die Nabelpunkte zu Brennpunkten haben. — Sätze von Roberts und Hart.

§ 277. Dreifache Orthogonalsysteme, die eine Schar von Rotationsflächen enthalten.

In diesem Kapitel wollen wir die allgemeinen Sätze des vorigen Kapitels auf einige einfache Klassen von dreifachen Orthogonalsystemen anwenden.

Wir suchen zunächst diejenigen dreifachen Orthogonalsysteme, welche eine Schar von Rotationsflächen enthalten.

Angenommen, in dem dreifachen Orthogonalsystem, das durch den Ausdruck für das Quadrat des Linienelements des Raumes:

$$ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2$$

definiert ist, seien die Flächen $\varrho_3 = \text{Const.}$ Rotationsflächen, und zwar seien die Curven $\varrho_3 = \text{Const.}$ ihre Meridiancurven. Da diese Curven geodätische Linien sind, so ist (S. 148):

$$\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_3} = 0.$$

Die erste der Lamé'schen Gleichungen (A), S. 485, giebt somit:

$$\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_3} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2} = 0.$$

Im zweiten Falle wäre infolge der Gleichungen (13), S. 489:

$$\frac{1}{r_{21}} = 0, \quad \frac{1}{r_{31}} = 0;$$

es wären demnach die Rotationsflächen $\varrho_2 =$ Const. abwickelbare Flächen, und zwar Kegel oder Cylinder. Diesen Fall wollen wir ausschliessen*). Es bleiben somit nur die Bedingungen:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_3} = 0, \quad \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_3} = 0$$

übrig, woraus

$$\frac{1}{r_{31}} = 0, \quad \frac{1}{r_{32}} = 0$$

folgt. Demnach sind die Flächen $\varrho_3 =$ Const. Ebenen, nämlich diejenigen der Meridiancurven der Flächen $\varrho_2 =$ Const. Also: Die Rotationsflächen $\varrho_2 =$ Const. haben eine gemeinsame Drehaxe, und das dreifache Orthogonalsystem ergiebt sich, wenn in einer Ebene ein (beliebiges) doppeltes orthogonales Curvensystem gezogen und um eine in dieser Ebene gelegene feste Axe gedreht wird. Das auf diese Weise erzeugte System von Rotationsflächen bildet zusammen mit den Meridianebenen das gesuchte dreifache System. Es ist klar (und kann auch aus den Lamé'schen Gleichungen gefolgert werden), dass in dem vorliegenden Falle durch passende Wahl des Parameters ϱ_3 auch H_3 unabhängig von ϱ_3 gemacht werden kann. Wir können also sagen: Die charakteristische Eigenschaft der hier betrachteten dreifachen Orthogonalsysteme besteht darin, dass in dem Ausdruck für das Quadrat des Linienelements,

$$ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2,$$

die Coefficienten H_1, H_2, H_3 Functionen von nur zwei Veränderlichen, ϱ_1 und ϱ_2, sind.

Die Combescure'sche Transformation bietet in diesem Falle wenig Interesse: die abgeleiteten Systeme enthalten nämlich offenbar auch eine Schar von Ebenen und sind mit den in § 269 betrachteten Systemen identisch.

---

*) Hierzu mag Folgendes bemerkt werden: Da dann H_1 nur von ϱ_1 abhängt, so kann H_1 gleich Eins gesetzt werden. Es sind dann die Parameterlinien ϱ_1 Gerade. Demnach sind die Flächen $\varrho_1 =$ Const. einander parallel, und zwar sind es im Falle der Cylinder Ebenen, im Falle der Kegel Flächen, für welche die Krümmungslinien der einen Schar Kreise sind. Der Leser wird leicht nachweisen können, dass im letzteren Falle die Drehaxen der Kegel die Tangenten der Ortscurve der Spitzen sind. Diese Curve kann übrigens willkürlich gewählt werden, ebenso wie auch die Öffnungen der Kegel willkürlich bleiben.

§ 278. Osculierende Cykelsysteme.

Eine bemerkenswerte Klasse von dreifachen Orthogonalsystemen bilden die Ribaucour'schen Cykelsysteme oder die normalen Kreissysteme, die wir schon in Kap. XIII behandelt und für die wir speciell in § 187, S. 354, den Ausdruck für das Linienelement des Raumes bestimmt haben. Ein schöner Satz von Ribaucour ermöglicht es, aus jedem dreifachen Orthogonalsystem unendlich viele normale Kreissysteme abzuleiten. Er lautet:

Werden in den Punkten einer Fläche S eines dreifachen Orthogonalsystems die Schmiegungskreise der Orthogonaltrajectorien der demselben System angehörigen Flächen construiert, so gehören diese doppelt unendlich vielen Kreise einem normalen Kreissystem an.

Dieses normale Kreissystem wollen wir als das osculierende System des gegebenen Systems längs der Fläche S bezeichnen.

Um diesen Satz zu beweisen, haben wir nur die Gleichungen des vorhergehenden Kapitels mit den Gleichungen in § 182, S. 344, zu vergleichen, die sich auf die Bestimmung derjenigen Cykelsysteme beziehen, deren Kreise eine gegebene Fläche orthogonal schneiden. Ist nämlich $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ ein dreifaches Orthogonalsystem, in dem das Quadrat des Linienelements des Raumes die Form:

$$ds^2 = \sum H^2 d\varrho^2$$

annimmt, und betrachten wir eine bestimmte Fläche des Systems:

$$\varrho_3 = \text{Const.},$$

so ist die Function H_3 eine Lösung der Cayley'schen Gleichung:

$$\frac{\partial^2 H_3}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2} \frac{\partial H_3}{\partial \varrho_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1} \frac{\partial H_3}{\partial \varrho_2}.$$

Bedeutet R_3 den Radius des Schmiegungskreises einer Parameterlinie ϱ_3 und ω_3 den Winkel, den die positive Richtung ihrer Hauptnormale mit der Curve ϱ_1 bildet, so ist (§ 274, S. 491 und 489):

$$\frac{1}{R_3^2} = \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial \log H_3}{\partial \varrho_2}\right)^2,$$

$$\cos \omega_3 = -\frac{R_3}{r_{13}} = -\frac{R_3}{H_1} \frac{\partial \log H_3}{\partial \varrho_1},$$

$$\sin \omega_3 = -\frac{R_3}{r_{23}} = -\frac{R_3}{H_2} \frac{\partial \log H_3}{\partial \varrho_2}.$$

Diese Gleichungen beweisen, verglichen mit den Gleichungen (5) und (13) auf S. 345, den Ribaucour'schen Satz.

§ 279. Dreifache Orthogonalsysteme mit einer Schar von ebenen Krümmungslinien.

Die Combescure'sche Transformation der normalen Kreissysteme liefert eine interessante Klasse von dreifachen Orthogonalsystemen. Es ist ohne weiteres klar, dass in jedem System, das durch eine Combescure'sche Transformation aus einem normalen Kreissystem abgeleitet wird, diejenigen Curven, welche Kreisen entsprechen, ebene Curven sind, da die Tangenten einer jeden den Tangenten des entsprechenden Kreises parallel sind. Also:

In den durch eine Combescure'sche Transformation aus normalen Kreissystemen abgeleiteten dreifachen Orthogonalsystemen sind die Orthogonaltrajectorien der Flächen einer der drei Scharen ebene Curven.

Es lässt sich auch leicht nachweisen, dass sich umgekehrt jedes dreifache Orthogonalsystem, in dem die Orthogonaltrajectorien der Flächen einer der drei Scharen ebene Curven sind (in dem also die Flächen der anderen beiden Scharen eine Schar ebener Krümmungslinien besitzen), durch eine Combescure'sche Transformation aus einem normalen Kreissystem ableiten lässt. Es sei nämlich $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ ein dreifaches Orthogonalsystem, in dem die Parameterlinien ϱ_3 eben seien. Wir betrachten eine Fläche S_3 der Schar (ϱ_3) und das im vorhergehenden Paragraphen definierte osculierende Cykelsystem längs derselben.

Es erhellt sofort, dass diejenigen Flächen, deren Krümmungslinien die Kreise des Cykelsystems sind, dieselben sphärischen Bilder der Krümmungslinien haben wie die Flächen:

$$\varrho_1 = \text{Const.}, \quad \varrho_2 = \text{Const.}$$

des Ausgangssystems. Daraus folgt, dass zwischen den beiden dreifachen Orthogonalsystemen die durch die Combescure'sche Transformation vermittelte Beziehung hergestellt werden kann. Also:

Wenn in einem dreifachen Orthogonalsystem $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ die Curven ϱ_3 eben sind, so lassen sich die osculierenden Cykelsysteme längs der Flächen $\varrho_3 = \text{Const.}$ durch eine Combescure'sche Transformation aus dem Ausgangssystem ableiten.

Um alle in Rede stehenden Systeme $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ zu finden, brauchen wir also nur diejenigen zu suchen, welche ein gegebenes Cykelsystem als osculierendes System haben. Diese Aufgabe lässt sich nun, wie wir jetzt beweisen wollen, lediglich durch Quadraturen lösen*).

*) Vgl. die Abhandlung des Verfassers in den Annali di Matematica, 19. Bd, 1890.

Dazu müssen wir auf die Gleichungen des Kap. XIII für die normalen Kreissysteme, insbesondere auf die Gleichungen des § 187, S. 354, zurückgehen, wo wir in der Formel (23) für das Quadrat des Linienelements des Raumes, bezogen auf ein normales Kreissystem (u, v, w), den Ausdruck:

$$(1) \qquad ds^2 = h_1^2 du^2 + h_2^2 dv^2 + h_3^2 dw^2$$

gefunden haben. Hierin haben h_1, h_2, h_3 die folgenden Werte:

$$(2) \begin{cases} h_1 = 2\cos\frac{\sigma}{2}\left[\frac{\partial \varrho}{\partial u} - \sqrt{E}\,\mathrm{tang}\frac{\sigma}{2}\sin\left(t + \frac{\Omega}{2}\right)\varrho + \frac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\varrho\right], \\ h_2 = 2\sin\frac{\sigma}{2}\left[\frac{\partial \varrho}{\partial v} + \sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\sin\left(t - \frac{\Omega}{2}\right)\varrho - \frac{2\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\varrho\right], \\ h_3 = \varrho\sin\sigma\frac{\partial t}{\partial w}, \end{cases}$$

wo die Grössen E, G, Ω, σ, ϱ, t die in § 184, S. 347, 348, angegebene Bedeutung haben. Wir erinnern daran, dass E, G, Ω die drei Functionen von u und v sind, die in dem Ausdruck für das Quadrat des Linienelements der Kugel auftreten:

$$ds'^2 = E du^2 + 2\cos\Omega\sqrt{EG}\,du\,dv + G dv^2,$$

das auf die Bildcurven (u, v) der abwickelbaren Flächen desjenigen Strahlensystems, dessen Strahlen die Axen der Kreise sind, bezogen ist, während $\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}$ die Christoffel'schen Symbole bezüglich des Linienelements der Kugel sind. Der Winkel σ ergiebt sich aus der Gleichung (20), S. 349, d. h. aus der Gleichung*):

$$(\mathrm{a}) \qquad \cos^2\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + \sin^2\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}$$

und genügt daher den Gleichungen:

$$(3) \qquad \frac{\partial\cos\sigma}{\partial u} = 2(\cos\sigma - 1)\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial\cos\sigma}{\partial v} = 2(\cos\sigma + 1)\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix},$$

die zweckmässig in der nachstehenden Form geschrieben werden:

$$(3^*) \qquad \frac{\partial\log\sin\sigma}{\partial u} = \frac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial\log\sin\sigma}{\partial v} = -\frac{2\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}.$$

---

*) Falls die Gleichung (a) des Textes eine Identität, d. h.:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}$$

ist, so muss man auf die weiterhin folgenden Gleichungen (3) oder (3*) zurückgehen, die σ bis auf eine Constante bestimmen (vgl. § 185).

Die Function $\varrho(u, v)$ ist eine (beliebige) Lösung der Laplace'schen Gleichung (vgl. (15) auf S. 347):

$$(4)\qquad \frac{\partial^2\varrho}{\partial u\,\partial v} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\varrho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\varrho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} + \right.$$
$$\left. + \cos\Omega\sqrt{EG}\right]\varrho = 0.$$

Endlich ist t die allgemeine Lösung der unbeschränkt integrierbaren totalen Differentialgleichung (vgl. (18) auf S. 348):

$$(5)\quad dt = \left[\sqrt{E}\,\mathrm{tang}\frac{\sigma}{2}\cos\left(t + \frac{\Omega}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u} + \sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\sin\Omega\right]du -$$
$$- \left[\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(t - \frac{\Omega}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v} + \sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\sin\Omega\right]dv.$$

Diese allgemeine Lösung t enthält eine willkürliche, mit w bezeichnete Grösse, die als dritte Veränderliche nur in t enthalten ist.

§ 280. **Fortsetzung.**

Nachdem wir so an die früheren Gleichungen erinnert haben, bilden wir für das normale Kreissystem die Grössen β_{ik} des § 276, S. 494. Wir erhalten:

$$(5^*)\quad \left\{\begin{aligned}
&\beta_{12} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial u} = \left[\sqrt{G}\sin\left(t - \frac{\Omega}{2}\right) - \cot\frac{\sigma}{2}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right],\\
&\beta_{23} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial v} = \cos\frac{\sigma}{2}\cdot\frac{\partial t}{\partial w},\quad \beta_{31} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial w} = -\frac{\sqrt{E}\cos\left(t + \frac{\Omega}{2}\right)}{\cos\frac{\sigma}{2}},\\
&\beta_{21} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial v} = -\left[\sqrt{E}\sin\left(t + \frac{\Omega}{2}\right) + \mathrm{tang}\frac{\sigma}{2}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right],\\
&\beta_{32} = \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial w} = \frac{\sqrt{G}\cos\left(t - \frac{\Omega}{2}\right)}{\sin\frac{\sigma}{2}},\quad \beta_{13} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial u} = \sin\frac{\sigma}{2}\cdot\frac{\partial t}{\partial w}.
\end{aligned}\right.$$

Nun wenden wir die Combescure'sche Transformation an, indem wir zur Bestimmung der Coefficienten H_1, H_2, H_3 des durch die Gleichung:

$$ds^2 = H_1^2du^2 + H_2^2dv^2 + H_3^2dw^2$$

definierten transformierten Systems die Gleichungen (24), S. 495, benutzen, die zur Berechnung von H_3 dienen. Führen wir in ihnen statt H_3 mittels der Gleichung:

$$H_3 = R\sin\sigma\frac{\partial t}{\partial w}$$

eine neue unbekannte Function $R(u, v, w)$ ein, so erhalten wir zur Bestimmung von R die drei simultanen Differentialgleichungen:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 R}{\partial u\, \partial w} = \left[\sqrt{E}\, \operatorname{tang}\dfrac{\sigma}{2}\sin\left(t+\dfrac{\Omega}{2}\right) - \dfrac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right]\dfrac{\partial R}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial^2 R}{\partial v\, \partial w} = \left[-\sqrt{G}\cot\dfrac{\sigma}{2}\sin\left(t-\dfrac{\Omega}{2}\right) + \dfrac{2\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right]\dfrac{\partial R}{\partial w}, \\ \dfrac{\partial^2 R}{\partial u\, \partial v} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial R}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial R}{\partial v} + \\ \qquad + \left[\dfrac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + \dfrac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} + \cos\Omega\sqrt{EG}\right] R = 0. \end{cases}$$

Die ersten beiden lassen sich aber infolge der Gleichungen (3*) und (5) so schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\partial R}{\partial w} = -\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\sin\sigma\frac{\partial t}{\partial w}\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\partial R}{\partial w} = -\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\sin\sigma\frac{\partial t}{\partial w}\right).$$

Daraus folgt durch Integration sofort:

$$\frac{\partial R}{\partial w} = \frac{W}{\sin\frac{\sigma}{2}\frac{\partial t}{\partial w}},$$

wenn W eine willkürliche Function von w ist. Eine nochmalige Integration nach w liefert:

$$(7)\qquad R = \frac{1}{\sin\sigma}\int\limits_{w_0}^{w}\frac{W\,dw}{\frac{\partial t}{\partial w}} + \psi(u, v),$$

worin w_0 einen festen Wert von w bedeutet und die Function ψ nur von u und v abhängt. Diese Function ist so zu bestimmen, dass der Wert (7) von R auch der dritten der Gleichungen (6) genügt. Nun lässt sich sofort nachweisen, dass die Function $\frac{1}{\sin\sigma}\frac{\partial t}{\partial w}$ der eben angeführten Gleichung genügt, und da die Coefficienten dieser homogenen linearen Differentialgleichung frei von w sind, so genügt ihr auch die Function:

$$\frac{1}{\sin\sigma}\int\limits_{w_0}^{w}\frac{W\,dw}{\frac{\partial t}{\partial w}}.$$

Also: Allen Bedingungen (6) wird genügt, wenn in der Gleichung (7) für $\psi(u, v)$ eine beliebige Lösung der Laplace'schen Gleichung gewählt wird:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v}+\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial v}+$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}+\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}+\cos\Omega\sqrt{EG}\right]\psi=0.$$

von der die Bestimmung der (cyklischen) Strahlensysteme abhängt, welche die Curven u, v auf der Kugel zu Bildern ihrer abwickelbaren Flächen haben.

Kann diese Gleichung vollständig integriert werden, so können auch zu dem gegebenen normalen Kreissystem alle Combescure'schen transformierten Systeme angegeben werden. Die Aufgabe aber, die wir uns in § 279 gestellt haben, nämlich, diejenigen Combescure'schen abgeleiteten Systeme zu bestimmen, welche das gegebene normale Kreissystem zum Schmiegungssystem längs der Fläche $w = w_0$ haben, wird, wie wir nun zeigen wollen, einfach dadurch gelöst, dass in (7)

$$\psi = \varrho$$

gesetzt wird.

§ 281. Erledigung dieses Problems.

Da H_3 den Wert $R\sin\sigma\frac{\partial t}{\partial w}$ hat, wo R durch die Gleichung (7) gegeben ist, so ergeben die Gleichungen (§ 276, S. 494):

$$H_1=\frac{1}{\beta_{13}}\frac{\partial H_3}{\partial u},\qquad H_2=\frac{1}{\beta_{23}}\frac{\partial H_3}{\partial v}$$

infolge der Gleichungen (5) und (5*):

$$(8)\begin{cases}H_1=2\cos\frac{\sigma}{2}\left[\frac{\partial R}{\partial u}-\sqrt{E}\,\mathrm{tang}\,\frac{\sigma}{2}\,\sin\left(t+\frac{\Omega}{2}\right)R+\frac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}R\right],\\ H_2=2\sin\frac{\sigma}{2}\left[\frac{\partial R}{\partial v}+\sqrt{G}\,\cot\frac{\sigma}{2}\,\sin\left(t-\frac{\Omega}{2}\right)R-\frac{2\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}R\right],\\ H_3=R\sin\sigma\frac{\partial t}{\partial w},\end{cases}$$

$$ds^2=H_1^2du^2+H_2^2dv^2+H_3^2dw^2.$$

Für die Hauptkrümmungen:

$$\frac{1}{r_{13}}=\frac{\beta_{13}}{H_3},\quad \frac{1}{r_{23}}=\frac{\beta_{23}}{H_3}$$

erhalten wir mithin die Werte:

$$\frac{1}{r_{13}}=\frac{1}{2R\cos\frac{\sigma}{2}},\quad \frac{1}{r_{23}}=\frac{1}{2R\sin\frac{\sigma}{2}},$$

also für die Grössen ϱ_3, ω_3, $\frac{1}{T_3}$ in § 274:

$$\varrho_3 = R \sin \sigma, \quad w_3 = \frac{\sigma}{2}, \quad \frac{1}{T_3} = 0.$$

Aus den früheren Gleichungen für ϱ_3 und w_3 geht, wenn auch die Gleichungen (8) berücksichtigt werden, gerade die Richtigkeit unserer Behauptung hervor: Will man das abgeleitete System erhalten, für welches das gegebene normale Kreissystem das Schmiegungssystem längs der Fläche $w = w_0$ ist, so muss man in der Gleichung (7) ψ gleich ϱ, d. h.:

$$R = \frac{1}{\sin \sigma} \int\limits_{w_0}^{w} \frac{W\,dw}{\frac{\partial t}{\partial w}} + \varrho(u, v) \tag{7*}$$

setzen. Das Auftreten der willkürlichen Function W in dieser Gleichung ermöglicht es, einer der ebenen Parameterlinien w eine vorgeschriebene Gestalt zu geben. Aber damit ist dann die ganze Schar eindeutig bestimmt. Mithin haben wir den Satz gewonnen:

Zur Bestimmung eines dreifachen Orthogonalsystems, in dem die orthogonalen Trajectorien der Flächen eines der Systeme Σ ebene Curven C sind, können die folgenden Elemente willkürlich gegeben werden: erstens eine Fläche Σ_0 des Systems Σ, zweitens eine Curve C_0 von den Curven C und drittens das osculierende Cykelsystem längs Σ_0. Diese Elemente bestimmen das System eindeutig. Es ergiebt sich lediglich mittels Quadraturen, wenn die Krümmungslinien von Σ_0 bekannt sind.

Unter den vorstehenden Systemen giebt es eine Klasse, die besondere Erwähnung verdient. Der Winkel $\frac{\sigma}{2}$ giebt infolge der früheren Gleichungen die Neigung der Ebenen der Curven C gegen die Flächen $u =$ Const. an. Wir suchen nun unter den betrachteten dreifachen Orthogonalsystemen diejenigen, für welche der Winkel σ constant ist. Da dann infolge der Gleichungen (3)

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$$

ist, so sind die Curven u, v die Bilder der Haupttangentencurven einer pseudosphärischen Fläche (S. 130). Für das Quadrat des Linienelements der Kugel ergiebt sich:

$$ds'^2 = du^2 + 2 \cos \Omega \, du \, dv + dv^2,$$

worin Ω eine Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial u \partial v} + \sin \Omega = 0$$

ist (S. 131), und die Gleichung (4) für R geht über in die Gleichung für die unendlich kleinen Verbiegungen der pseudosphärischen Flächen (S. 297):

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u \partial v} + R \cos \Omega = 0.$$

Demnach hängt also die Bestimmung dieser speciellen Systeme von dem Problem der unendlich kleinen Verbiegungen der pseudosphärischen Flächen ab*).

§ 282. **Confocale Flächen zweiten Grades.**

Wir wollen uns nun mit einem der einfachsten und wichtigsten dreifachen Orthogonalsysteme, dem System confocaler Flächen zweiten Grades, beschäftigen. Dasselbe giebt zu den elliptischen Coordinaten Anlass, die von Lamé in die Analysis eingeführt worden sind.

Wir betrachten das System confocaler Mittelpunktsflächen zweiten Grades, das durch die Gleichung definiert wird:

$$(9) \qquad \frac{x^2}{a^2+\varrho} + \frac{y^2}{b^2+\varrho} + \frac{z^2}{c^2+\varrho} = 1,$$

worin ϱ ein veränderlicher Parameter ist, und setzen

$$a^2 > b^2 > c^2$$

voraus. Die Fläche (9) ist nur dann reell, wenn ϱ zwischen $+\infty$ und $-a^2$ liegt, und zwar ist sie insbesondere

ein Ellipsoid . . . . für $+\infty > \varrho > -c^2$,
ein einschaliges Hyperboloid . für $-c^2 > \varrho > -b^2$,
ein zweischaliges Hyperboloid . für $-b^2 > \varrho > -a^2$.

Für $\varrho = +\infty$ ergiebt sich eine Kugel von unendlich grossem Radius. Ändert sich ϱ von $+\infty$ bis $-c^2$, so bleibt die Fläche immer ein Ellipsoid, dessen kleine Axe $\sqrt{c^2+\varrho}$ immerfort stetig abnimmt, bis sich in der Grenze für $\varrho = -c^2$ das Ellipsoid zu dem (doppelt zu rechnenden) Stück der xy-Ebene innerhalb der Focalellipse:

$$\frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} = 1$$

abflacht. Sobald $\varrho < -c^2$ wird, so wird die Fläche ein einschaliges Hyperboloid, und setzt man $\varrho = -c^2 - \varepsilon$ (ε positiv) und lässt dann ε zu Null abnehmen, so erkennt man, dass sich für $\varepsilon = 0$ das Hyper-

*) In Betreff weiterer Bemerkungen siehe die vorhin (S. 500) angeführte Abhandlung des Verfassers.

boloid zu dem ausserhalb der Focalellipse gelegenen Stück der xy-Ebene abflacht. Diese Ellipse stellt somit den Übergang von der Schar der Ellipsoide zu derjenigen der einschaligen Hyperboloide dar.

In derselben Weise lässt sich zeigen, dass der Übergang von dieser Schar von Hyperboloiden zur Schar der zweischaligen Hyperboloide durch Überschreiten der Focalhyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = 1$$

bewerkstelligt wird.

Durch jeden Raumpunkt (ξ, η, ζ) gehen drei Flächen des Systems (1), die den drei Wurzelwerten der in ϱ cubischen Gleichung:

$$f(\varrho) = (a^2+\varrho)(b^2+\varrho)(c^2+\varrho) - (b^2+\varrho)(c^2+\varrho)\xi^2 - \\ - (c^2+\varrho)(a^2+\varrho)\eta^2 - (a^2+\varrho)(b^2+\varrho)\zeta^2 = 0$$

entsprechen. Da nun

$$f(+\infty) > 0, \quad f(-c^2) > 0, \quad f(-b^2) > 0, \quad f(-a^2) > 0$$

ist, so hat die Gleichung drei reelle Wurzeln $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, die bezüglich in den Intervallen:

$$+\infty > \varrho_1 > -c^2, \quad -c^2 > \varrho_2 > -b^2, \quad -b^2 > \varrho_3 > -a^2$$

liegen. Die drei zugehörigen Flächen des Systems (9):

$$(10) \qquad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2+\varrho_1} + \frac{y^2}{b^2+\varrho_1} + \frac{z^2}{c^2+\varrho_1} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2+\varrho_2} + \frac{y^2}{b^2+\varrho_2} + \frac{z^2}{c^2+\varrho_2} = 1, \\ \frac{x^2}{a^2+\varrho_3} + \frac{y^2}{b^2+\varrho_3} + \frac{z^2}{c^2+\varrho_3} = 1, \end{cases}$$

die durch den Punkt (ξ, η, ζ) hindurchgehen, sind bezüglich ein Ellipsoid, ein einschaliges und ein zweischaliges Hyperboloid.

Wir können die Lage eines Raumpunktes (x, y, z) mit Hilfe der Parameter $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ der drei Flächen zweiten Grades des Systems (9), die durch den Punkt hindurchgehen, bestimmen. In diesem Falle werden $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die elliptischen Coordinaten des Punktes P genannt. Sie hängen mit den Cartesischen Coordinaten x, y, z des Punktes mittels der Relationen (10) zusammen.

§ 283. **Elliptische Coordinaten.**

Zur Berechnung des Linienelements des Raumes in elliptischen Coordinaten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ bemerken wir*), dass, da $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ die Wurzeln der in ϱ cubischen Gleichung:

*) S. Kirchhoff, Mechanik, 17. Vorlesung.

$$\frac{x^2}{a^2+\varrho}+\frac{y^2}{b^2+\varrho}+\frac{z^2}{c^2+\varrho}-1=0$$

sind, für alle Werte von ϱ die Identität besteht:

$$(11)\qquad \frac{x^2}{a^2+\varrho}+\frac{y^2}{b^2+\varrho}+\frac{z^2}{c^2+\varrho}=1-\frac{(\varrho_1-\varrho)(\varrho_2-\varrho)(\varrho_3-\varrho)}{(a^2+\varrho)(b^2+\varrho)(c^2+\varrho)}.$$

Wenn wir nun beiderseits mit

$$(a^2+\varrho)(b^2+\varrho)(c^2+\varrho)$$

multiplicieren und dann der Reihe nach

$$\varrho=-a^2,\quad \varrho=-b^2,\quad \varrho=-c^2$$

setzen, so erhalten wir:

$$(12)\qquad x^2=\frac{(a^2+\varrho_1)(a^2+\varrho_2)(a^2+\varrho_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\quad y^2=\frac{(b^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_2)(b^2+\varrho_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$
$$z^2=\frac{(c^2+\varrho_1)(c^2+\varrho_2)(c^2+\varrho_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Diese Gleichungen geben die Cartesischen Coordinaten, ausgedrückt durch die elliptischen. Aus ihnen ergeben sich durch logarithmische Differentiation nach ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die weiteren Gleichungen:

$$(13)\qquad \frac{\partial x}{\partial \varrho_i}=\frac{x}{2(a^2+\varrho_i)},\quad \frac{\partial y}{\partial \varrho_i}=\frac{y}{2(b^2+\varrho_i)},$$
$$\frac{\partial z}{\partial \varrho_i}=\frac{z}{2(c^2+\varrho_i)}\quad (i=1,2,3),$$

und aus den Gleichungen (10) folgt durch Subtraction von je zweien und unter Berücksichtigung der Gleichungen (13):

$$\sum\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}=0,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\frac{\partial x}{\partial\varrho_3}=0,\quad \sum\frac{\partial x}{\partial\varrho_3}\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}=0,$$

wo die Summenzeichen andeuten, dass noch die entsprechenden Glieder in y und z hinzukommen. Hieraus folgt bereits:

Das System (9) von confocalen Mittelpunktsflächen zweiter Ordnung ist ein dreifaches Orthogonalsystem.

Wird nun (11) nach ϱ differenziert und dann ϱ der Reihe nach gleich ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 gesetzt, so ergiebt sich wegen der Gleichungen (13):

$$(13^*)\qquad \begin{cases} \sum\left(\frac{\partial x}{\partial\varrho_1}\right)^2=\frac{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1-\varrho_3)}{4(a^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_1)(c^2+\varrho_1)}, \\ \sum\left(\frac{\partial x}{\partial\varrho_2}\right)^2=\frac{(\varrho_2-\varrho_3)(\varrho_2-\varrho_1)}{4(a^2+\varrho_2)(b^2+\varrho_2)(c^2+\varrho_2)}, \\ \sum\left(\frac{\partial x}{\partial\varrho_3}\right)^2=\frac{(\varrho_3-\varrho_1)(\varrho_3-\varrho_2)}{4(a^2+\varrho_3)(b^2+\varrho_3)(c^2+\varrho_3)}, \end{cases}$$

folglich für das Quadrat des Linienelements des Raumes in elliptischen Coordinaten der Ausdruck:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} ds^2 = \frac{1}{4}\Bigg[& \frac{(\varrho_1-\varrho_2)(\varrho_1-\varrho_3)}{(a^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_1)(c^2+\varrho_1)}\,d\varrho_1^2 + \\ & + \frac{(\varrho_2-\varrho_3)(\varrho_2-\varrho_1)}{(a^2+\varrho_2)(b^2+\varrho_2)(c^2+\varrho_2)}\,d\varrho_2^2 + \\ & + \frac{(\varrho_3-\varrho_1)(\varrho_3-\varrho_2)}{(a^2+\varrho_3)(b^2+\varrho_3)(c^2+\varrho_3)}\,d\varrho_3^2\Bigg]. \end{aligned}\right.$$

Hieraus ersehen wir, dass in dem vorliegenden dreifachen Orthogonalsystem die Krümmungslinien auf jeder Fläche eines der drei Systeme ein Isothermensystem bilden. Es giebt jedoch ein allgemeineres, von Darboux *) gefundenes dreifaches Orthogonalsystem, dem dieselbe Eigenschaft zukommt. Die Flächen dieses Systems sind ebenfalls algebraisch, aber von der vierten Ordnung.

§ 284. Satz von Chasles.

Das Isothermensystem der Krümmungslinien auf einer Fläche zweiten Grades besitzt ferner die Eigenschaft, aus geodätischen Ellipsen und Hyperbeln zu bestehen, wie aus dem Ausdruck (14) für das Quadrat des Linienelements erhellt (vgl. § 88, S. 172, 173). Die Flächen zweiten Grades gehören nämlich zur Klasse der Liouville'schen Flächen, auf denen sich die geodätischen Linien mittels Quadraturen ergeben. Wir wollen nun gerade die Eigenschaften der geodätischen Linien auf den Mittelpunktsflächen zweiten Grades, insbesondere auf dem Ellipsoid, untersuchen. Anstatt aber von den allgemeinen Eigenschaften der Liouville'schen Flächen auszugehen, wollen wir einen directen geometrischen Weg einschlagen, auf dem wir die Eigenschaften der confocalen Flächen zweiten Grades verwerten, und wollen dann die so erhaltenen Ergebnisse mit denjenigen vergleichen, welche aus den allgemeinen Gleichungen in § 88, Kap. VI, folgen**).

Der grundlegende, von Chasles herrührende Satz, der geometrisch zur Bestimmung der geodätischen Linien führt, ist der folgende:

Das Strahlensystem, das von den gemeinschaftlichen Tangenten zweier confocaler Flächen zweiten Grades gebildet wird, ist ein Normalensystem.

Es seien nämlich ϱ', ϱ'' die Werte des Parameters ϱ in der Gleichung (9) für die beiden in Rede stehenden confocalen Flächen zweiten Grades und x', y', z'; x'', y'', z'' die Coordinaten der beiden Berührungspunkte eines Strahles jenes Strahlensystems mit den Flächen ϱ' bez. ϱ''. Dann haben wir:

*) Annales u. s. w., 3. Bd., 1886.

**) S. Darboux, 2. Bd., S. 295 u. f.

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{x'^2}{a^2+\varrho'} + \dfrac{y'^2}{b^2+\varrho'} + \dfrac{z'^2}{c^2+\varrho'} = 1, \\[2mm] \dfrac{x''^2}{a^2+\varrho''} + \dfrac{y''^2}{b^2+\varrho''} + \dfrac{z''^2}{c^2+\varrho''} = 1. \end{cases}$$

Da die Richtungscosinus der Normalen der beiden Flächen ϱ' und ϱ'' in den Punkten (x', y', z'), (x'', y'', z'') wegen der Gleichungen (13) bez.

$$\frac{x'}{a^2+\varrho'}, \quad \frac{y'}{b^2+\varrho'}, \quad \frac{z'}{c^2+\varrho'},$$
$$\frac{x''}{a^2+\varrho''}, \quad \frac{y''}{b^2+\varrho''}, \quad \frac{z''}{c^2+\varrho''}$$

proportional sind, so folgt hieraus nach Voraussetzung:

$$\frac{x'(x''-x')}{a^2+\varrho'} + \frac{y'(y''-y')}{b^2+\varrho'} + \frac{z'(z''-z')}{c^2+\varrho'} = 0,$$
$$\frac{x''(x''-x')}{a^2+\varrho''} + \frac{y''(y''-y')}{b^2+\varrho''} + \frac{z''(z''-z')}{c^2+\varrho''} = 0$$

oder wegen (15):

$$\frac{x'x''}{a^2+\varrho'} + \frac{y'y''}{b^2+\varrho'} + \frac{z'z''}{c^2+\varrho'} = 1,$$
$$\frac{x'x''}{a^2+\varrho''} + \frac{y'y''}{b^2+\varrho''} + \frac{z'z''}{c^2+\varrho''} = 1.$$

Durch Subtraction ergiebt sich aus den letzten beiden Gleichungen:

$$\frac{x'x''}{(a^2+\varrho')(a^2+\varrho'')} + \frac{y'y''}{(b^2+\varrho')(b^2+\varrho'')} + \frac{z'z''}{(c^2+\varrho')(c^2+\varrho'')} = 0.$$

Daraus folgt, dass die betrachteten beiden Normalen auf einander senkrecht stehen, und es ist somit der obige Satz bewiesen (vgl. § 143, S. 269).

Nach dieser Vorbemerkung bilden die auf der ersten Brennfläche ϱ' von den Strahlen umhüllten Curven eine Schar von ∞^1 geodätischen Linien auf dieser Fläche zweiten Grades. Wenn wir ferner die Fläche ϱ' fest und die andere Fläche ϱ'' sich ändern lassen, so erhalten wir alle geodätischen Linien auf der ersten Fläche.

§ 285. Gemeinsame Evolutenflächen.

Liouville hat den Weg angegeben, auf dem sich in den elliptischen Coordinaten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Gleichung der Schar paralleler Flächen, deren Normalen die Strahlen des vorhin betrachteten Strahlensystems und deren Brennflächen die Flächen zweiten Grades ϱ' und ϱ'' sind*), wirklich bilden lässt.

*) Diese beiden confocalen Flächen zweiten Grades sind also die beiden Mäntel der Evolutenfläche der Flächen Σ.

Um das Ergebnis **Liouvilles** abzuleiten, bemerken wir zunächst, dass, wenn die Function $\Theta(x, y, z)$ der Gleichung:

$$\Delta_1 \Theta = \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)^2 = 1 \quad \text{(s. S. 41, oben)}$$

genügt, die Flächen:

$$\Theta(x, y, z) = \text{Const.}$$

eine Schar von Parallelflächen sind (§ 275, Gl. (20)). Nun geht die Gleichung:

$$\Delta_1 \Theta = 1$$

in krummlinigen Coordinaten $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, in denen das Quadrat des Linienelements des Raumes die Orthogonalform:

$$ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2$$

annimmt, über in (vgl. S. 41):

$$\text{(16)} \qquad \frac{1}{H_1^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \frac{1}{H_2^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_2}\right)^2 + \frac{1}{H_3^2}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_3}\right)^2 = 1.$$

Wir führen jetzt elliptische Coordinaten ein, wobei wir der Kürze halber

$$\text{(17)} \qquad f(\varrho) = 4(a^2 + \varrho)(b^2 + \varrho^2)(c^2 + \varrho),$$

$$\text{(18)} \qquad \varphi(\varrho) = (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)(\varrho - \varrho_3)$$

setzen. Dann lautet Gleichung (14):

$$\text{(19)} \qquad ds^2 = \sum_i \frac{\varphi'(\varrho_i)}{f(\varrho_i)}\, d\varrho_i^2,$$

und Gleichung (16) geht über in:

$$\sum_i \frac{f(\varrho_i)}{\varphi(\varrho_i)}\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \varrho_i}\right)^2 = 1.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch:

$$\text{(20)} \qquad \Theta = \sum_i \int \sqrt{\frac{(\varrho_i - \alpha)(\varrho_i - \beta)}{f(\varrho_i)}}\, d\varrho_i,$$

wo α und β willkürliche Constanten sind, denn es ist identisch:

$$\sum_i \frac{(\varrho_i - \alpha)(\varrho_i - \beta)}{\varphi'(\varrho_i)} = 1,$$

wie aus den bekannten Formeln für die Zerlegung des Bruches:

$$\frac{(\varrho - \alpha)(\varrho - \beta)}{(\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2)(\varrho - \varrho_3)}$$

in Partialbrüche hervorgeht.

Die Gleichung:

$$\Theta(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3) = \text{Const.},$$

in der Θ den durch die Gleichung (20) gegebenen Wert hat, stellt demnach eine Schar von Parallelflächen dar. Wir wollen nun nachweisen, dass die beiden Mäntel der Evolutenfläche dieser Flächen eben die beiden Parameterflächen sind, die den Werten $\varrho = \alpha$ und $\varrho = \beta$ entsprechen.

§ 286. Geodätische Linien auf Mittelpunktsflächen zweiten Grades.

Da die Gleichung:

$$\Delta_1 \Theta = 1$$

für beliebige Werte der Grössen α und β gilt, so können wir sie nach α und nach β differenzieren. So erhalten wir:

$$\text{(a)} \qquad \nabla\left(\Theta, \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}\right) = 0, \quad \nabla\left(\Theta, \frac{\partial \Theta}{\partial \beta}\right) = 0,$$

wo ∇ das Symbol für den gemischten Differentialparameter ist (vgl. S. 41, (16)). Andrerseits ist infolge der Identität:

$$\sum \frac{1}{\varphi'(\varrho_i)} = 0$$

auch:

$$\text{(b)} \qquad \nabla\left(\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha}, \frac{\partial \Theta}{\partial \beta}\right) = 0.$$

Die drei Relationen (a) und (b) besagen nach § 275, dass die Flächenscharen:

$$\text{(21)} \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \text{Const.}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \text{Const.}$$

zusammen mit den Parallelflächen:

$$\Theta = \text{Const.}$$

ein dreifaches Orthogonalsystem bilden. Demnach sind die Flächen (21) die abwickelbaren Ortsflächen der Normalen der Flächen $\Theta = \text{Const.}$ (§ 269, Schlusssatz).

Wenn wir jetzt nur noch beachten, dass die erste der Gleichungen (21) differenziert giebt:

$$\sum \sqrt{\frac{\varrho_i - \beta}{(\varrho_i - \alpha) f(\varrho_i)}}\, d\varrho_i = 0,$$

dass demnach daraus, wenn ϱ_i gleich α gesetzt wird,

$$d\varrho_i = 0$$

folgt, so können wir schliessen, dass die abwickelbaren Flächen:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \alpha} = \text{Const.}$$

die Fläche des confocalen Systems mit dem Parameter α berühren. Desgleichen berühren die abwickelbaren Flächen:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \text{Const.}$$

die Fläche zweiten Grades mit dem Parameter β. Also sind die beiden Flächen zweiten Grades mit den Parametern α und β die beiden Mäntel der Evolutenflächen der Flächen:

$$\Theta = \text{Const.}$$

Wir können nun die Gleichung der geodätischen Linien auf der Fläche zweiten Grades mit dem Parameter α leicht angeben. Dabei wollen wir, um etwas bestimmtes vor Augen zu haben, voraussetzen, dass die Fläche etwa ein Ellipsoid sei*). Setzen wir in:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \beta} = \text{Const.}$$

ϱ_1 gleich α, so erhalten wir als gesuchte Gleichung:

$$(22) \qquad \int \sqrt{\frac{\varrho_2 - \alpha}{(\varrho_2 - \beta) f(\varrho_2)}}\, d\varrho_2 + \int \sqrt{\frac{\varrho_3 - \alpha}{(\varrho_3 - \beta) f(\varrho_3)}}\, d\varrho_3 = \text{Const.}$$

Sie stellt auf dem Ellipsoid $\varrho_1 = \alpha$ diejenigen geodätischen Linien dar, welche von den gemeinsamen Tangenten dieses Ellipsoids und der Fläche zweiten Grades mit dem Parameter β umhüllt werden. Sollen diese geodätischen Linien reell sein, so muss β der Parameter eines ein- oder eines zweischaligen Hyperboloids sein. Wird im ersten Falle in (22) ϱ_2 gleich β, im zweiten ϱ_3 gleich β gesetzt, so ergiebt sich bezüglich:

$$d\varrho_2 = 0, \quad d\varrho_3 = 0.$$

Demnach berühren die geodätischen Linien (22), die sich ergeben, wenn β fest bleibt und die Grösse rechts sich ändert, sämmtlich die Krümmungslinie:

$$\varrho_2 = \beta \quad \text{bez.} \quad \varrho_3 = \beta$$

des Ellipsoids. Lässt man dann in (22) auch noch die Grösse β sich ändern, so ergeben sich alle geodätischen Linien auf dem Ellipsoid.

287. Geodätische Linien auf dem Ellipsoid.

Indem wir die allgemeinen Formeln der voraufgehenden Paragraphen auf den Fall des Ellipsoids $\varrho_1 = 0$ mit der Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

*) Die Bestimmung der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid ist zum ersten Male von Jacobi durchgeführt worden (Crelles Journal, Bd. 19).

anwenden, wählen wir als Parameter u, v der Krümmungslinien die Längen der Hauptaxen der confocalen ein- bez. zweischaligen Hyperboloide, die das Ellipsoid eben in den Krümmungslinien schneiden. Wir setzen also:

$$u^2 = a^2 + \varrho_2, \quad v^2 = a^2 + \varrho_3$$

sowie ferner der Kürze halber:

$$a^2 - b^2 = h^2, \quad a^2 - c^2 = k^2.$$

Die Parameter u, v variieren innerhalb der durch die Ungleichungen:

$$k^2 \geqq u^2 \geqq h^2, \quad h^2 \geqq v^2 \geqq 0$$

angegebenen Grenzen. Das Quadrat des Linienelements lautet hier (nach S. 509, (14)):

$$(23) \quad ds^2 = (u^2 - v^2)\left[\frac{a^2 - u^2}{(u^2 - h^2)(k^2 - u^2)}\,du^2 + \frac{a^2 - v^2}{(h^2 - v^2)(k^2 - v^2)}\,dv^2\right]$$

und geht mittels der Substitutionen:

$$\int \sqrt{\frac{a^2 - u^2}{\sqrt{(u^2 - h^2)(k^2 - u^2)}}}\,du = u_1,$$

$$\int \sqrt{\frac{a^2 - v^2}{\sqrt{(h^2 - v^2)(k^2 - v^2)}}}\,dv = v_1$$

unmittelbar in die Liouville'sche Form (§ 88, S. 172, (22)) über. Die endliche Gleichung (22) der geodätischen Linien ist somit:

$$(24) \quad \int \sqrt{\frac{a^2 - u^2}{(u^2 - C)(u^2 - h^2)(k^2 - u^2)}}\,du \pm$$

$$\pm \int \sqrt{\frac{a^2 - v^2}{(C - v^2)(h^2 - v^2)(k^2 - v^2)}}\,dv = \text{Const.},$$

wie sich auch aus den Gleichungen des soeben angeführten Paragraphen ergeben würde. Für den Bogen σ der geodätischen Linien (24), gerechnet von einer festen Orthogonaltrajectorie an, erhalten wir nach § 88, S. 172, (23), den Wert:

$$(25) \quad \sigma = \int \sqrt{\frac{(a^2 - u^2)(u^2 - C)}{(u^2 - h^2)(k^2 - u^2)}}\,du \pm \int \sqrt{\frac{(a^2 - v^2)(C - v^2)}{(h^2 - v^2)(k^2 - v^2)}}\,dv,$$

worin sich das Vorzeichen nach dem Vorzeichen in (24) richtet. Bedeutet ferner ψ den Winkel, den die geodätischen Linien (24) mit den Krümmungslinien $v = \text{Const.}$ bilden, so haben wir die intermediäre Integralgleichung erster Ordnung:

$$(26) \quad u^2 \sin^2\psi + v^2 \cos^2\psi = \text{Const.}$$

Die Gleichungen (25) und (26) sind übrigens einfache Folgerungen aus (24).

Die Gleichung (26) gestattet eine elegante geometrische Deutung, die von Joachimsthal herrührt. Wir wollen sie nun entwickeln, wobei wir darauf hinweisen, dass dieser Gleichung nicht nur die geodätischen Linien, sondern auch die Krümmungslinien genügen.

Wir bemerken noch, dass wir bei den reellen geodätischen Linien auf dem Ellipsoid drei Arten unterscheiden können, je nach dem Wert der Constanten in der Gleichung (24). Damit eine solche geodätische Linie (24) reell sei, muss diese Constante C in dem Intervall:

$$k^2 > C > 0$$

liegen. Wird nun C ein fester Wert zwischen k^2 und h^2 erteilt, so berühren (S. 513) sämtliche geodätische Linien die Krümmungslinie:

$$u^2 = C.$$

Diese Krümmungslinie besteht aus zwei geschlossenen Teilen, die einander diametral gegenüberliegen und um je zwei Nabelpunkte des Ellipsoids geschlungen sind, ähnlich wie eine Ellipse um die beiden Brennpunkte (vgl. den folgenden Paragraphen). Die geodätischen Linien verlaufen ganz innerhalb der Ellipsoidzone zwischen diesen beiden geschlossenen Curven, welche sie beim Rückgange auf die Zone berühren, auf der sie sich im allgemeinen unzählig viele Male herumwinden, ohne sich zu schliessen. Liegt die Constante C in dem Intervall zwischen h^2 und Null, so tritt dasselbe bezüglich der Krümmungslinie:

$$v^2 = C$$

ein. Ist endlich C gleich h^2, so liegt der bemerkenswerte Fall vor, dass wir es mit geodätischen Linien zu thun haben, die von einem Nabelpunkt aus- und durch den diametral gegenüberliegenden hindurchgehen. Dieses erhellt schon daraus, dass die Fläche des confocalen Systems, die von den Tangenten der geodätischen Linien (24) für $C = h^2$ berührt wird, den Parameter $\varrho = -b^2$ hat, sich also auf die Focalhyperbel reduciert, die somit die genannten Tangenten schneiden. Die nämliche Eigenschaft ergiebt sich auch aus den folgenden Erörterungen.

§ 288. Satz von Joachimsthal.

Um den vorhin erwähnten Joachimsthal'schen Satz abzuleiten, stellen wir zunächst die folgenden Betrachtungen an: In einem beliebigen Punkte (x, y, z) des Ellipsoids legen wir die Tangentialebene und durch den Mittelpunkt die dazu parallele Ebene; dann hat die Schnittellipse zu Axen die Durchmesser, die den Richtungen der von (x, y, z) ausgehenden Krümmungslinien parallel sind. Bedeuten nämlich $\cos\alpha$,

$\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ die Richtungscosinus dieser Durchmesser, so haben wir:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{\partial x}{\partial \varrho_3} : \frac{\partial y}{\partial \varrho_3} : \frac{\partial z}{\partial \varrho_3} = \frac{x}{a^2+\varrho_3} : \frac{y}{b^2+\varrho_3} : \frac{z}{c^2+\varrho_3},$$

$$\cos\alpha' : \cos\beta' : \cos\gamma' = \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} : \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} : \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} = \frac{x}{a^2+\varrho_2} : \frac{y}{b^2+\varrho_2} : \frac{z}{c^2+\varrho_2}.$$

Hiernach folgt, wenn wir die beiden Gleichungen (§ 283):

$$(\mathrm{a})\quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{(a^2+\varrho_1)(a^2+\varrho_3)} + \dfrac{y^2}{(b^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_3)} + \dfrac{z^2}{(c^2+\varrho_1)(c^2+\varrho_3)} = 0, \\[2ex] \dfrac{x^2}{(a^2+\varrho_1)(a^2+\varrho_2)} + \dfrac{y^2}{(b^2+\varrho_1)(b^2+\varrho_2)} + \dfrac{z^2}{(c^2+\varrho_1)(c^2+\varrho_2)} = 0, \end{cases}$$

in denen ϱ_1 gleich Null zu setzen ist, von einander subtrahieren, sofort:

$$\frac{\cos\alpha\,\cos\alpha'}{a^2} + \frac{\cos\beta\,\cos\beta'}{b^2} + \frac{\cos\gamma\,\cos\gamma'}{c^2} = 0.$$

Diese Gleichung besagt, dass die beiden in Rede stehenden Durchmesser einander conjugiert sind, und da sie auch auf einander senkrecht stehen, so fallen sie eben mit den Axen des Centralschnittes zusammen.

Bedeuten nun weiter R_1 und R_2 die Längen der Halbaxen, die den Tangenten der Curven $u = \text{Const.}$ bez. $v = \text{Const.}$ parallel sind, so haben wir nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie:

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\cos^2\beta}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma}{c^2},$$

$$\frac{1}{R_2^2} = \frac{\cos^2\alpha'}{a^2} + \frac{\cos^2\beta'}{b^2} + \frac{\cos^2\gamma'}{c^2}$$

oder wegen der Gleichungen weiter oben:

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{\dfrac{x^2}{a^2(a^2+\varrho_3)^2} + \dfrac{y^2}{b^2(b^2+\varrho_3)^2} + \dfrac{z^2}{c^2(c^2+\varrho_3)^2}}{\dfrac{x^2}{(a^2+\varrho_3)^2} + \dfrac{y^2}{(b^2+\varrho_3)^2} + \dfrac{z^2}{(c^2+\varrho_3)^2}}$$

nebst einem analogen Ausdruck für $\frac{1}{R_2^2}$. Nun folgt aus der ersten der Gleichungen (a):

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+\varrho_3)} + \frac{y^2}{b^2(b^2+\varrho_3)} + \frac{z^2}{c^2(c^2+\varrho_3)} = 0,$$

also ist:

$$\frac{x^2}{(a^2+\varrho_3)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\varrho_3)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\varrho_3)^2} =$$

$$= -\varrho_3\left[\frac{x^2}{a^2(a^2+\varrho_3)^2} + \frac{y^2}{b^2(b^2+\varrho_3)^2} + \frac{z^2}{c^2(c^2+\varrho_3)^2}\right].$$

Folglich ist:

$$R_1^2 = -\varrho_3, \quad \text{analog} \quad R_2^2 = -\varrho_2,$$

d. h.:

(27) $$R_1^2 = a^2 - v^2, \qquad R_2^2 = a^2 - u^2.$$

Diese Gleichungen zeigen uns, dass R_1 die Länge der grossen und R_2 die der kleinen Halbaxe ist.

Im Centralschnitt ziehen wir nun den Halbmesser parallel derjenigen Tangente im Punkte (x, y, z) des Ellipsoids, welche mit den Curven $v = \text{Const.}$ den Winkel ψ bildet, und bezeichnen mit R seine Länge; dann haben wir bekanntlich:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{\cos^2\psi}{a^2 - u^2} + \frac{\sin^2\psi}{a^2 - v^2}.$$

Bedeutet ferner δ die Entfernung des Mittelpunkts von der Tangentialebene im Punkte (x, y, z), so ist:

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4},$$

d. h. wegen der Gleichungen (13) und (13*), S. 508, in denen ϱ_1 gleich Null zu setzen ist:

$$\frac{1}{\delta^2} = \frac{(a^2 - u^2)(a^2 - v^2)}{a^2 b^2 c^2} \,{}^{*)}.$$

Daraus folgern wir:

(27*) $$\frac{a^2 b^2 c^2}{\delta^2 R^2} = a^2 - (u^2 \sin^2\psi + v^2 \cos^2\psi).$$

Wenn wir dieses mit (26), der intermediären Integralgleichung der geodätischen Linien, vergleichen, so erhalten wir den Joachimsthal'schen Satz:

Bei jeder geodätischen Linie auf einem Ellipsoid ist das Product aus der Entfernung des Mittelpunktes von der Tangentialebene, die in einem Punkte der geodätischen Linie gelegt wird, und der Länge des Durchmessers, welcher der

---

*) An diese Gleichung kann die folgende Bemerkung geknüpft werden: Das Krümmungsmass in einem Punkte des Ellipsoids ist gegeben durch:

$$K = \frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 - u^2)^2 (a - v^2)^2};$$

daraus folgt:

$$K = \frac{\delta^4}{a^2 b^2 c^2}.$$

Also: Die Ortscurven der Punkte constanten Krümmungsmasses auf dem Ellipsoid sind diejenigen Curven, welche von den gemeinsamen Tangentialebenen des Ellipsoids und der concentrischen Kugeln umhüllt werden.

Tangente der geodätischen Linie in demselben Punkte parallel ist, constant.

Nach dem in § 287 Gesagten kommt dieselbe Eigenschaft ausser den geodätischen auch den Krümmungslinien zu. Daraus folgt wieder, dass für die geodätischen Linien, die ein und dieselbe Krümmungslinie berühren, die Constante δR oder auch die Constante C in der Gleichung (24) ein und denselben Wert hat.

§ 289. Geodätische Linien durch die Nabelpunkte.

Wir betrachten nun die vier reellen Nabelpunkte des Ellipsoids. Sie liegen auf der Hauptellipse, die die grösste und die kleinste Axe des Ellipsoids zu Axen hat, und ihre Coordinaten sind:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}} = \pm \frac{ah}{k}, \quad y = 0,$$

$$z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} = \mp \frac{c\sqrt{k^2 - h^2}}{k}.$$

Die Tangentialebene in jedem Nabelpunkt ist vom Mittelpunkt um die Strecke $\delta = \frac{ac}{b}$ entfernt, und jeder Halbmesser des durch eine zu ihr parallele Ebene erzeugten Centralschnitts ist gleich b. Also:

Bei jeder geodätischen Linie, die von einem Nabelpunkt ausgeht, hat das Product δR den constanten Wert ac. Der entsprechende Wert der Constanten auf der rechten Seite von (24) ist somit nach (27*) gleich h^2, wie wir bereits in § 287 bemerkt haben.

Aus dieser Thatsache ergeben sich bemerkenswerte Folgerungen, die zuerst von Roberts gezogen worden sind. Wir betrachten einen Ellipsoidpunkt M und verbinden ihn mit zwei nicht diametral einander gegenüberliegenden Nabelpunkten F und F_1 durch geodätische Bogen MF und MF_1. Die Constante δR hat für beide geodätische Linien denselben Wert; da in M auch δ gemeinsam ist, so müssen die beiden Durchmesser, die den Tangenten der beiden geodätischen Linien in M parallel gezogen werden, gleiche Länge haben. Sie bilden folglich mit den Axen des Centralschnitts gleiche Winkel. Da nun

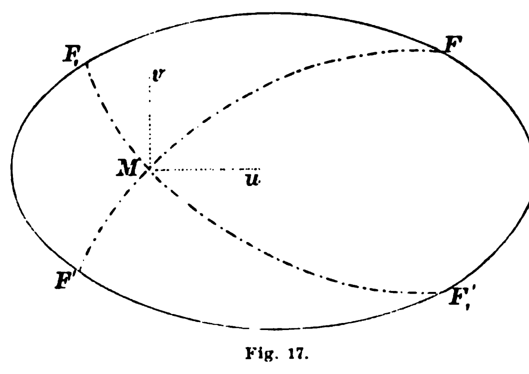


Fig. 17.

diese Axen den Richtungen der Krümmungslinien parallel sind, so folgt hieraus:

Die Richtungen der Krümmungslinien in M halbieren die Winkel zwischen den geodätischen Bogen MF und MF_1.

Daraus folgt weiter, dass der geodätische Bogen MF_1, der M mit dem F diametral gegenüberliegenden Nabelpunkt F' verbindet, die Verlängerung des geodätischen Bogens FM ist. Also:

Jede von einem Nabelpunkt ausgehende geodätische Linie geht durch den diametral-gegenüberliegenden Nabelpunkt. Wie zwei einander diametral gegenüberliegende Punkte auf der Kugel, ebenso können auch zwei solche Nabelpunkte auf dem Ellipsoid durch unzählig viele geodätische Bogen verbunden werden, die alle von gleicher Länge sein müssen, da ja schon infolge der Definition der geodätischen Linie beim Übergange von einer dieser Linien zur unendlich nahe benachbarten die erste Variation der Länge verschwindet.

Schon aus diesen Sätzen folgt, dass die Krümmungslinien auf dem Ellipsoid geodätische Ellipsen und Hyperbeln sind, deren Brennpunkte die Nabelpunkte des Ellipsoids sind. Doch wird dieses noch klarer aus den folgenden Paragraphen hervorgehen.

§ 290. **Einführung elliptischer Functionen.**

Die endliche Gleichung (24) der geodätischen Linien und die endliche Gleichung (25), die ihren Bogen giebt, gehen für den Fall, dass die geodätischen Linien von den Nabelpunkten ausgehen (also C gleich h^2 ist), bezüglich über in:

$$(28)\qquad \int^{*}\sqrt{\frac{a^2-u^2}{k^2-u^2}}\,\frac{du}{u^2-h^2} \mp \int^{*}\sqrt{\frac{a^2-v^2}{k^2-v^2}}\,\frac{dv}{h^2-v^2} = \text{Const.},$$

$$(29)\qquad \sigma = \int^{*}\sqrt{\frac{a^2-u^2}{k^2-u^2}}\,du \pm \int^{*}\sqrt{\frac{a^2-v^2}{k^2-v^2}}\,dv.$$

Die Quadraturen in den allgemeinen Gleichungen (24) und (25) führen offenbar auf hyperelliptische Integrale, die jetzt vorliegenden dagegen auf elliptische. Um sie auszuführen, setzen wir der Einfachheit halber die grösste Halbaxe des Ellipsoids gleich der Längeneinheit ($a = 1$) und können dann die Grösse $k = \sqrt{1-c^2} < 1$ als Modul einer Klasse Jacobi'scher elliptischer Functionen wählen, für welche die Grössen K und K' reell sind. Statt der Parameter u und v führen wir neue, τ und τ_1, ein mittels der Gleichungen:

$$u = k\,\mathrm{sn}\,\tau, \quad v = k\,\mathrm{sn}\,\tau_1.$$

Da h kleiner als k ist, setzen wir noch:

$$h = k \operatorname{sn} \alpha,$$

wo α eine reelle Grösse zwischen Null und K ist. Demnach haben wir:

$$a = 1, \quad b = \operatorname{dn} \alpha, \quad c = k', \quad h = k \operatorname{sn} \alpha.$$

Es ergeben somit die Gleichungen (12), S. 508, für die Coordinaten der Ellipsoidpunkte die Werte:

$$(30) \qquad x = \frac{\operatorname{sn} \tau \operatorname{sn} \tau_1}{\operatorname{sn} \alpha}, \quad y = \frac{\operatorname{dn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{cn} \alpha} \sqrt{(\operatorname{sn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 \alpha)(\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \tau_1)},$$

$$z = k' \frac{\operatorname{cn} \tau \operatorname{cn} \tau_1}{\operatorname{cn} \alpha},$$

worin wir bei Wahl des positiven Vorzeichens der Quadratwurzel und in Anbetracht des Umstandes, dass

$$k^2 \geqq u^2 \geqq h^2, \qquad h^2 \geqq v^2 \geqq 0,$$

d. h.

$$1 \geqq \operatorname{sn}^2 \tau \geqq \operatorname{sn}^2 \alpha, \qquad \operatorname{sn}^2 \alpha \geqq \operatorname{sn}^2 \tau_1 \geqq 0$$

bleiben muss, τ und τ_1 in den Intervallen:

$$\alpha \leqq \tau \leqq 2K - \alpha, \qquad -\alpha \leqq \tau_1 \leqq \alpha$$

variieren lassen müssen. Die Gleichungen (30) geben uns dann die Punkte des Halbellipsoids $y > 0$, und die vier Nabelpunkte:

$$F \equiv (\ \operatorname{sn} \alpha,\ 0,\ k' \operatorname{cn} \alpha), \qquad F' \equiv (-\operatorname{sn} \alpha,\ 0,\ -k' \operatorname{cn} \alpha),$$

$$F_1 \equiv (-\operatorname{sn} \alpha,\ 0,\ k' \operatorname{cn} \alpha), \qquad F_1' \equiv (\ \operatorname{sn} \alpha,\ 0,\ -k' \operatorname{cn} \alpha),$$

haben die krummlinigen Coordinaten τ und τ_1:

F: α, α; $\quad F'$: $2K - \alpha, -\alpha$; $\quad F_1$: $\alpha, -\alpha$; $\quad F_1'$: $2K - \alpha, \alpha$.

Die Gleichung (28) der geodätischen Linien wird:

$$\int \frac{\operatorname{dn}^2 \tau}{\operatorname{sn}^2 \tau - \operatorname{sn}^2 \alpha} d\tau \mp \int \frac{\operatorname{dn}^2 \tau_1}{\operatorname{sn}^2 \alpha - \operatorname{sn}^2 \tau_1} d\tau_1 = \text{Const.}$$

Ihr Bogen ist gegeben durch:

$$\sigma = \int \operatorname{dn}^2 \tau \, d\tau \pm \int \operatorname{dn}^2 \tau_1 \, d\tau_1.$$

Nehmen wir einen Punkt M auf dem Halbellipsoid $y > 0$ an und benutzen wir die Gleichungen für den geodätischen Bogen FM, wobei wir berücksichtigen, dass τ_1 abnimmt, wenn τ wächst, so sehen wir, dass wir die unteren Vorzeichen wählen müssen. Es ist daher

$$\sigma = \int_\alpha^\tau \operatorname{dn}^2 \tau \, d\tau - \int_\alpha^{\tau_1} \operatorname{dn}^2 \tau_1 \, d\tau_1$$

die Länge des geodätischen Bogens FM, gerechnet von F an, d. h.:

$$(31) \qquad \sigma = \frac{E}{K}(\tau - \tau_1) + Z(\tau) - Z(\tau_1),$$

wo $Z(\tau)$ die bekannte Jacobi'sche Function und E die Länge eines Quadranten der Hauptellipse in der xz-Ebene ist.

Für den geodätischen Bogen $F_1 M$ dagegen gelten die entgegengesetzten Vorzeichen. Also ist seine Länge gegeben durch:

$$(31^*) \qquad \sigma_1 = \frac{E}{K}(\tau + \tau_1) + Z(\tau) + Z(\tau_1).$$

Setzen wir in (31)

$$\tau = 2K - \alpha, \quad \tau_1 = -\alpha$$

oder in (31*)

$$\tau = 2K - \alpha, \quad \tau_1 = \alpha,$$

so erhellt, dass alle geodätischen Bogen FF' oder $F_1 F_1'$ dieselbe Länge $2E$ haben. Durch Addition und Subtraction folgt weiter:

$$\sigma_1 + \sigma = \frac{2E}{K}\tau + 2Z(\tau),$$

$$\sigma_1 - \sigma = \frac{2E}{K}\tau_1 + 2Z(\tau_1).$$

Die Krümmungslinien $\tau = \text{Const.}$, $\tau_1 = \text{Const.}$ sind also geodätische Ellipsen bez. Hyperbeln mit den Brennpunkten F und F_1. Wird aber einer der Brennpunkte durch den diametral entgegengesetzten, z. B. F_1 durch F_1', ersetzt, so werden die Curven $\tau_1 = \text{Const.}$ geodätische Ellipsen und die Curven $\tau = \text{Const.}$ geodätische Hyperbeln mit den Brennpunkten F und F_1'. Jede Krümmungslinie auf einem Ellipsoid kann daher in der Weise beschrieben werden, dass man die beiden Enden eines Fadens von constanter Länge in zwei nicht diametral gegenüberliegenden Brennpunkten befestigt und ihn mittels eines Stiftes in M auf dem Ellipsoid straff zieht; dann beschreibt die Spitze M des Stiftes eine Krümmungslinie.

§ 291. Linienelement auf dem Ellipsoid.

Wir wollen nun den Ausdruck für das Linienelement des Ellipsoids suchen, wenn die von einem Nabelpunkt ausgehenden geodätischen Linien und ihre orthogonalen Trajectorien zu Grunde gelegt werden. Wählen wir z. B. die vom Nabelpunkt F ausgehenden geodätischen Linien und gehen wir auf die Gleichungen (28) und (29) zurück, wobei wir setzen:

$$(28^*) \qquad \int^{*}\sqrt{\frac{a^2-u^2}{k^2-u^2}}\,\frac{du}{u^2-h^2} - \int^{*}\sqrt{\frac{a^2-v^2}{k^2-v^2}}\,\frac{dv}{v^2-h^2} = \Phi,$$

$$(29^*) \qquad \int^{*}\sqrt{\frac{a^2-u^2}{k^2-u^2}}\,du \qquad - \int^{*}\sqrt{\frac{a^2-v^2}{k^2-v^2}}\,dv = \sigma,$$

so sind die Curven $\Phi =$ Const. die geodätischen Linien und die Curven $\sigma =$ Const. ihre orthogonalen Trajectorien. Nun ist nach S. 67, (14), (15), (16), und S. 514, (23):

$$\varDelta_1 \Phi = \frac{1}{(u^2 - h^2)(h^2 - v^2)}, \quad \varDelta_1 \sigma = 1, \quad \nabla(\Phi, \sigma) = 0.$$

Demnach nimmt das Quadrat des Linienelements des Ellipsoids in den Coordinaten σ, Φ die Form an (§ 36, S. 68 und 69 oben):

$$ds^2 = d\sigma^2 + (u^2 - h^2)(h^2 - v^2) d\Phi^2. \tag{32}$$

Die Grösse auf der rechten Seite in der Gleichung (28*) der von F ausgehenden geodätischen Linien hängt lediglich von der Richtung der geodätischen Linie in F ab. Bezeichnen wir mit ω den Winkel, den der geodätische Bogen zwischen F und M mit der Richtung FF_1 der Hauptellipse $y = 0$ bildet, so ist Φ eine Function von ω, für die der wirkliche Ausdruck gesucht werden muss. Hierzu bestimmen wir die additive Constante von Φ in der Weise, dass wir setzen:

$$\Phi = \int_k^u \sqrt{\frac{a^2 - u^2}{k^2 - u^2}} \frac{du}{u^2 - h^2} - \int_0^v \sqrt{\frac{a^2 - v^2}{k^2 - v^2}} \frac{dv}{v^2 - h^2}. \tag{33}$$

Verbinden wir nun M mit F_1 und bezeichnen wir mit φ den Aussenwinkel F_1MF' des geodätischen Dreiecks MFF_1 bei M, so ist ω offenbar der Grenzwert von φ, der hervorgeht, wenn sich M bei der Verrückung auf dem betrachteten geodätischen Bogen MF dem Punkte F ohne Ende nähert.

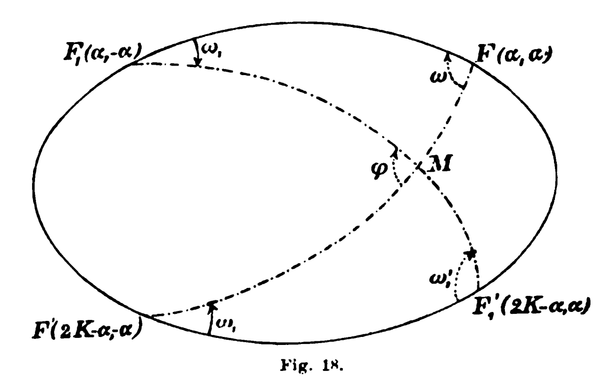


Fig. 18.

Nun halbiert nach S. 519 die von M ausgehende Krümmungslinie $v =$ Const. den Winkel F_1MF und bildet mit dem geodätischen Bogen FM den Winkel ψ, der durch die Gleichung (26) bestimmt wird, in der C gleich h^2 ist. Folglich ist

$$\varphi = \pi - 2\psi,$$

also:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \cot^2\psi = \frac{u^2 - h^2}{h^2 - v^2}$$

und somit:

(34) $$\operatorname{tg}^2\frac{\omega}{2} = \lim_{u=h,\, v=h}\frac{u^2 - h^2}{h^2 - v^2} = \lim_{u=h,\, v=h}\frac{u - h}{h - v}.$$

Schreiben wir nun die Gleichung (33) wie folgt:

$$\Phi = \int_k^u \left(\sqrt{\frac{a^2 - u^2}{k^2 - u^2}} - \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{k^2 - h^2}}\right)\frac{du}{u^2 - h^2} -$$

$$- \int_0^v \left(\sqrt{\frac{a^2 - v^2}{k^2 - v^2}} - \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{k^2 - h^2}}\right)\frac{dv}{v^2 - h^2} +$$

$$+ \sqrt{\frac{a^2 - h^2}{k^2 - h^2}}\left[\int_k^u \frac{du}{u^2 - h^2} - \int_0^v \frac{dv}{v^2 - h^2}\right],$$

so sehen wir, dass, wenn sich u und v dem Wert h nähern, die Differenz der beiden ersten Integrale gegen einen bestimmten und endlichen Grenzwert convergiert, der nur von den Constanten a, k, h abhängt, während der zweite Teil von Φ in der Form:

$$\frac{1}{2h}\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{k^2 - h^2}}\left[\log\frac{(u - h)(v + h)}{(h - v)(u + h)} - \log\frac{k - h}{k + h}\right]$$

geschrieben werden kann und in der Grenze für $u = h$, $v = h$ infolge von (34) gegen

$$\frac{1}{h}\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{k^2 - h^2}}\log\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} - \frac{1}{2h}\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{k^2 - h^2}}\log\frac{k - h}{k + h}$$

convergiert. Es ist also:

$$\Phi = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{a^2 - h^2}{k^2 - h^2}}\log\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} + A,$$

wo A eine Constante ist. Wird nun in der Gleichung (32) ω statt Φ als Parameter eingeführt, so geht sie über in:

$$ds^2 = d\sigma^2 + \frac{(a^2 - h^2)(u^2 - h^2)(h^2 - v^2)}{h^2(k^2 - h^2)\sin^2\omega}\, d\omega^2$$

oder:

(35) $$ds^2 = d\sigma^2 + \frac{y^2}{\sin^2\omega}\, d\omega^2,$$

worin y nach § 283, (12), S. 508, die Entfernung des Punktes M von der xz-Ebene, in der die Nabelpunkte liegen, bedeutet. Dieses ist die bemerkenswerte Gleichung, die von Roberts herrührt.

§ 292. Verlauf der geodätischen Linien.

Verbinden wir denselben Punkt M mit dem Nabelpunkt F_1 und bezeichnen wir mit σ_1 den geodätischen Bogen MF_1, mit ω_1 den Winkel MF_1F (siehe Fig. 18, S. 522), so haben wir eben gemäss obiger Gleichung:

$$ds^2 = d\sigma_1^2 + \frac{y^2}{\sin^2\omega_1} d\omega_1^2.$$

Daraus folgt:

$$(d\sigma - d\sigma_1)(d\sigma + d\sigma_1) = y^2 \left(\frac{d\omega_1}{\sin\omega_1} - \frac{d\omega}{\sin\omega}\right)\left(\frac{d\omega_1}{\sin\omega_1} + \frac{d\omega}{\sin\omega}\right).$$

Längs der Krümmungslinien:

$$u = \text{Const.}, \quad v = \text{Const.}$$

ist bezüglich (vgl. § 290, S. 521):

$$d\sigma + d\sigma_1 = 0, \quad d\sigma - d\sigma_1 = 0,$$

folglich:

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2} = \text{Const., bez. } \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\omega_1}{2}} = \text{Const.*)}.$$

Verlängern wir nun den geodätischen Bogen FM, bis er durch den gegenüberliegenden Nabelpunkt geht, und ist ω' der Winkel, den der geodätische Bogen $F'M$ zwischen F' und M mit dem Bogen $F'F_1'$ der Hauptellipse bildet, während σ' die Länge des Bogens $F'M$ bezeichnet (siehe Fig. 18), so haben wir wegen (35):

$$d\sigma^2 + \frac{y^2}{\sin^2\omega} d\omega^2 = d\sigma'^2 + \frac{y^2}{\sin^2\omega'} d\omega'^2.$$

Da ja

$$d\sigma'^2 = d\sigma^2$$

ist, folgt also:

$$\frac{d\omega^2}{\sin^2\omega} = \frac{d\omega'^2}{\sin^2\omega'}.$$

Mit Rücksicht darauf, dass ω' mit wachsendem ω abnimmt, ergiebt sich hieraus:

$$\frac{d\omega}{\sin\omega} + \frac{d\omega'}{\sin\omega'} = 0,$$

somit:

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2} = \text{Const.}$$

Der Wert der Constanten rechts lässt sich leicht durch den Winkel

---

*) Von der Richtigkeit dieser Zusammengehörigkeit überzeugen wir uns leicht, wenn wir berücksichtigen, dass längs der (Krümmungs-)Ellipse $z = 0$ ω mit abnehmendem ω_1 wächst, dagegen längs der Ellipse $x = 0$ ω und ω_1 gleichzeitig wachsen oder abnehmen.

Ω ausdrücken, der zu dem geodätischen Bogen gehört, der F mit dem Endpunkt der mittleren Axe verbindet. Es ist nämlich in diesem Falle:

$$\omega = \omega' = \Omega,$$

daher:

(36) $$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\Omega}{2}.$$

Im Anschluss an diese Gleichung können wir leicht den weiteren Verlauf der geodätischen Linien verfolgen. Der geodätische Bogen FMF' durchdringt in F' die xz-Ebene, setzt sich in einen neuen Bogen $F'NF$ auf dem anderen Halbellipsoid $y < 0$ fort und kehrt so nach F zurück. Hier schliesst er sich jedoch nicht, wie im Falle der Kugel; er bildet vielmehr, indem er von neuem von F ausgeht, mit dem Bogen FF_1 einen neuen Winkel $\omega^{(1)}$, der von ω verschieden ist. Wenn wir nämlich auf den neuen Bogen $F'NF$ die Gleichung (36) anwenden und dabei berücksichtigen, dass die neuen Werte von ω und ω' bez. $\pi - \omega^{(1)}$ und $\pi - \omega'$ sind, so erhalten wir:

$$\cot\frac{\omega^{(1)}}{2}\cot\frac{\omega'}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{\Omega}{2}.$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit (36) ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\frac{\omega^{(1)}}{2} = \lambda\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\quad\left(\lambda = \cot^4\frac{\Omega}{2}\right).$$

Da der Winkel Ω spitz, demnach $\lambda > 1$ ist, so folgt daraus:

$$\omega^{(1)} > \omega.$$

Bedeutet allgemein $\omega^{(n)}$ den Wert von ω nach n Umläufen der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid, so haben wir:

$$\operatorname{tg}\frac{\omega^{(n)}}{2} = \lambda^n\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}.$$

Es nähert sich also der Winkel $\omega^{(n)}$ mit wachsendem n immer mehr einem gestreckten, und die geodätische Linie schmiegt sich immer inniger der Hauptellipse an, die durch die Nabelpunkte geht.

Kapitel XX.

Dreifache pseudosphärische Orthogonalsysteme.

Ausdruck für das Quadrat des Linienelements des Raumes unter Zugrundelegung eines dreifachen pseudosphärischen Orthogonalsystems. — Entsprechen der Haupttangentencurven. — Beispiele. — Die Bäcklund'sche Transformation der pseudosphärischen Flächen. — Vertauschbarkeitssatz und Folgerungen daraus. — Weingarten'sche Systeme (pseudosphärische Systeme mit constantem Krümmungsmass). — Die Äquidistanzcurven sind parallele geodätische Kreise. — Weingarten'sche Systeme mit constanter Flexion. — Cykelsysteme. — Dreifaches System von Schraubenflächen. — Invarianz des Ausdrucks:

$$\frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)^2$$

bei einer Bäcklund'schen Transformation. — Complementärtransformation der Weingarten'schen Systeme. — Allgemeiner Satz von der Existenz der Weingarten'schen Systeme. — Pseudosphärische Systeme vom Radius Eins, die eine Kugel vom Radius Eins enthalten. — Weingarten'sche Systeme mit positivem Krümmungsmass.

---

§ 293. Linienelement des Raumes unter Zugrundelegung eines dreifachen pseudosphärischen Orthogonalsystems.

Die Ribaucour'schen Cykelsysteme mit constantem Radius (vgl. S. 351 und 457) liefern uns bereits ein Beispiel von dreifachen Orthogonalsystemen, in denen die Flächen eines der drei Systeme constantes Krümmungsmass haben. In diesem Kapitel wollen wir nun allgemein diejenigen dreifachen Orthogonalsysteme untersuchen, welche eine Schar von Flächen constanten Krümmungsmasses enthalten. Dabei wollen wir vor allem den Fall in Betracht ziehen, in dem diese Flächen pseudosphärische Flächen von constantem oder veränderlichem Radius sind, da uns eben nur in diesem Falle in der Bäcklund'schen Transformation ein geometrisches Verfahren zu Gebote steht, mittels dessen wir eine unbegrenzte Anzahl solcher Systeme finden können.

Wir schliessen von vornherein den Fall aus, in dem die Flächen constanten Krümmungsmasses in dem dreifachen System Rotations-

flächen sind. Dieser Fall ist nämlich wohlbekannt (§ 277), auch würden für die zugehörigen dreifachen Orthogonalsysteme die Gleichungen, die wir nun ableiten wollen, allgemein nicht gelten.

Wir setzen voraus, es seien in dem dreifachen Orthogonalsystem, das durch den Ausdruck für das Quadrat des Linienelements:

$$ds^2 = H_1^2 d\varrho_1^2 + H_2^2 d\varrho_2^2 + H_3^2 d\varrho_3^2$$

definiert ist, die Flächen $\varrho_3 = \text{Const.}$ pseudosphärische Flächen, deren Radius R nur von ϱ_3 abhänge. Aus den Gleichungen (S. 489):

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_3}$$

und aus der Annahme:

$$\frac{1}{r_{31}} \cdot \frac{1}{r_{32}} = -\frac{1}{R^2}$$

folgt, dass wir setzen können:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{H_1 H_3} \dfrac{\partial H_1}{\partial \varrho_3} = -\dfrac{\operatorname{tg} \omega}{R}, \\[2ex] \dfrac{1}{H_2 H_3} \dfrac{\partial H_2}{\partial \varrho_3} = \dfrac{\cot \omega}{R}, \end{cases}$$

worin der Winkel 2ω die Neigung der beiden Haupttangentencurven, die von einem Punkte der betreffenden pseudosphärischen Fläche $\varrho_3 = \text{Const.}$ ausgehen, gegen einander angiebt. Durch Einsetzen der Werte für $\frac{\partial H_1}{\partial \varrho_3}$ und $\frac{\partial H_2}{\partial \varrho_3}$, die sich aus den obigen Gleichungen ergeben, in den ersten beiden Lamé'schen Gleichungen der Gruppe (A), S. 485, folgt:

$$\frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \varrho_2} = -\frac{\sin \omega}{\cos \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_2}, \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \varrho_1} = \frac{\cos \omega}{\sin \omega} \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1},$$

und hieraus durch Integration:

$$(2) \qquad H_1 = \cos \omega \cdot \psi(\varrho_1, \varrho_3), \quad H_2 = \sin \omega \cdot \varphi(\varrho_2, \varrho_3),$$

wo ψ nur von ϱ_1 und ϱ_3, φ nur von ϱ_2 und ϱ_3 abhängt.

Wir wollen nun beweisen, was für unsere Untersuchung wesentlich ist, dass φ und ψ von ϱ_3 unabhängig sind, d. h., dass

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_3} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varrho_3} = 0$$

ist. Zu diesem Zwecke leiten wir aus (1) und (2) ab:

$$(3^*) \qquad H_3 = -R \cot \omega \left(-\operatorname{tg} \omega \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_3} + \frac{\partial \log \psi}{\partial \varrho_3}\right) =$$

$$= R \operatorname{tg} \omega \left(\cot \omega \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_3} + \frac{\partial \log \varphi}{\partial \varrho_3}\right).$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{tg} \omega \frac{\partial \log \varphi}{\partial \varrho_3} + \cot \omega \frac{\partial \log \psi}{\partial \varrho_3} = 0.$$

Beständen nun die Gleichungen (3) nicht, so würde sich hieraus ergeben:

$$(4)\qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{M(\rho_1, \rho_3)}{N(\rho_2, \rho_3)},$$

wo M von ρ_2 und N von ρ_1 unabhängig wäre. Betrachten wir nun eine specielle pseudosphärische Fläche $\rho_3 = c$ und ersetzen wir die Parameter ρ_1, ρ_2 bezüglich durch:

$$\rho_1' = \int v(\rho_1, c) d\rho_1, \qquad \rho_2' = \int v(\rho_2, c) d\rho_2,$$

so erhalten wir für das Quadrat des Linienelements der Fläche $\rho_3 = c$ wegen der Gleichungen (2) den Ausdruck:

$$(5)\qquad ds^2 = \cos^2 \omega \, d\rho_1'^2 + \sin^2 \omega \, d\rho_2'^2.$$

Darin ist wegen (4)

$$(6)\qquad \operatorname{tg} \omega = \frac{U(\rho_1')}{V(\rho_2')},$$

wo U nur von ρ_1' und V nur von ρ_2' abhängt. Da aber (5) das Quadrat des Linienelements einer pseudosphärischen Fläche vom Radius R ist, so muss ω, wie sich analog wie in § 264 für die Flächen mit positivem constantem Krümmungsmass nachweisen lässt, der partiellen Differentialgleichung:

$$(6^*)\qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho_1'^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \rho_2'^2} = \frac{\sin \omega \cos \omega}{R^2}$$

genügen. Wegen der Gleichung (6) ist dieses nur dann möglich, wenn sich U oder V auf eine Constante reduciert. In diesem Falle wären aber die Flächen $\rho_3 = c$ Rotationsflächen, was der Voraussetzung widerspricht*).

) Aus den Gleichungen (6) und (6) würde sich nämlich ergeben:

$$(a)\qquad \left(\frac{U''}{U} + \frac{V''}{V}\right)(U'^2 + V'^2) = \frac{U^2 + V^2}{R^2} + 2U'^2 + 2V'^2,$$

wobei die Striche Differentiationen andeuten.

Wird diese Gleichung nach ρ_1', die dann entstehende nach ρ_2' differenziert, so kommt:

$$\left(\frac{U''}{U}\right)' V V' + \left(\frac{V''}{V}\right)' U U' = 0,$$

also:

$$\left(\frac{U''}{U}\right)' = k U U', \quad \left(\frac{V''}{V}\right)' = -k V V' \qquad (k = \text{Const.}).$$

Durch Integration folgt:

$$\frac{U''}{U} = \frac{kU^2}{2} + C, \qquad \frac{V''}{V} = -\frac{kV^2}{2} + C',$$

$$2U'^2 = \frac{kU^4}{2} + 2CU^2 + C_1, \quad 2V'^2 = -\frac{kV^4}{2} + 2C'V^2 + C_1',$$

Es gelten somit die Gleichungen (3), und wenn wir die Parameter ϱ_1, ϱ_2 durch $\int \psi\, d\varrho_1$ bez. $\int \varphi\, d\varrho_2$ ersetzen, so erhalten wir aus (2) und (3*):

(7) $$H_1 = \cos\omega, \quad H_2 = \sin\omega, \quad H_3 = R\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}.$$

§ 294. Fortsetzung.

Durch diese Werte für H_1, H_2, H_3 werden die ersten beiden Lamé'schen Gleichungen (A), S. 485, identisch erfüllt; die vier übrigen gehen in die folgenden über:

(8) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3} = \cot\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_1}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3} - \operatorname{tg}\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_2}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}, \\ \dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1^2} - \dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2^2} = \dfrac{\sin\omega\cos\omega}{R^2}, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\dfrac{1}{\sin\omega}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}\right) = -\dfrac{1}{R}\,\dfrac{\partial}{\partial\varrho_3}\left(\dfrac{\cos\omega}{R}\right) - \dfrac{1}{\cos\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_1}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\dfrac{1}{\cos\omega}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}\right) = \dfrac{1}{R}\,\dfrac{\partial}{\partial\varrho_3}\left(\dfrac{\sin\omega}{R}\right) + \dfrac{1}{\sin\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_2}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}, \end{cases}$$

von denen die dritte als einfache Folge der zweiten und vierten weggelassen werden kann. Die erste kann übrigens zweckmässig in einer der beiden nachstehenden Formen geschrieben werden:

(8*) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\dfrac{1}{\sin\omega}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}\right) = -\dfrac{1}{\cos\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_2}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\dfrac{1}{\cos\omega}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}\right) = \dfrac{1}{\sin\omega}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_1}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}. \end{cases}$$

Wir haben somit das Ergebnis:

Das Quadrat des Linienelements des Raumes lässt sich bei Zugrundelegung eines dreifachen pseudosphärischen Orthogonalsystems (ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3) in die Form:

(9) $$ds^2 = \cos^2\omega\, d\varrho_1^2 + \sin^2\omega\, d\varrho_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3^2$$

bringen, wo R nur von ϱ_3 abhängt und der Radius der pseudosphärischen Flächen $\varrho_3 = \text{Const.}$ ist und die Function $\omega(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ dem Gleichungssystem (8) genügt.

Umgekehrt gehört zu jeder Lösung $\omega(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ dieses

---

wo C, C', C_1, C_1' neue Constanten sind. Somit geht (a) über in:

$$\left(C' - C - \frac{1}{R^2}\right)U^2 + \left(C - C' - \frac{1}{R^2}\right)V^2 = C_1 + C_1',$$

und diese Gleichung kann nur dann erfüllt sein, wenn U oder V constant ist, wie zu beweisen war.

Systems ein dreifaches pseudosphärisches Orthogonalsystem, in dem das Quadrat des Linienelements des Raumes die Form (9) annimmt.

Wir werden später sehen, dass es unzählig viele Lösungen des Systems (8) giebt, die von fünf willkürlichen Functionen abhängen, und werden den Weg angeben, auf dem sich beliebig viele wirklich finden lassen. Indem wir für jetzt diese Orthogonalsysteme als thatsächlich vorhanden annehmen, wollen wir sogleich auf eine wichtige Eigenschaft derselben hinweisen. Es sind nämlich die Gleichungen der Haupttangentencurven auf allen pseudosphärischen Flächen $\varrho_3 = \text{Const.}$ die folgenden:

$$\varrho_1 - \varrho_2 = \text{Const.}, \quad \varrho_1 + \varrho_2 = \text{Const.},$$

und wenn

$$\varrho_1 - \varrho_2 = 2\alpha, \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 2\beta$$

gesetzt wird, so geht (9) über in:

$$(9^*) \qquad ds^2 = d\alpha^2 + 2\cos 2\omega\, d\alpha\, d\beta + d\beta^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3^2.$$

Fassen wir also als entsprechende Punkte auf zwei pseudosphärischen Flächen des Systems ϱ_3 ihre beiden Schnittpunkte mit einer Parameterlinie ϱ_3 auf, so haben wir das Ergebnis:

Auf zwei pseudosphärischen Flächen des Systems entsprechen einander ausser den Krümmungslinien auch die Haupttangentencurven, und die entsprechenden Bogen sind gleich lang*).

Daraus folgt, dass auf den Ortsflächen der entsprechenden Haupttangentencurven diese Linien geodätische Linien sind. Dieses ergiebt sich auch unmittelbar aus (9*), denn wenn darin z. B. $\beta = \text{Const.}$ gesetzt wird, so folgt:

$$ds^2 = d\alpha^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3^2 \quad (\text{vgl. S. 158, (12)}).$$

Die Flächen der beiden Systeme $\alpha = \text{Const.}$, $\beta = \text{Const.}$ besitzen demnach eine Schar geodätischer Linien mit constanter Torsion**).

§ 295. Beispiele.

Wir geben zunächst einige Beispiele von dreifachen pseudosphärischen Orthogonalsystemen.

*) Offenbar lässt sich auch aussagen, dass auf zwei pseudosphärischen Flächen des Systems die conjugierten Curvensysteme einander entsprechen. In dieser Fassung ist der Satz auch auf den Fall anwendbar, in dem die Flächen $\varrho_3 = \text{Const.}$ positives constantes Krümmungsmass besitzen.

**) Die hier beiläufig erwähnten Flächen sind direct von Fibbi in seiner Habilitationsschrift untersucht worden. (Annali della Reale Scuola Normale Superiore di Pisa, 10. Bd., 1888.)

1) Wir suchen diejenigen Lösungen des Systems (8), welche von ϱ_2 unabhängig sind. In diesem Falle reduciert sich das System (8) auf die eine Gleichung:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1}\right)^2 + \frac{\cos^2 \omega}{R^2} = \text{Const.}^{*)}.$$

Integriert wird sie durch elliptische Functionen mit veränderlichem Modul k mittels der Gleichungen:

(10) $$\cos \omega = \operatorname{sn}(\tau, k), \quad \sin \omega = \operatorname{cn}(\tau, k),$$

worin

(10*) $$\tau = \frac{\varrho_1}{\lambda} + \psi(\varrho_3), \quad k = \frac{\lambda}{R},$$

λ eine willkürliche Constante und $\psi(\varrho_3)$, $R(\varrho_3)$ willkürliche Functionen von ϱ_3 sind. Die pseudosphärischen Flächen $\varrho_3 = \text{Const.}$ sind Rotationsflächen.

2) Wir betrachten ein System von ∞^1 Dini'schen pseudosphärischen Schraubenflächen (S. 467), die dieselbe Axe und dieselbe Tractrix zur Meridiancurve haben, aber hinsichtlich der Ganghöhe und also auch des Krümmungsmasses unter einander verschieden sind. Da hier die Kugeln, deren Radius gleich dem von der Asymptote abgeschnittenen constanten Stück der Tractrixtangente ist und deren Mittelpunkte die Axe erfüllen, die Dini'schen Schraubenflächen orthogonal in Krümmungslinien schneiden (s. ebenda), so folgt nach dem Darboux'schen Satze (S. 480), dass den beiden Systemen von ∞^1 Schraubenflächen und Kugeln ein drittes Flächensystem zugeordnet werden kann, das zu beiden Systemen orthogonal ist; wir haben somit ein dreifaches pseudosphärisches Orthogonalsystem.

Setzen wir der Einfachheit halber das constante Tangentenstück zwischen Tractrix und Asymptote gleich Eins, so ergeben sich zur Bestimmung des zugehörigen dreifachen pseudosphärischen Orthogonalsystems leicht die Gleichungen:

(11) $$\cos \omega = \operatorname{tgh} \tau, \quad \sin \omega = \frac{1}{\cosh \tau},$$

worin

(11*) $$\tau = \varrho_1 + \varrho_2 \operatorname{tgh} \varrho_3 + \psi(\varrho_3),$$

$\psi(\varrho_3)$ eine willkürliche Function von ϱ_3 und R gleich $\cosh \varrho_3$ ist.

Anmerkung. — Das soeben betrachtete pseudosphärische System, dessen Bestimmungsgleichungen leicht explicite anzugeben sind, ist

*) Die erste der Gleichungen (8) ist offenbar eine Identität. Die dritte und die vierte Gleichung ergeben unter Berücksichtigung der modificierten Gleichung übereinstimmend die Gleichung des Textes.

nur ein besonderer Fall von solchen, die eine Schar Enneper'scher pseudosphärischer Flächen enthalten. Diese Flächen, die allgemeiner sind als die Dini'schen Schraubenflächen, besitzen nämlich, wie bereits S. 471 bemerkt worden ist, eine Schar von Krümmungslinien auf Kugeln, welche die Flächen orthogonal schneiden und deren Mittelpunkte auf einer Geraden liegen. Wir können demnach bei ihnen dieselben geometrischen Überlegungen wie bei den Dini'schen Schraubenflächen anstellen.

§ 296. Anwendung der Bäcklund'schen Transformation.

Wir wollen nun nachweisen, dass wir in der gleichzeitig auf die ∞^1 pseudosphärischen Flächen eines bekannten dreifachen pseudosphärischen Orthogonalsystems angewandten Bäcklund'schen Transformation ein Mittel besitzen, aus diesem System ∞^2 neue dreifache pseudosphärische Orthogonalsysteme derselben Gattung abzuleiten.

Zu diesem Zwecke müssen wir vor allen Dingen den analytischen Ausdruck für die Bäcklund'sche Transformation aufstellen, angewandt auf eine pseudosphärische Fläche $\varrho_3 = c$ des Systems vom Radius $R(c)$. Wir bezeichnen mit k die unveränderliche Entfernung der Brennpunkte in der zugehörigen pseudosphärischen Congruenz, mit σ das Complement des Neigungswinkels der Brennebenen (§ 251 u. f.), sodass

$$k = R \cos \sigma$$

ist. Es sei ferner φ der Neigungswinkel eines Congruenzstrahls gegen die Krümmungslinien $\varrho_2 =$ Const. Transformieren wir die Fundamentalgleichungen (16), S. 453, aus den auf die Haupttangentencurven bezogenen Coordinaten:

$$\varrho_1 - \varrho_2 = 2u, \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 2v$$

in die jetzt vorliegenden, ϱ_1 und ϱ_2, denen die Krümmungslinien zu Grunde liegen, so erhalten wir die Gleichungen:

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} = \dfrac{\sin \varphi \cos \omega + \sin \sigma \cos \varphi \sin \omega}{k}, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} = -\dfrac{\cos \varphi \sin \omega + \sin \sigma \sin \varphi \cos \omega}{k}. \end{cases}$$

Nach dieser Vorbemerkung wenden wir auf jede pseudosphärische Fläche ϱ_3 des Systems eine durch die Gleichungen (12) bestimmte Bäcklund'sche Transformation an, wobei wir k einen willkürlichen festen Wert erteilen und σ mittels der Gleichung:

$$(13) \quad \cos \sigma = \frac{k}{R}$$

als Function von ϱ_3 auffassen. Wir wählen dann eine bestimmte Function $\varphi(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, die den Gleichungen (11) genügt, und fragen:

Welchen weiteren Bedingungen müssen wir die Function $\varphi(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ unterwerfen, damit die ∞^1 abgeleiteten pseudosphärischen Flächen wieder einem dreifachen Orthogonalsystem angehören?

Da bei der Bäcklund'schen Transformation die Krümmungslinien wieder in Krümmungslinien übergehen, so ist nach dem Darboux-Dupin'schen Satze hierzu notwendig und hinreichend, dass die neuen Curven ϱ_3 die Orthogonaltrajectorien der abgeleiteten pseudosphärischen Flächen sind*).

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Raumpunktes, bezogen auf das ursprüngliche System, x', y', z' die des Punktes, der aus ihm durch die Transformation hervorgeht. Dann haben wir (S. 452, (14)):

$$(14)\qquad \begin{cases} x' = x + k(\cos\varphi\, X_1 + \sin\varphi\, X_2), \\ y' = y + k(\cos\varphi\, Y_1 + \sin\varphi\, Y_2), \\ z' = z + k(\cos\varphi\, Z_1 + \sin\varphi\, Z_2), \end{cases}$$

wo X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 die Richtungscosinus der Tangenten der Parameterlinien ϱ_1 und ϱ_2 sind.

§ 297. **Fortsetzung.**

Aus den Gleichungen (12), S. 485 und 486, erhalten wir im vorliegenden Falle:

$$\frac{\partial X_1}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} X_2 + \frac{\sin\omega}{R} X_3, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial \varrho_2} = \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} X_2,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial \varrho_3} = \frac{R}{\cos\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} X_3,$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial \varrho_1} = -\frac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} X_1, \qquad \frac{\partial X_2}{\partial \varrho_2} = -\frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} X_1 - \frac{\cos\omega}{R} X_3,$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial \varrho_3} = \frac{R}{\sin\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} X_3$$

nebst analogen Gleichungen in Y und Z. Hiernach finden wir durch Differentiation der Gleichungen (14) und unter Berücksichtigung der Gleichungen (12):

$$(14^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x'}{\partial \varrho_1} = (\cos\omega \cos^2\varphi - \sin\sigma \sin\varphi \cos\varphi \sin\omega) X_1 + \\ \qquad + \cos\varphi(\sin\varphi\cos\omega + \sin\sigma\cos\varphi\sin\omega) X_2 + \dfrac{k\cos\varphi\sin\omega}{R} X_3, \end{cases}$$

*) Es ist ersichtlich, dass die Strecke k constant sein muss, wenn diese Überlegungen giltig sein sollen. Es müssen nämlich eine Parameterlinie ϱ_3 und ihre transformierte Curve Orthogonaltrajectorien der Strecken k sein, die entsprechende Punkte derselben verbinden.

$$(14^*)\begin{cases}\dfrac{\partial x'}{\partial \varrho_2} = \sin\varphi(\cos\varphi \sin\omega + \sin\sigma \sin\varphi \cos\omega) X_1 + \\ \qquad + (\sin\omega \sin^2\varphi - \sin\sigma \sin\varphi \cos\varphi \cos\omega) X_2 - \dfrac{k \sin\varphi \cos\omega}{R} X_3, \\ \dfrac{\partial x'}{\partial \varrho_3} = -k \sin\varphi \dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho_3} X_1 + k\cos\varphi \dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho_3} X_2 + \\ \qquad + R\left(\dfrac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\partial\varrho_3} + \dfrac{k\sin\varphi}{\sin\omega}\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\partial\varrho_3} + \dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right) X_3,\end{cases}$$

dazu analoge Gleichungen in y' und z'. Aus ihnen folgt:

$$\sum \frac{\partial x'}{\partial \varrho_1}\frac{\partial x'}{\partial \varrho_2} = 0,$$

$$\sum \frac{\partial x'}{\partial \varrho_1}\frac{\partial x'}{\partial \varrho_3} = $$
$$= k\cos\varphi \sin\omega \left(\sin\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_3} + \frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\partial\varrho_3} + \frac{k\sin\varphi}{\sin\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\partial\varrho_3} + \frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right),$$

$$\sum \frac{\partial x'}{\partial \varrho_2}\frac{\partial x'}{\partial \varrho_3} = $$
$$= -k\sin\varphi \cos\omega \left(\sin\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_3} + \frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\partial\varrho_3} + \frac{k\sin\varphi}{\sin\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\partial\varrho_3} + \frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right).$$

Wir brauchen somit φ nur der weiteren Bedingung:

$$(15)\qquad \sin\sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_3} + \frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\partial\varrho_3} + \frac{k\sin\varphi}{\sin\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\partial\varrho_3} + \frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3} = 0$$

zu unterwerfen, damit die Gleichungen (14) die Coordinaten x', y' z' eines Raumpunktes, ausgedrückt durch die Parameter ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 eines neuen dreifachen (pseudosphärischen) Orthogonalsystems, definieren. Unter der Voraussetzung, dass φ thatsächlich den Gleichungen (12) und (15) genügt, lässt sich der Nachweis hierfür ohne Schwierigkeit führen.

Die Gleichungen (14*) lassen sich nämlich so schreiben:

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial x'}{\partial\varrho_1} = (\cos\omega\cos\varphi - \sin\sigma\sin\varphi\sin\omega) X_1 +$$
$$+ (\sin\varphi\cos\omega + \sin\sigma\cos\varphi\sin\omega) X_2 + \cos\sigma\sin\omega X_3,$$

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial x'}{\partial\varrho_2} = (\cos\varphi\sin\omega + \sin\sigma\sin\varphi\cos\omega) X_1 +$$
$$+ (\sin\varphi\sin\omega - \sin\sigma\cos\varphi\cos\omega) X_2 - \cos\sigma\cos\omega X_3,$$

$$\frac{1}{R\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho_3}}\frac{\partial x'}{\partial\varrho_3} = -\cos\sigma\sin\varphi X_1 + \cos\sigma\cos\varphi X_2 - \sin\sigma X_3 \text{ (wegen (15))}.$$

Aus ihnen ergiebt sich unmittelbar die Gleichung:

$$(16)\qquad dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \cos^2\varphi\, d\varrho_1^2 + \sin^2\varphi\, d\varrho_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3^2,$$

aus der ersichtlich ist, dass das Linienelement des Raumes auf ein dreifaches pseudosphärisches Orthogonalsystem bezogen ist, wobei der Winkel ω des ursprünglichen Systems durch den Winkels φ ersetzt ist.

§ 298. **Abschluss.**

Wir haben nun noch zu zeigen, wie durch passend gewählte Functionen $\varphi(\varrho_1\ \varrho_2, \varrho_3)$ den drei simultanen Gleichungen (12) und (15) genügt werden kann. Wir können diese Gleichungen zu einer einzigen totalen Differentialgleichung für die unbekannte Function φ zusammenfassen, nämlich*):

$$(17)\qquad d\varphi = \left(\frac{\sin\varphi\cos\omega + \sin\sigma\cos\varphi\sin\omega}{k} - \frac{\partial\omega}{\partial\varrho_2}\right)d\varrho_1 - \\ - \left(\frac{\cos\varphi\sin\omega + \sin\sigma\sin\varphi\cos\omega}{k} + \frac{\partial\omega}{\partial\varrho_1}\right)d\varrho_2 - \\ - \frac{1}{\sin\sigma}\left(\frac{k\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3} + \frac{k\sin\varphi}{\sin\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3} + \frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)d\varrho_3 .$$

Diese Gleichung oder das äquivalente System der Gleichungen (12) und (15) ist unbeschränkt integrierbar, da ja die Integrabilitätsbedingungen wegen der Gleichungen (8) bez. (8*), denen ω genügt, und wegen der Relation:

$$\cos\sigma = \frac{k}{R}$$

identisch erfüllt sind. Ist also der Wert von k fest angenommen, so hat die Gleichung (17) eine allgemeine Lösung φ mit einer willkürlichen Constanten C. Um den Wert von C festzulegen, haben wir nur die Bäcklund'sche Transformierte einer der pseudosphärischen Flächen ϱ_3, von denen wir ausgegangen sind, oder die Richtung einer der Strecken k fest zu bestimmen, die übrigens willkürlich, wofern nur normal zur Parameterlinie ϱ_3, gegeben werden kann.

Wir bemerken, dass die Gleichung (17),

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \Lambda$$

gesetzt, für Λ eine totale Differentialgleichung vom Riccati'schen Typus liefert, von der wir also nur eine particuläre Lösung zu kennen brauchen, um das allgemeine Integral mittels Quadraturen zu erhalten. Für die neu abgeleiteten pseudosphärischen Systeme kennen wir bereits eine particuläre Lösung der zugehörigen Gleichung (17), nämlich die von dem pseudosphärischen Ausgangssystem gelieferte; wenn wir also den Wert der Constanten k ungeändert lassen, genügen schon successive Quadraturen zur unbeschränkt oftmaligen Ausführung der Bäck-

---

*) Wenn wir die Gleichung für φ in der Form des Textes schreiben, so schliessen wir natürlich den Wert $\sigma = 0$ aus, der in dem allgemeinen Falle eines veränderlichen R nicht auftreten kann. Für constantes R dagegen ist der Wert $\sigma = 0$ zulässig, und zwar giebt er zur Complementärtransformation der pseudosphärischen Flächen Anlass, die weiterhin (§ 306) betrachtet werden wird.

lund'schen Transformation. Aber wie für eine einzelne pseudosphärische Fläche, so kann auch in dem vorliegenden Falle das Verfahren merklich vereinfacht werden, wenn wir den Vertauschbarkeitssatz benutzen, der, wie wir nun nachweisen wollen, auch auf dreifache pseudosphärische Orthogonalsysteme anwendbar ist.

§ 299. Anwendung des Vertauschbarkeitssatzes.

Indem wir die für eine einzelne pseudosphärische Fläche angewandte Bezeichnungsweise (Kap. XVII) etwas ändern, verstehen wir symbolisch unter B_k die auf ein dreifaches pseudosphärisches Orthogonalsystem Σ angewandte Bäcklund'sche Transformation, wenn die constante Entfernung zwischen einem Punkte von σ und dem entsprechenden Punkte des abgeleiteten Systems Σ' gleich k ist. Wir beweisen nun die Giltigkeit des Vertauschbarkeitssatzes:

Sind Σ' und Σ'' zwei dreifache pseudosphärische Orthogonalsysteme, die mit ein und demselben System Σ mittels zweier Bäcklund'scher Transformationen B_k bez. $B_{k'}$, mit verschiedenen Constanten k und k', zusammenhängen, so giebt es ein viertes pseudosphärisches System Σ''', das mit Σ' und Σ'' mittels Bäcklund'scher Transformationen mit vertauschten Constanten k' bez. k zusammenhängt.

Es seien S, S', S'' drei entsprechende pseudosphärische Flächen in den drei Systemen. Nach dem für einzelne pseudosphärische Flächen giltigen Vertauschbarkeitssatze (§ 257) giebt es eine vierte, vollkommen bestimmte, pseudosphärische Fläche S''', die mit S' und S'' durch die Bäcklund'schen Transformationen $B_{k'}$ bez. B_k, mit vertauschten Constanten, zusammenhängt. Wir haben jetzt nur zu beweisen, dass die ∞^1 pseudosphärischen Flächen S''' einem vierten dreifachen Orthogonalsystem Σ''' angehören. Sind nun P, P', P'', P''' vier entsprechende Punkte auf S, S', S'', S''', und lassen wir P eine von den orthogonalen Trajectorien C der Flächen S im System Σ beschreiben, so werden infolge der in den voraufgehenden Paragraphen entwickelten Eigenschaften der Bäcklund'schen Transformation P' und P'' zwei Orthogonaltrajectorien der Schar S' bez. S'' beschreiben. Bedeutet C''' die von P''' beschriebene Curve, so brauchen wir nur zu berücksichtigen, dass die Strecken $P'P'''$ und $P''P'''$ constant und zu C' bez. C'' normal sind, und können dann daraus schliessen, dass sie zu C''' in P''' normal sind. Diese beiden Strecken sind aber Tangenten von S''' in P''', daher sind die Curven C''' Orthogonaltrajectorien der pseudosphärischen Flächen S'''. Erinnern wir uns endlich daran, dass

bei der Bäcklund'schen Transformation die Krümmungslinien Krümmungslinien bleiben, so sehen wir, dass die Flächen S'' in der That, wie behauptet wurde, wieder einem dreifachen pseudosphärischen Orthogonalsystem angehören.

Sind die drei Systeme Σ, Σ', Σ'' bekannt, die durch die Quadrate ihrer Linienelemente definiert sein mögen:

$$ds^2 = \cos^2\omega\, d\varrho_1^2 + \sin^2\omega\, d\varrho_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3^2,$$

$$ds'^2 = \cos^2\omega'\, d\varrho_1^2 + \sin^2\omega'\, d\varrho_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3^2,$$

$$ds''^2 = \cos^2\omega''\, d\varrho_1^2 + \sin^2\omega''\, d\varrho_2^2 + R^2\left(\frac{\partial\omega''}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3^2,$$

so ergiebt sich das vierte System Σ''', für das wir den zugehörigen Wert von ω mit ω''' bezeichnen wollen, durch algebraische Operationen aus der Gleichung (33), S. 463:

$$\text{(18)} \qquad \operatorname{tang}\frac{\omega''' - \omega}{2} = \frac{\cos\frac{\sigma + \sigma'}{2}}{\sin\frac{\sigma - \sigma'}{2}} \operatorname{tang}\frac{\omega' - \omega''}{2},$$

wo

$$\cos\sigma = \frac{k}{R}, \quad \cos\sigma' = \frac{k'}{R}$$

ist (vgl. S. 532, (13)).

Stellen wir die Überlegungen in § 259 an, so erhalten wir demnach die wichtige Folgerung:

Kennen wir von einem pseudosphärischen System Σ alle ∞^2 abgeleiteten Bäcklund'schen Systeme, so können wir für jedes von letzteren Systemen lediglich durch algebraische Rechnungen und Differentiationen die neuen abgeleiteten Systeme bestimmen.

Mit anderen Worten: Wir brauchen nur die Gleichung (17) für alle Werte von k integrieren zu können, dann sind die bei der unbegrenzt oftmaligen Anwendung der Bäcklund'schen Transformation nach einander auftretenden Gleichungen vom Riccati'schen Typus ohne weiteres gleichzeitig mit dieser integriert.

Den Bedingungen des soeben ausgesprochenen Satzes genügen nun eben die aus Dini'schen Schraubenflächen bestehenden, der Gleichung (11), S. 531, entsprechenden dreifachen pseudosphärischen Systeme. Ohne die diesbezüglichen Rechnungen durchzuführen, wollen wir dieses kurz folgendermassen nachweisen: Das System (8) besitzt die evidente Lösung $\omega = 0$. Wenden wir auf sie die Bäcklund'sche Transformation mit der Constanten k an, um eine neue Lösung φ zu erhalten, so sehen

wir leicht ein, dass φ nur den beiden Gleichungen (12) zu genügen braucht. Dieselben lauten in unserem Falle:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1} = \frac{\sin \varphi}{k}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2} = -\frac{\sin \sigma \sin \varphi}{k}$$

und geben integriert:

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = e^{\frac{\varrho_1 - \varrho_2 \sin \sigma}{k} + \psi(\varrho_3)},$$

wo ψ eine willkürliche Function von ϱ_3 ist. Hierin brauchen wir nur

$$k = 1, \quad \sin \sigma = -\operatorname{tgh} \varrho_3$$

zu setzen, dann erhalten wir sofort die Gleichungen (11). Zu der Lösung $\omega = 0$ kennen wir demnach alle Bäcklund'schen Transformierten und können somit den obigen Satz anwenden. Daraus folgt auch hier das Vorhandensein einer unendlichen Schar von dreifachen pseudosphärischen Systemen, die von gewöhnlichen Functionen abhängen (vgl. § 261).

§ 300. Weingarten'sche Systeme.

Wir wollen uns nun mit dem besonderen Falle beschäftigen, in dem die pseudosphärischen Flächen des dreifachen Orthogonalsystems alle denselben Radius haben. Der erste, der das Vorhandensein dieser pseudosphärischen Systeme erkannt hat, ist Weingarten gewesen, der auf die Möglichkeit des Überganges von einer Fläche mit constantem Krümmungsmass zu einer unendlich nahe benachbarten Fläche mit demselben Krümmungsmass hingewiesen hat, und zwar eines derartigen Überganges, dass der unendlich kleine normale Abstand zwischen den beiden Flächen eine Lösung der Cayley'schen Gleichung ist. Diese besonderen pseudosphärischen Systeme sollen deswegen, wie in den früher angeführten Abhandlungen des Verfassers, Weingarten'sche Systeme genannt werden.

Für diese Systeme setzen wir einfach R gleich Eins. Dann gehen die Fundamentalgleichungen (8), denen ω genügen muss, über in:

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1^2} - \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2^2} = \sin \omega \cos \omega, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \varrho_1}\left(\dfrac{1}{\cos \omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3}\right) = \cos \omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3} + \dfrac{1}{\sin \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3}, \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\dfrac{1}{\sin \omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3}\right) = \sin \omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3} - \dfrac{1}{\cos \omega} \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3}, \\[2ex] \dfrac{\partial^3 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = \cot \omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} - \operatorname{tg} \omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3}. \end{cases}$$

Da das Linienelement des Raumes unter Zugrundelegung des Weingarten'schen Systems durch

$$ds^2 = \cos^2\omega\, d\varrho_1^2 + \sin^2\omega\, d\varrho_2^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3^2$$

gegeben ist, so sind auf den pseudosphärischen Flächen ϱ_3 die Curven: $\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3} =$ Const. die Äquidistanzcurven (§ 275). Nun stellen wir zunächst den Satz auf:

In einem dreifachen orthogonalen Weingarten'schen System sind die Äquidistanzcurven auf den pseudosphärischen Flächen parallele geodätische Kreise.

Setzen wir für den Augenblick:

$$\varDelta = \left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)^2,$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (19) und (8*):

$$\frac{\partial\varDelta}{\partial\varrho_1} = 0, \quad \frac{\partial\varDelta}{\partial\varrho_2} = 0,$$

also:

$$\left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)^2 = F(\varrho_3),$$

wo F nur von ϱ_3 abhängt. Setzen wir dann:

$$n = \frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3},$$

so erhalten wir (S. 67):

$$\varDelta_1 n = \frac{1}{\cos^2\omega}\left(\frac{\partial n}{\partial\varrho_1}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega}\left(\frac{\partial n}{\partial\varrho_2}\right)^2,$$

wenn $\varDelta_1 n$ der erste Differentialparameter von n bezüglich des Quadrats des Linienelements der pseudosphärischen Fläche $\varrho_3 =$ Const.,

$$ds^2 = \cos^2\omega\, d\varrho_1^2 + \sin^2\omega\, d\varrho_2^2,$$

ist. Da also

$$\varDelta_1 n = F(\varrho_3) + n^2 \tag{20}$$

ist, so folgt (§ 81), dass die Äquidistanzcurven: $n =$ Const. auf der pseudosphärischen Fläche $\varrho_3 =$ Const. geodätisch parallel sind. Berechnen wir nun nach der Bonnet'schen Formel (4), S. 149, die geodätische Krümmung $\frac{1}{\varrho_n}$ der Äquidistanzcurven:

$$\frac{1}{\varrho_n} = \frac{1}{\sin\omega\cos\omega}\left[\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{\sin\omega}{\sqrt{\varDelta_1 n}}\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial n}{\partial\varrho_1}\right) + \left(\frac{\cos\omega}{\sqrt{\varDelta_1 n}}\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial n}{\partial\varrho_2}\right)\right],$$

unter Benutzung der Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial\varrho_1}\left(\frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial n}{\partial\varrho_1}\right) = n\cos\omega + \frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial n}{\partial\varrho_2}\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varrho_2}\left(\frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial n}{\partial\varrho_2}\right) = n\sin\omega - \frac{1}{\cos\omega}\frac{\partial n}{\partial\varrho_1}\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_1},$$

die aus (19) folgen, und der sich aus (20) ergebenden:

$$\frac{\partial \Delta_1 n}{\partial \varrho_1} = 2n \frac{\partial n}{\partial \varrho_1}, \quad \frac{\partial \Delta_1 n}{\partial \varrho_2} = 2n \frac{\partial n}{\partial \varrho_2},$$

so erhalten wir:

$$(21) \qquad \frac{1}{\varrho_n} = \frac{n}{\sqrt{\Delta_1 n}} = \frac{n}{\sqrt{F(\varrho_3) + n^2}}.$$

Es sind demnach die Äquidistanzcurven: $n =$ Const. auch Curven constanter geodätischer Krümmung und deshalb geodätische Kreise.

Daraus folgt (§ 39):

Auf den pseudosphärischen Flächen eines gegebenen Weingarten'schen Systems lassen sich die geodätischen Linien mittels Quadraturen bestimmen.

§ 301. Fortsetzung.

Wir bemerken, dass im vorliegenden Falle das System (19) völlig äquivalent ist dem folgenden:

$$(A) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1^2} - \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2^2} = \sin \omega \cos \omega, \\ \dfrac{1}{\cos^2 \omega}\left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \, \partial \varrho_3}\right)^2 + \dfrac{1}{\sin^2 \omega}\left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \, \partial \varrho_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}\right)^2 = F(\varrho_3). \end{cases}$$

Wir haben in der That gesehen, dass dieses aus dem System (19) folgt; aber umgekehrt folgt auch aus dem System (A) das System (19). Man setze nämlich:

$$M = \frac{1}{\cos \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \, \partial \varrho_3}, \quad N = \frac{1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \, \partial \varrho_3}$$

und differenziere die erste der Gleichungen (A) nach ϱ_3, die zweite das erste Mal nach ϱ_1, das zweite Mal nach ϱ_2. Die drei neu entstandenen Gleichungen, zusammen mit der vierten:

$$\frac{\partial (M \cos \omega)}{\partial \varrho_2} = \frac{\partial (N \sin \omega)}{\partial \varrho_1},$$

löse man nach den Differentialquotienten $\frac{\partial M}{\partial \varrho_1}, \frac{\partial M}{\partial \varrho_2}, \frac{\partial N}{\partial \varrho_1}, \frac{\partial N}{\partial \varrho_2}$ auf, so ergeben sich genau die Gleichungen (19). Ein Ausnahmefall würde dann eintreten, wenn die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos \omega & 0 & 0 & -\sin \omega \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ M & 0 & N & 0 \\ 0 & M & 0 & N \end{vmatrix} = N^2 \cos^2 \omega - M^2 \sin^2 \omega$$

gleich Null wäre. In diesem Falle würde aber hieraus und aus (20) folgen:



$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} = \varepsilon \cos^2 \omega \sqrt{F(\varrho_3) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}\right)^2} \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = \varepsilon' \sin^2 \omega \sqrt{F(\varrho_3) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}\right)^2} \quad (\varepsilon' = \pm 1).$$

Würde dann die erste dieser Gleichungen nach ϱ_2 und die zweite nach ϱ_1 differenziert, so ergäbe sich:

$$\frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} = \pm \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_2},$$

also:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1^2} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2^2},$$

was der ersten Gleichung (A) widerspricht.

Nach dieser Vorbemerkung haben wir nun drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die parallelen geodätischen Kreise $n =$ Const. einen imaginären oder einen reellen, im Endlichen gelegenen, Mittelpunkt haben oder Grenzkreise sind. Dementsprechend ist:

$$\frac{1}{\varrho_n} < 1, \quad \frac{1}{\varrho_n} > 1, \quad \frac{1}{\varrho_n} = 1.$$

Wegen (21) werden diese drei Fälle durch das Vorzeichen von $F(\varrho_3)$ unterschieden; es ist nämlich bezüglich:

$$F(\varrho_3) > 0, \quad F(\varrho_3) < 0, \quad F(\varrho_3) = 0.$$

Durch geeignete Änderung des Parameters ϱ_3 können wir in den ersten beiden Fällen

$$F(\varrho_3) = +1 \text{ bez. } F(\varrho_3) = -1$$

machen. Nun haben wir, unter ϑ den Winkel verstanden, den die positive Richtung der Hauptnormale der Parameterlinie ϱ_3 auf der pseudosphärischen Fläche mit der Curve $\varrho_2 =$ Const. bildet, nach den Gleichungen in § 274, S. 490:

$$(22) \qquad \cos \vartheta = -\frac{R_3}{r_{13}}, \quad \sin \vartheta = -\frac{R_3}{r_{23}},$$

wo R_3 der Radius der ersten Krümmung dieser Curven ist, die durch

$$\frac{1}{R_3} = \sqrt{\frac{1}{r_{13}^2} + \frac{1}{r_{23}^2}} = \frac{\sqrt{\Delta_1 n}}{n} = \varrho_n$$

gegeben ist. Die Flexion $\frac{1}{R_3}$ der Orthogonaltrajectorien der pseudosphärischen Flächen soll der Kürze halber die Flexion des Weingarten'schen Systems in dem betreffenden Raumpunkte genannt werden. Wir haben also das Ergebnis:

Die charakteristischen Gleichungen für die Function ω in einem Weingarten'schen System können wie folgt geschrieben werden:

$$(A^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1^2} - \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2^2} = \sin\omega \cos\omega, \\ \dfrac{1}{\cos^2\omega}\left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3}\right)^2 + \dfrac{1}{\sin^2\omega}\left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}\right)^2 = \pm 1, \end{cases}$$

je nachdem die Flexion des Systems grösser oder kleiner als Eins ist.

§ 302. Weingarten'sche Systeme mit der Flexion Eins.

Der in der Mitte liegende Fall, in dem die Flexion des Systems gleich Eins ist, ist besonders interessant. Dazu braucht nur eine der Curven ϱ_3 constante Flexion (gleich Eins) zu besitzen, so sind auf jeder pseudosphärischen Fläche des Systems infolge der Gleichungen (21) und (23) die Äquidistanzcurven: $n =$ Const. parallele Grenzkreise, und es besitzen demnach alle übrigen Curven ϱ_3 ebenfalls die constante Flexion Eins. In diesem Falle bezeichnen wir das Weingarten'sche System als ein solches mit constanter Flexion. Dasselbe ist durch den Wert $F(\varrho_3) = 0$ und somit durch die folgenden Gleichungen für ω charakterisiert:

$$(B) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1^2} - \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2^2} = \sin\omega \cos\omega, \\ \dfrac{1}{\cos^2\omega}\left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3}\right)^2 + \dfrac{1}{\sin^2\omega}\left(\dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}\right)^2. \end{cases}$$

Führen wir den durch die Gleichungen (22) bestimmten Winkel ϑ ein, so können wir, da R_3 gleich Eins ist, für das System (B) das nachstehende setzen:

$$(B^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1^2} - \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2^2} = \sin\omega \cos\omega, \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} = -\cos\vartheta \cos\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}, \\ \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = -\sin\vartheta \sin\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (19), die aus diesen folgen, geben dann:

$$(24) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} = \sin\vartheta \cos\omega, \\ \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_2} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} = -\cos\vartheta \sin\omega, \end{cases}$$

aus denen durch Elimination von ω folgt:

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_1^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_2^2} = \sin\vartheta \cos\vartheta.$$

Durch Differentiation der Gleichungen (24) nach ϱ_3 ergiebt sich:

$$(26)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} = \cos\vartheta \cos\omega \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_3}, \\ \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = \sin\vartheta \sin\omega \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_3}, \end{cases}$$

also ist:

$$(27)\quad \frac{1}{\cos^2\vartheta}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varrho_1 \partial\varrho_3}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\varrho_2\partial\varrho_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho_3}\right)^2.$$

Aus (25) und (27) folgt, dass ϑ dem System (B) genügt. Es bestimmt somit ϑ ein Weingarten'sches System mit constanter Flexion, das zur Gleichung:

$$ds^2 = \cos^2\vartheta\, d\varrho_1{}^2 + \sin^2\vartheta\, d\varrho_2{}^2 + \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3{}^2$$

gehört. Der geometrische Zusammenhang zwischen diesem neuen Weingarten'schen System mit constanter Flexion und dem alten wird später (§ 306) klar zu Tage treten.

§ 303. Ableitung der Ribaucour'schen Cykelsysteme.

Als Beispiele von Weingarten'schen Systemen mit constanter Flexion kennen wir bereits die Ribaucour'schen Cykelsysteme von constantem Radius. Um zu sehen, ob sich das Vorhandensein derselben auch aus den allgemeinen Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen ergiebt, bemerken wir, dass wir für die Torsion $\frac{1}{T_3}$ der Curven ϱ_3 in einem Weingarten'schen System mit constanter Flexion den Wert (§ 274):

$$\frac{1}{T_3} = \frac{\dfrac{\partial\vartheta}{\partial\varrho_3}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}}$$

haben. Ist also ϑ von ϱ_3 unabhängig, so ist $\frac{1}{T_3}$ gleich Null, d. h. die Curven ϱ_3 sind Kreise vom Radius Eins. Um die Systeme zu erhalten, brauchen wir nach dem vorhergehenden Paragraphen nur von einer beliebigen pseudosphärischen Fläche S auszugehen, für das unter Zugrundelegung der Krümmungslinien

$$ds^2 = \cos^2\vartheta\, d\varrho_1{}^2 + \sin^2\vartheta\, d\varrho_2{}^2$$

ist, und ω aus dem unbeschränkt integrierbaren System:

$$\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_1} + \frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho_2} = -\cos\vartheta \sin\omega,$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_2} + \frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho_1} = -\sin\vartheta\cos\omega$$

zu bestimmen; dann erhalten wir, unter ϱ_3 die in ω enthaltene willkürliche Constante verstanden, gerade die Gleichungen (B), die offenbar

ein Ribaucour'sches Cykelsystem charakterisieren. Dasselbe wird von den ∞^1 pseudosphärischen Complementärflächen von S gebildet (vgl. § 186).

Es mag noch bemerkt werden, dass aus der Combination der allgemeinen Gleichungen (26) im vorhergehenden Paragraphen und der letzten beiden Gleichungen (B)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_3}\frac{\partial \omega}{\partial \varrho_3} = \psi(\varrho_3)$$

folgt, wo $\psi(\varrho_3)$ nur von ϱ_3 abhängt, dass also, wenn $\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_3}$ für ein besonderes Wertepaar ϱ_1, ϱ_2 (was auch ϱ_3 sein mag), gleich Null ist, es auch für alle gleich Null ist. Also:

Wenn in einem Weingarten'schen System mit der constanten Flexion Eins eine von den Orthogonaltrajectorien der pseudosphärischen Flächen ein Kreis vom Radius Eins ist, so sind es auch alle anderen, und das System ist mit einem Ribaucour'schen Cykelsystem identisch.

§ 304. Dreifaches System von Schraubenflächen.

Um an einem wirklichen Beispiel das Vorhandensein Weingarten'scher Systeme mit constanter Flexion, abgesehen von den Cykelsystemen, zu erkennen, sehen wir zu, ob wir dem Fundamentalsystem (A) dadurch genügen können, dass wir w als Function einer linearen Combination der Variabeln:

$$\tau = \frac{\varrho_1}{a} + \frac{\varrho_2}{b} + \varrho_3 \quad (a, b = \text{Const.})$$

annehmen. Setzen wir:

$$\omega = f(\tau),$$

so ergiebt sich aus der ersten Gleichung (A):

$$f'' = \frac{a^2 b^2 \sin f \cos f}{b^2 - a^2}$$

und hieraus durch Integration:

$$f'^2 = C - \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\sin^2 f.$$

Die zweite Gleichung (A) stellt sich dann als identisch erfüllt heraus. Wählen wir

$$a > b, \quad C = 1,$$

so haben wir:

$$\tau = \int \frac{df}{\sqrt{1 - \frac{a^2 b^2}{a^2 - b^2}\sin^2 f}},$$

demnach:

$$\sin\omega = \operatorname{sn}(\tau, k), \quad \cos\omega = \operatorname{cn}(\tau, k) \quad \left(k = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right).$$

Für das Quadrat des Linienelements des Raumes ergiebt sich der bemerkenswerte Ausdruck:

$$ds^2 = \operatorname{cn}^2\tau\, d\varrho_1{}^2 + \operatorname{sn}^2\tau\, d\varrho_2{}^2 + \operatorname{dn}^2\tau\, d\varrho_3{}^2,$$

wo

$$\tau = \frac{\varrho_1}{a} + \frac{\varrho_2}{b} + \varrho_3$$

ist, der Modul k und die Constante a willkürlich bleiben und

$$\frac{1}{b} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{k^2}}$$

ist. Für die reciproken Werte der Hauptkrümmungsradien der Flächen der drei Systeme finden wir die Ausdrücke (§ 274, (13)):

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{1}{a}\frac{\operatorname{dn}\tau}{\operatorname{sn}\tau}, \quad \frac{1}{r_{23}} = -\frac{k^2}{b}\frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{dn}\tau}, \quad \frac{1}{r_{31}} = -\frac{\operatorname{sn}\tau}{\operatorname{cn}\tau},$$

$$\frac{1}{r_{13}} = -\frac{k^2}{a}\frac{\operatorname{sn}\tau}{\operatorname{dn}\tau}, \quad \frac{1}{r_{21}} = -\frac{1}{b}\frac{\operatorname{dn}\tau}{\operatorname{cn}\tau}, \quad \frac{1}{r_{32}} = \frac{\operatorname{cn}\tau}{\operatorname{sn}\tau},$$

mithin für die Krümmungsmasse bezüglich:

$$K_1 = -\frac{k^2}{a^2}, \quad K_2 = +\frac{k^2}{b^2}, \quad K_3 = -1.$$

Es lässt sich leicht einsehen, dass die Flächen der drei Systeme Schraubenflächen mit derselben Axe sind, sowie dass die Flächen jedes Systems einander congruent sind. Diejenigen des ersten und des dritten Systems haben negatives, diejenigen des zweiten Systems positives constantes Krümmungsmass *). Jede beliebige Schraubenfläche mit constantem Krümmungsmass führt auf ein Weingarten'sches System der obigen Gattung.

Ferner erhalten wir für die Flexion $\frac{1}{R_3}$ der Curven ϱ_3 den Wert:

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{r_{13}{}^2} + \frac{1}{r_{23}{}^2} = 1 + \frac{k^4 - b^2}{b^2 \operatorname{dn}^2\tau}.$$

Setzen wir daher insbesondere:

$$b = k^2,$$

woraus

$$a = \frac{k^2}{k'}$$

folgt, so haben wir ein Weingarten'sches System mit constanter Flexion.

*) Es liegt somit hier gleichzeitig ein Beispiel für Weingarten'sche Systeme mit positivem Krümmungsmass vor, die wir am Schlusse dieses Kapitels (§ 314) behandeln werden.

Dasselbe artet aber nicht in ein Ribaucour'sches Cykelsystem aus, denn für die Torsion der Curven ϱ_3 erhalten wir den Wert:

$$\frac{1}{T_3} = \frac{k'}{\operatorname{dn}^2 \tau},$$

der von Null verschieden ist.

§ 305. Anwendung der Bäcklund'schen Transformation auf Weingarten'sche Systeme.

Wenn wir auf ein Weingarten'sches System die Bäcklund'sche Transformation anwenden (§ 296 u. f.), so erhalten wir neue Weingarten'sche Systeme. Die Gleichung (17) liefert in dem vorliegenden Falle für $k = \cos\sigma$, $R = 1$ das Gleichungssystem:

$$(28) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_1} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} = \dfrac{\sin\varphi \cos\omega + \sin\sigma \cos\varphi \sin\omega}{\cos\sigma}, \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_2} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} = -\dfrac{\cos\varphi \sin\omega + \sin\sigma \sin\varphi \cos\omega}{\cos\sigma}, \\ \qquad \sin\sigma \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_3} + \dfrac{\cos\sigma \cos\varphi}{\cos\omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} + \dfrac{\cos\sigma \sin\varphi}{\sin\omega} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} + \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3} = 0. \end{cases}$$

Die Function φ, die das transformierte System bestimmt, genügt den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho_1^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho_2^2} = \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho_3}\right)^2 = f(\varrho_3).$$

Nun ist hervorzuheben, dass der Wert der Function $f(\varrho_3)$ mit dem ähnlich gebildeten von $F(\varrho_3)$ in den Gleichungen (A), denen ω genügt, genau übereinstimmt. Aus (28) folgen nämlich unter Berücksichtigung von (19) die Gleichungen:

$$(28^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\cos\sigma}{\cos\varphi} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} = \cos\omega \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_3} + \sin\sigma \cos\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3} + \\ \qquad + \cos\sigma \sin\varphi \operatorname{tang}\omega \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} - \cos\sigma \cos\varphi \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3}, \\ \dfrac{\cos\sigma}{\sin\varphi} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = \sin\omega \dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho_3} + \sin\sigma \sin\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3} - \\ \qquad - \cos\sigma \sin\varphi \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} + \cos\sigma \cos\varphi \cot\omega \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3}. \end{cases}$$

Aus ihnen ergiebt sich durch Quadrieren und Addieren mit Rücksicht auf die dritte der Gleichungen (28) die Beziehung:

$$(29) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{\cos^2\varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho}\right)^3 = \\ &\qquad = \frac{1}{\cos^2\omega} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\omega} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}\right)^{2\,1)}. \end{aligned}$$

Hiernach ist die Flexion des abgeleiteten Systems grösser oder gleich oder kleiner als Eins, je nachdem einer der drei Fälle für das ursprüngliche System zutrifft. Insbesondere gilt der Satz:

Jedes Weingarten'sche System mit constanter Flexion geht durch eine Bäcklund'sche Transformation in Systeme der nämlichen Art über.

Setzen wir weiter in diesem Falle (§ 301):

$$\cos\vartheta = -\frac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}}{\cos\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}}, \quad \sin\vartheta = -\frac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}}{\sin\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}},$$

$$\cos\psi = -\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}}{\cos\varphi\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho_3}}, \quad \sin\psi = -\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}}{\sin\varphi\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varrho_3}},$$

so geht das System (28*) unter Benutzung der dritten Gleichung (28) über in:

$$\cos\psi = \frac{\cos\omega\cos(\varphi-\vartheta) - \sin\sigma\sin\omega\sin(\varphi-\vartheta) - \cos\sigma\cos\omega}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\vartheta)},$$

$$\sin\psi = \frac{\sin\omega\cos(\varphi-\vartheta) + \sin\sigma\cos\omega\sin(\varphi-\vartheta) - \cos\sigma\sin\omega}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\vartheta)}.$$

Daraus folgt durch Differentiation nach ϱ_3:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varrho_3} + \frac{\sin\sigma}{1-\cos\sigma\cos(\varphi-\vartheta)}\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho_3} = 0.$$

Ist also $\frac{\partial\vartheta}{\partial\varrho_3} = 0$, so ist auch $\frac{\partial\psi}{\partial\varrho_3} = 0$, d. h. (§ 303):

Die Ribaucour'schen Cykelsysteme gehen durch eine Bäcklund'sche Transformation wieder in Cykelsysteme über*).

*) Der Beweis dieses und des vorigen Satzes kann geometrisch geführt werden auf Grund des geometrischen Gesetzes, nach dem die Bäcklund'sche Transformation eine Orthogonaltrajectorie C der pseudosphärischen Flächen eines Weingarten'schen Systems in die entsprechende Curve C' des transformierten Systems überführt. Die Strecke PP', die zwei entsprechende Punkte P auf C und P' auf C' verbindet, ist constant gleich $\cos\sigma$, und der Winkel, den die Tangenten in P an C und in P' an C' mit einander bilden, ist das Complement zu σ. Bei der directen Behandlung einer solchen Transformation für eine beliebige Curve C ergiebt sich, wenn mit ϑ der Neigungswinkel der Strecke PP' gegen die Hauptnormale von C in P bezeichnet wird, in den üblichen Bezeichnungen:

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{T} + \frac{1}{\sin\sigma}\left(\frac{\cos\sigma\cos\vartheta}{\varrho} - 1\right).$$

Besitzt die Curve C die constante Flexion Eins, so gilt dasselbe von der Curve C'. Ist noch specieller C ein Kreis, so ist es auch C'.

Wir bemerken noch, dass, wenn C auf einer Kugel vom Radius $\cos\sigma$ liegt,

Nach diesen Sätzen und nach den Ergebnissen des vorigen Paragraphen ist ersichtlich, dass es unendlich viele Weingarten'sche Systeme mit constanter Flexion giebt, die keine Ribaucour'schen Cykelsysteme sind.

§ 306. Die Complementärtransformation.

Bei der Anwendung der Bäcklund'schen Transformation auf Weingarten'sche Systeme ist der bemerkenswerte besondere Fall denkbar, in dem der Winkel σ gleich Null ist und die Bäcklund'sche Transformation somit in die Complementärtransformation übergeht (§ 255), was in dem allgemeinen Falle pseudosphärischer Systeme von veränderlichem Radius R nicht eintreten konnte.

Dann geht die dritte der Gleichungen (28) über in:

$$\frac{\cos\varphi}{\cos\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}+\frac{\sin\varphi}{\sin\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}+\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}=0. \tag{30}$$

Da

$$\frac{1}{r_{13}}=\frac{1}{\cos\omega}\frac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}},\qquad \frac{1}{r_{23}}=\frac{1}{\sin\omega}\frac{\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}}{\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}}$$

ist, so kann sie wegen der Gleichungen (22), S. 541, auch wie folgt geschrieben werden:

$$\cos(\varphi-\vartheta)=R_3. \tag{30*}$$

Hieraus ergeben sich somit zwei verschiedene reelle Werte von φ für Weingarten'sche Systeme mit der Flexion $\frac{1}{R_3}>1$, und der einzige Wert $\varphi=\vartheta$ für Systeme mit der constanten Flexion $\frac{1}{R_3}=1$. Nun brauchen wir nur die Gleichung (30) das erste Mal nach ϱ_1, das zweite Mal nach ϱ_2 zu differenzieren und die Gleichungen (19) zu berücksichtigen, um uns zu überzeugen, dass die so bestimmten Werte für φ den beiden ersten Gleichungen (28) wirklich genügen.

Um dieses Ergebnis geometrisch zu deuten, wählen wir als Parameterlinien $\alpha=$ Const., $\beta=$ Const. auf einer pseudosphärischen Fläche des Systems, dessen Flexion $\frac{1}{R_3}$ wir grösser als Eins annehmen, die geodätischen Äquidistanzkreise und die zu ihnen orthogonalen geodä-

---

C' sich auf einen Punkt, den Kugelmittelpunkt, zusammenzieht, wie hervorgeht, wenn

$$\cos\vartheta=\frac{\varrho}{\cos\sigma},\quad \frac{d\vartheta}{ds}=\frac{1}{T}$$

gesetzt wird.

tischen Linien. Das Quadrat des Linienelements der Fläche nimmt dann die hyperbolische Form an (vgl. S. 190):

$$ds^2 = d\alpha^2 + \cosh^2\alpha \, d\beta^2 .$$

Bezeichnen wir nun mit Ω den Winkel, den die durch (30) bestimmte Richtung mit der geodätischen Linie $\beta = \text{Const.}$ bildet, so haben wir:

$$\Omega = \varphi - \vartheta ,$$

und da wegen (23), S. 541,

$$\frac{1}{R_s} = \varrho_n = \coth \alpha$$

ist, so geht (30*) über in:

$$\cos \Omega = \operatorname{tgh} \alpha ,$$

wo α die geodätische Entfernung des betreffenden Flächenpunktes P von der geodätischen Linie $\alpha = \text{Const.}$ ist. Aber zufolge der Gleichung für den Parallelitätswinkel auf pseudosphärischen Flächen (S. 430) ist Ω nichts anderes als der Parallelitätswinkel bezüglich des Punktes P und der geodätischen Linie $\alpha = 0$.

Wir haben somit das folgende Ergebnis:

Gegeben sei ein Weingarten'sches System Σ mit der Flexion $\frac{1}{R_s} > 1$. Man betrachte auf jeder pseudosphärischen Fläche S des Systems diejenige bestimmte geodätische Linie g, welche zu den Äquidistanzcurven gehört, und ziehe die geodätischen Parallelen zu g in einer der beiden möglichen Richtungen. Wird zu S die Complementärfläche $S^{(1)}$ oder $S^{(-1)}$ bezüglich einer der beiden Scharen von geodätischen Parallelen genommen, so bilden die ∞^1 Flächen $S^{(1)}$ oder $S^{(-1)}$ zwei neue Weingarten'sche Systeme $\Sigma^{(1)}$ und $\Sigma^{(-1)}$.

Dieselben mögen als die Complementärsysteme von Σ bezeichnet werden. Nach dem vorigen Paragraphen ist ihre Flexion, ebenso wie die von Σ selbst, grösser als Eins.

Wir können nun sowohl auf $\Sigma^{(1)}$, als auch auf $\Sigma^{(-1)}$ wieder die Complementärtransformation anwenden. Da aber eins der beiden neuen Complementärsysteme jedenfalls das Ausgangssystem Σ ist, so erhellt, dass das gegebene System Σ lediglich vermittelst Differentiationen eine Reihe Weingarten'scher Systeme:

$$\ldots \Sigma^{(-2)}, \quad \Sigma^{(-1)}, \quad \Sigma, \quad \Sigma^{(1)}, \quad \Sigma^{(2)} \ldots$$

liefert, die sich nach beiden Seiten bis ins Unendliche fortsetzt und in der jedes System die beiden Nebensysteme zu Complementärsystemen hat.

Hat aber das System Σ die constante Flexion $\frac{1}{R_s} = 1$, so giebt

es ein einziges Complementärsystem $\Sigma^{(1)}$ ebenfalls mit constanter Flexion. Infolge der Eigenschaften der Complementärtransformation ist klar, dass in diesem Falle die Orthogonaltrajectorien der pseudosphärischen Flächen von $\Sigma^{(1)}$ die Ortscurven der Krümmungsmittelpunkte der entsprechenden Orthogonaltrajectorien im Ausgangssystem Σ sind.

§ 307. Einleitung zum Beweise des Existenztheorems.

Bisher ergab sich für uns das Vorhandensein unendlich vieler dreifacher pseudosphärischer Orthogonalsysteme lediglich aus der Anwendung der Bäcklund'schen Transformation auf gegebene pseudosphärische Ausgangssysteme. Diese Methode aber ermöglicht es uns nicht, den Freiheitsgrad für die Systeme festzustellen; auch können wir sie nicht auf solche dreifache Orthogonalsysteme anwenden, die eine Schar von Flächen mit positivem constanten Krümmungsmass enthalten. Solche Orthogonalsysteme giebt es nämlich auch, wie wir am Schlusse dieses Kapitels entwickeln werden, und zwar von demselben Freiheitsgrade.

Wir wollen nun eben in den letzten Paragraphen dieses Kapitels den allgemeinen Beweis des Satzes von der Existenz unserer Systeme behandeln, und zwar leiten wir ihn aus den allgemeinen Sätzen von Cauchy über die Reihenentwickelungen der Integrale partieller Differentialgleichungen ab. Der Kürze halber beschränken wir uns auf den Fall der Weingarten'schen Systeme, d. h. auf den Fall, in dem das Krümmungsmass für alle Flächen des Systems $\varrho_3 =$ Const. dasselbe ist; doch wird der Leser sehen, dass das Verfahren allgemein anwendbar ist.

Zu Grunde legen wir unseren Untersuchungen folgende Thatsache: Ein Weingarten'sches System $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$, in dem die Flächen constanten Krümmungsmasses die Flächen $\varrho_3 =$ Const. sein mögen, ist völlig bestimmt, sobald eine Fläche eines der Systeme $\varrho_1 =$ Const. oder $\varrho_2 =$ Const. gegeben ist. Ist nämlich z. B. eine Fläche S_0 des Systems $\varrho_1 =$ Const. gegeben, so muss jede pseudosphärische Fläche vom Radius Eins des Systems ϱ_3 durch eine Krümmungslinie $\varrho_3 =$ Const. auf S_0 gelegt werden und S_0 orthogonal schneiden, wodurch sie eindeutig bestimmt ist (vgl. S. 442).

Nach dieser Vorbemerkung ist der Weg, den wir zur Entscheidung der Frage einschlagen, der folgende: Zunächst untersuchen wir die charakteristischen Eigenschaften der genannten Flächen, deren Bestimmung im allgemeinen von einer einzigen partiellen Differentialgleichung vierter Ordnung für eine unbekannte Function zweier Veränderlichen abhängt. Dann weisen wir umgekehrt nach, dass jede

Fläche, die diese Eigenschaften besitzt, ein Weingarten'sches System eindeutig bestimmt. Der Freiheitsgrad der Weingarten'schen Systeme ist demnach derselbe wie im Integral der erwähnten Gleichung, das vier willkürliche Functionen enthält.

§ 308. Die zugehörige partielle Differentialgleichung vierter Ordnung.

In einem pseudosphärischen Weingarten'schen System (ρ_1, ρ_2, ρ_3) betrachten wir eine Fläche S_0 des Systems ρ_1, z. B. $\rho_1 = 0$. Setzen wir:

$$\omega(0, \rho_2, \rho_3) = \omega_0(\rho_2, \rho_3),$$

so nimmt das Quadrat ihres Linienelements unter Zugrundelegung der Krümmungslinien ρ_2, ρ_3 den Ausdruck an (vgl. (9), S. 529):

$$ds_0^2 = \sin^2\omega_0\, d\rho_2^2 + \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \rho_3}\right)^2 d\rho_3^2. \tag{31}$$

Setzen wir ferner:

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \rho_1}\right)_{\rho_1=0} = \psi_0,$$

so erhalten wir für die reciproken Werte der Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 von S_0 bezüglich der Curven $\rho_2 = \text{Const.}$, $\rho_3 = \text{Const.}$ die Ausdrücke (vgl. § 274):

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\dfrac{\partial \psi_0}{\partial \rho_3}}{\cos\omega_0 \dfrac{\partial \omega_0}{\partial \rho_3}}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\psi_0}{\sin\omega_0}. \tag{32}$$

Die beiden letzten Gleichungen (19), S. 538, geben uns dann die folgenden Beziehungen zwischen den beiden Functionen ω_0, ψ_0 von ρ_2 und ρ_3:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial^3 \omega_0}{\partial \rho_2^2 \partial \rho_3} &= \sin^2\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial \rho_3} - \operatorname{tang}\omega_0 \cdot \psi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho_3} + \cot\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial \rho_2} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \rho_2 \partial \rho_3}, \\ \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \rho_2 \partial \rho_3} &= \cot\omega_0 \cdot \psi_0 \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \rho_2 \partial \rho_3} - \operatorname{tang}\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial \rho_2} \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho_3}. \end{aligned}\right. \tag{33}$$

Umgekehrt ist als wichtig zu bemerken: Genügen die Functionen ω_0, ψ_0 von ρ_2 und ρ_3 den Gleichungen (33), so giebt es eine Fläche S_0, die unter Zugrundelegung der Krümmungslinien ρ_2 und ρ_3 das Linienelement (31) besitzt und deren Hauptkrümmungsradien durch die Gleichungen (32) gegeben sind. Es gehen nämlich in diesem Falle wegen (31) und (32) die Gaussischen und Codazzi'schen Gleichungen gerade in die Gleichungen (33) über.

Wir bemerken weiter, dass die Gleichungen (33) die folgende:

$$\left(\frac{1}{\cos\omega_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin\omega_0} \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \rho_2 \partial \rho_3}\right)^2 - \left(\frac{\partial \omega_0}{\partial \rho_3}\right)^2 = F(\rho_3), \tag{33*}$$

wo $F(\varrho_3)$ eine Function von ϱ_3 allein bezeichnet, nach sich ziehen. Umgekehrt können wir für das System (33) die erste Gleichung desselben in Verbindung mit (33*) als äquivalentes System setzen*).

Lassen wir nun den Fall: $F(\varrho_3) = 0$, den wir im nächsten Paragraphen behandeln werden, beiseite, so können wir durch passende Änderung des Parameters ϱ_3

$$F(\varrho_3) = \pm 1$$

machen. Dann hängt die Bestimmung unserer Flächen S_0 von folgendem simultanen System ab:

$$(34)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^3 \omega_0}{\partial \varrho_2^2\, \partial \varrho_3} = \sin^2\omega_0 \dfrac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_3} - \operatorname{tang}\omega_0 \cdot \psi_0 \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \varrho_3} + \cot\omega_0 \dfrac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_2} \dfrac{\partial^2 \omega_0}{\partial \varrho_2\, \partial \varrho_3}, \\ \left(\dfrac{1}{\cos\omega_0} \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \varrho_3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\sin\omega_0} \dfrac{\partial^2 \omega_0}{\partial \varrho_2\, \partial \varrho_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_3}\right)^2 = \pm 1. \end{cases}$$

Die Elimination von ψ_0 aus diesen beiden Gleichungen führt offenbar auf eine einzige partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für die unbekannte Function ω_0. Unsere Flächen S_0 hängen somit von vier willkürlichen Functionen ab.

§ 309. **Flächen mit einer Schar Krümmungslinien constanter Flexion.**

Wir untersuchen nun den ausgeschlossenen Fall:

$$F(\varrho_3) = 0,$$

in dem wir die Flächen S_0 vollkommen durch die geometrische Eigenschaft charakterisieren können, dass ihre Krümmungslinien $\varrho_2 = \text{Const.}$ Curven mit der constanten Flexion Eins sind. Da nämlich die Krümmung des Normalschnitts längs einer solchen Curve

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\dfrac{\partial \psi_0}{\partial \varrho_3}}{\cos\omega_0 \dfrac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_3}}$$

ist, während die geodätische Krümmung nach S. 148 durch

$$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\dfrac{\partial^2 \omega_0}{\partial \varrho_2\, \partial \varrho_3}}{\sin\omega_0 \dfrac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_3}}$$

*) Eine Ausnahme würde der Fall: $\dfrac{\partial \psi_0}{\partial \varrho_3} = 0$ bilden. Dann aber würde aus (33) auch $\dfrac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_3} = 0$ folgen und die Fläche S_0 sich auf eine Curve zusammenziehen.

gegeben ist, so ergiebt sich in der That (vgl. § 274):

$$\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{\varrho_g^2} = 1.$$

Bezeichnen wir mit ϑ den Winkel, den die Hauptnormale der Curve $\varrho_2 =$ Const. mit der Flächennormale bildet, so haben wir (S. 147):

$$\frac{1}{R_1} = \cos\vartheta, \quad \frac{1}{\varrho_g} = \sin\vartheta$$

oder:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \varrho_3} = \cos\vartheta \cos\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_3}, \quad \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = \sin\vartheta \sin\omega_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_3}.$$

Eliminieren wir mittels dieser Gleichungen ψ_0 aus den Gleichungen (34), so ergeben sich für ϑ und ω_0 die charakteristischen Gleichungen:

$$(35) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \omega_0}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = \sin\vartheta \sin\omega_0 \dfrac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_3}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = -\sin\vartheta \sin\omega_0 \dfrac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_3}. \end{cases}$$

Jedem Functionspaar ϑ, ω_0, das diesen beiden simultanen Gleichungen genügt, entspricht umgekehrt eine Fläche S_0, deren Krümmungslinien $\varrho_3 =$ Const. die Flexion Eins haben. Es lässt sich leicht nachweisen, dass die diesen Gleichungen entsprechenden Flächen S_0 die allgemeinsten mit einer Schar Krümmungslinien constanter Flexion Eins sind; es mag jedoch hier in Betreff des Beweises auf die Abhandlung des Verfassers im 13. Bande der Annali di Matematica verwiesen werden.

Aus den Gleichungen (35) folgt, wie wir noch bemerken wollen:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_3} \frac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_3}\right) = 1.$$

Durch Änderung des Parameters ϱ_3 können wir einfach

$$(35^*) \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial \varrho_3} \frac{\partial \omega_0}{\partial \varrho_3} = 1$$

machen, und diese Gleichung kann an Stelle der zweiten Gleichung (35) gesetzt werden.

Durch Elimination von ϑ ergiebt sich zur Bestimmung von ω_0 offenbar eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung. Auf eine solche werden wir auch geführt, wenn wir die Gleichung dieser Flächen in der gewöhnlichen Form:

$$z = z(x, y)$$

schreiben.

§ 310. Construction eines Weingarten'schen Systems.

Wir wollen nun das nachstehende Theorem beweisen, das eben das erwähnte Existenztheorem ist:

Wird durch jede Krümmungslinie $\varrho_3 = \text{Const.}$ einer Fläche S_0, die den Gleichungen (31), (32) und (33) genügt, die pseudosphärische Fläche vom Radius Eins gelegt, die S_0 orthogonal schneidet, so gehören die so construierten pseudosphärischen Flächen einem Weingarten'schen System an.

Zum Beweise gehen wir auf die Fundamentalgleichungen (19), S. 538, zurück, denen die charakteristische Function $\omega(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ eines Weingarten'schen Systems genügen muss, und zwar schreiben wir sie hier in der folgenden Weise:

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2^2} = \sin\omega \cos\omega,$$

$$\text{(B)} \begin{cases} \dfrac{\partial^3 \omega}{\partial \varrho_1^2 \partial \varrho_3} = -\operatorname{tang}\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} + \cot\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} + \cos^2\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}, \\ \dfrac{\partial^3 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2 \partial \varrho_3} = -\operatorname{tang}\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} + \cot\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3}, \\ \dfrac{\partial^3 \omega}{\partial \varrho_2^2 \partial \varrho_3} = -\operatorname{tang}\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_3} + \cot\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_2} \dfrac{\partial^2 \omega}{\partial \varrho_2 \partial \varrho_3} + \sin^2\omega \dfrac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}. \end{cases}$$

Unser Theorem ist bewiesen, sobald wir das Vorhandensein einer Lösung ω des simultanen Systems (A), (B) nachweisen, die den Anfangsbedingungen:

$$\text{(C)} \qquad \omega = \omega_0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1} = \psi_0 \quad (\text{für } \varrho_1 = 0)$$

genügt.

Nun giebt es nach dem Cauchy'schen Satze sicherlich eine Lösung von (A), die den Anfangsbedingungen (C), welche eben die Lösung fest bestimmen, genügt*). Es kommt daher alles auf den Nachweis hinaus, dass die so bestimmte Lösung ω von (A) auch dem System (B) genügt. Wir bemerken nun zunächst, dass für $\varrho_1 = 0$ das System (B) sicherlich erfüllt ist, denn wegen (C) gehen die letzten beiden Gleichungen in die Gleichungen (33), die wir als erfüllt voraussetzen, über, und ferner ergiebt sich die erste Gleichung (B) aus der Combination der letzten mit der nach ϱ_3 differenzierten Gleichung (A). Wenn wir nun nachweisen, dass für $\varrho_1 = 0$ auch alle Gleichungen erfüllt sind, die sich aus den Gleichungen (B) durch beliebig oftmalige Differentiation nach ϱ_1 ergeben, so ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

*) S. z. B. Goursat, Vorlesungen u. s. w. (S. 23 des Originals).

§ 311. Charakteristische Eigenschaft des Linienelements einer Fläche mit constantem Krümmungsmass.

Die Eigenschaft, die wir jetzt noch zu beweisen haben, hängt enge mit einer allgemeinen Eigenschaft des Linienelements einer Fläche mit constantem Krümmungsmass zusammen, auf die Weingarten zuerst hingewiesen hat und die wir hier kurz ableiten wollen.

Es sei

$$(36) \qquad a_{11}dx_1^2 + 2a_{12}dx_1\,dx_2 + a_{22}dx_2^2$$

eine quadratische Differentialform mit nicht verschwindender Discriminante, deren Krümmung mit K bezeichnet werden möge. Wir untersuchen, ob es eine Function $\psi(x_1, x_2)$ giebt, die den simultanen Gleichungen:

$$\psi_{11} + Ka_{11}\psi = 0, \quad \psi_{12} + Ka_{12}\psi = 0, \quad \psi_{22} + Ka_{22}\psi = 0$$

genügt, wenn $\psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{22}$ die covarianten zweiten Differentialquotienten von ψ sind.

Ausführlich geschrieben lauten diese drei Gleichungen (vgl. S. 46, (22)):

$$(\mathrm{D}) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} = \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} - Ka_{11}\psi, \\[2ex] \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1\,\partial x_2} = \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} - Ka_{12}\psi, \\[2ex] \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1} + \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2} - Ka_{22}\psi. \end{cases}$$

Wir setzen nun die Werte einander gleich, die sich für $\dfrac{\partial^3\psi}{\partial x_1^2\partial x_2}$ ergeben, wenn die erste Gleichung nach x_2 und die zweite nach x_1 differenziert werden, desgleichen die beiden Werte für $\dfrac{\partial^3\psi}{\partial x_1\,\partial x_2^2}$, die aus der Differentiation der zweiten Gleichung nach x_2 und der dritten nach x_1 folgen. Gehen wir auf die Formeln (II), S. 52, zurück und berücksichtigen wir die Gleichungen (vgl. (V), S. 56):

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} = \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}a_{11} + \left(\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\right)a_{12} - \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}a_{22},$$

$$\frac{\partial a_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}a_{22} + \left(\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\right)a_{12} - \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}a_{11},$$

so erhalten wir unter Ausschluss der Lösung $\psi = 0$:

$$a_{11}\frac{\partial K}{\partial x_2} - a_{12}\frac{\partial K}{\partial x_1} = 0,$$

$$a_{12}\frac{\partial K}{\partial x_2} - a_{22}\frac{\partial K}{\partial x_1} = 0.$$

Daraus folgt:

$$K = \text{Const}.$$

In diesem Falle ist das System (D) unbeschränkt integrierbar und besitzt demnach drei linear von einander unabhängige Lösungen. Also: Damit das System (D) eine von Null verschiedene Lösung ψ besitze, ist notwendig und hinreichend, dass die Differentialform (36) constante Krümmung hat. Dann ist das System (D) unbeschränkt integrierbar.

Ist die Form (36) definit, so stellt sie das Quadrat des Linienelements einer Fläche S mit constantem Krümmungsmass K dar, und die Anmerkung in § 275, S. 493, lässt uns erkennen, dass, wenn das Quadrat des Linienelements auf S in die für eine Rotationsfläche charakteristische Form:

$$ds^2 = d\alpha^2 + r^2 d\beta^2 \quad (r = \varphi(\alpha))$$

gebracht wird,

$$\psi = \int r\, d\alpha$$

die allgemeine Lösung des Systems (D) ist.

Differenzieren wir die Gleichungen (D), so können wir offenbar die dritten, vierten u. s. w. Differentialquotienten ψ linear durch $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ und ψ ausdrücken. Wegen der unbeschränkten Integrabilität des Systems können auch die auf einander folgenden Differentiationen nie zu einer Beziehung zwischen ψ und seinen ersten Differentialquotienten führen, d. h.: Wie auch ein Differentialquotient höherer Ordnung gebildet werden mag, stets ergiebt sich ein und derselbe Ausdruck in $\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$, $\frac{\partial \psi}{\partial x_2}$ und ψ.

§ 312. Abschluss des Beweises des Existenztheorems.

Nach dieser Vorbemerkung kehren wir zum System (B) zurück, das für $\varrho_1 = 0$, wie wir gesehen haben, erfüllt ist, und beweisen, dass es auch noch erfüllt ist, wenn wir jede Gleichung n Mal nach ϱ_1 differenzieren und dann ϱ_1 gleich Null setzen. Ist nämlich $\omega(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ eine Lösung von (A), und gehört demnach das Quadrat des Linienelements:

$$ds^2 = \cos^2\omega\, d\varrho_1^2 + \sin^2\omega\, d\varrho_2^2$$

zu einer pseudosphärischen Fläche ($K = -1$), so kann das System (B), wenn in ihm statt $\frac{\partial \omega}{\partial \varrho_3}$ Φ gesetzt wird, in der Form des Systems (D) im vorigen Paragraphen geschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho_1^2} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_1} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_2} + \Phi \cos^2 \omega,$$
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho_1 \partial \varrho_2} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_1} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_2},$$
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varrho_2^2} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_1} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho_2} + \Phi \sin^2 \omega .$$

Daraus folgt, dass, wie auch aus den Gleichungen (B) ein Differentialquotient höherer Ordnung gebildet werden mag, stets das Ergebnis ein und dasselbe ist.

Setzen wir nun voraus, dass die zu beweisende Eigenschaft bis zur $n - 1$-ten Differentiation nach ϱ_1, d. h. bis

$$(37) \qquad \frac{\partial^{n+2} \omega}{\partial \varrho_1^{n+1} \partial \varrho_2}, \quad \frac{\partial^{n+2} \omega}{\partial \varrho_1^{n} \partial \varrho_2 \partial \varrho_2}, \quad \frac{\partial^{n+2} \omega}{\partial \varrho_1^{n-1} \partial \varrho_2^2 \partial \varrho_2}$$

zutrifft, so gilt dasselbe auch für eine nochmalige Differentiation, d. h. für

$$(37^*) \qquad \frac{\partial^{n+3} \omega}{\partial \varrho_1^{n+2} \partial \varrho_2}, \quad \frac{\partial^{n+3} \omega}{\partial \varrho_1^{n+1} \partial \varrho_2 \partial \varrho_1}, \quad \frac{\partial^{n+3} \omega}{\partial \varrho_1^{n} \partial \varrho_2^2 \partial \varrho_2}.$$

Der erste der Differentialquotienten (37*) lässt sich aber mittels der Gleichung (A) durch den letzten ausdrücken; demnach haben wir unsere Behauptung nur für den zweiten und dritten zu beweisen. Der zweite kann nun in der Form $\frac{\partial}{\partial \varrho_2}\left(\frac{\partial^{n+2} \omega}{\partial \varrho_1^{n+1} \partial \varrho_2}\right)$ geschrieben werden, und da wir eben für $\frac{\partial^{n+2} \omega}{\partial \varrho_1^{n+1} \partial \varrho_2}$, den ersten der Differentialquotienten (37), die Behauptung als richtig voraussetzen, so brauchen wir die betreffende Gleichung nur nach ϱ_2 zu differenzieren, um die Behauptung auch für $\frac{\partial^{n+3} \omega}{\partial \varrho_1^{n+1} \partial \varrho_2 \partial \varrho_2}$ bestätigt zu finden. Analog ist:

$$\frac{\partial^{n+3} \omega}{\partial \varrho_1^{n} \partial \varrho_2^2 \partial \varrho_2} = \frac{\partial^2}{\partial \varrho_2^2} \frac{\partial^{n+1} \omega}{\partial \varrho_1^{n} \partial \varrho_2},$$

d. h. die bereits für $\frac{\partial^{n+1} \omega}{\partial \varrho_1^{n} \partial \varrho_2}$ als richtig vorausgesetzte Behauptung trifft auch für $\frac{\partial^{n+3} \omega}{\partial \varrho_1^{n} \partial \varrho_2^2 \partial \varrho_2}$ zu.

Somit ist der in § 310 ausgesprochene Satz vollständig bewiesen.

Es dürfte nicht überflüssig sein, einige ergänzende Betrachtungen daran anzuschliessen.

Die aus dem Cauchy'schen Satze sich ergebende Lösung ω des Fundamentalsystems (A), (B) ist eine analytische Function der Argu-

mente $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$; sie kann daher in eine nach Potenzen von ϱ_3 fortschreitende Reihe:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \varrho_3 + \omega_2 \varrho_3^2 + \cdots + \omega_n \varrho_3^n + \cdots$$

entwickelt werden, wo die Coefficienten $\omega_0, \omega_1, \cdots \omega_n, \cdots$ nur von ϱ_1 und ϱ_2 abhängen. Der erste Coefficient ω_0 ist eine Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \varrho_1^2} - \frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \varrho_2^2} = \sin \omega_0 \cos \omega_0$$

und hängt von der pseudosphärischen Ausgangsfläche $\varrho_3 = 0$ ab. Die folgenden Coefficienten $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_n, \cdots$ sind völlig bestimmt, wenn eine von den Orthogonaltrajectorien der pseudosphärischen Flächen gegeben ist. Ein Weingarten'sches pseudosphärisches System ist daher eindeutig bestimmt, sobald eine pseudosphärische Fläche des Systems und eine von den Orthogonaltrajectorien der pseudosphärischen Flächen gegeben sind*).

§ 313. Weingarten'sche Systeme, die eine Kugel enthalten.

Wir wollen nun vom Existenztheorem einige Anwendungen machen, und zwar wollen wir diejenigen Weingarten'schen pseudosphärischen Systeme vom Krümmungsmass $K = -1$ suchen, bei denen sich unter den Flächen des Systems ϱ_1 oder des Systems ϱ_2 eine Kugel vom Radius Eins befindet.

Hierzu müssen wir zusehen, wann die Fläche S_0 in § 308 eine Kugel vom Radius Eins sein kann.

Nach den Gleichungen (32) müssen wir in diesem Falle ψ_0 gleich $\sin \omega_0$ setzen, worauf die Gleichungen (33) sich auf die eine Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \omega_0}{\partial \varrho_2 \, \partial \varrho_3} = F(\varrho_3) \sin \omega_0$$

reducieren. Ist $F(\varrho_3)$ gleich Null, so kann durch Änderung des Parameters ϱ_3

$$\omega_0 = \varrho_3 + \varphi(\varrho_2)$$

gemacht werden. Das Quadrat (31) des Linienelements:

$$ds_0^2 = \sin^2[\varrho_3 + \varphi(\varrho_2)] \, d\varrho_2^2 + d\varrho_3^2$$

gehört dann zur Kugel vom Radius Eins und hat die allgemeinste geodätische Form, d. h., die Curven $\varrho_3 =$ Const. bilden auf der Kugel ein System geodätischer Parallelen.

Ist $F(\varrho_3)$ grösser oder kleiner als Null, so kann durch Änderung des Parameters ϱ_3 $F(\varrho_3)$ gleich Eins, also

*) Vgl. die Abhandlung des Verfassers in den Atti della Reale Accademia dei Lincei, 4. Serie, 4. Bd., 1887.

(38) $$ds_0^2 = \sin^2\omega_0 d\varrho_2^2 + \left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3^2$$

gemacht werden, wenn ω_0 eine Lösung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3} = \sin\omega_0$$

ist. Nach dem Ergebnis in § 245, S. 444, ergeben sich die Curven $\varrho_2 =$ Const. auf der Kugel, die dem Linienelement (38) zu Grunde liegen, als sphärische Indicatricen der Tangenten für die eine Schar Haupttangentencurven einer pseudosphärischen Fläche. Also haben wir gefunden:

Die Weingarten'schen pseudosphärischen Systeme vom Krümmungsmass $K = -1$, unter deren Orthogonalflächen sich eine Kugel vom Radius Eins befindet, zerfallen in zwei verschiedene Klassen, die sich mittels folgender Constructionen ergeben:

1) Man ziehe auf der Kugel eine beliebige Schar geodätischer Parallelen L und lege durch jede derselben eine pseudosphärische Fläche ($K = -1$) orthogonal zur Kugel;

2) Zu einer Schar Haupttangentencurven einer pseudosphärischen Fläche construiere man die sphärischen Indicatricen L' der Tangenten und ersetze die Curven L der vorigen Construction durch die Orthogonaltrajectorien der Curven L'.

Die erste Klasse besteht aus Ribaucour'schen Cykelsystemen, da die Kugelcurven $\varrho_2 =$ Const. Kreise vom Radius Eins sind. Ihr Vorhandensein hätte auch aus den Eigenschaften dieser Cykelsysteme gefolgert werden können. Bei den Systemen der zweiten Klasse dagegen ist die Flexion grösser als Eins; auf sie ist daher die Complementärtransformation anwendbar.

Soll allgemeiner die Fläche S_0 eine Kugel vom Radius R sein, so müssen wir in den Gleichungen (33) ψ_0 gleich $\frac{\sin\omega_0}{R}$ setzen. Dann erhalten wir zur Bestimmung von ω_0 die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\left(\frac{1}{\sin\omega_0}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{R^2} - 1\right)\left(\frac{\partial\omega_0}{\partial\varrho_3}\right)^2 = \text{Const.}$$

Als besonderen Fall können wir auch als Fläche S_0 eine Ebene nehmen, indem wir $\frac{1}{R}$ gleich Null setzen*).

---

*) Ist der Kugelradius kleiner als Eins, so kann eine solche Bäcklund'sche Transformation vorgenommen werden, dass eine der Orthogonaltrajectorien C des

§ 314. Weingarten'sche Systeme mit positivem constanten Krümmungsmass.

Die in den letzten Paragraphen entwickelten Untersuchungen über das Existenztheorem können auch auf dreifache Orthogonalsysteme, die eine Schar von Flächen mit positivem constanten Krümmungsmass enthalten, angewandt werden, wie wir noch in Kürze nachweisen wollen.

Wir beschränken uns auf den Fall, dass das Krümmungsmass der Flächen $\varrho_3 =$ Const. in dem dreifachen Orthogonalsystem für alle diese Flächen dasselbe ist, und setzen der Einfachheit halber $K = +1$ *). Als ausgeschlossen von unseren Untersuchungen betrachten wir diejenigen Systeme, bei denen die Flächen $\varrho_3 =$ Const. Rotationsflächen oder Kugeln vom Radius Eins sind.

Verfahren wir dann wie in § 293, so sehen wir, dass das Quadrat des Linienelements des Raumes unter Zugrundelegung des Weingarten'schen Systems $(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)$ in die Form:

$$(39) \qquad ds^2 = \cosh^2\omega\, d\varrho_1^2 + \sinh^2\omega\, d\varrho_2^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)^2 d\varrho_3^2$$

gebracht werden kann, wo ω eine Function von $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$ ist, die folgenden Gleichungen genügt:

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2^2} + \sinh\omega\cosh\omega = 0,$$

$$(\beta)\begin{cases} \dfrac{\partial^3\omega}{\partial\varrho_1^2\,\partial\varrho_3} = \operatorname{tgh}\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_1}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3} - \coth\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_2}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3} - \cosh^2\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}, \\[2ex] \dfrac{\partial^3\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3} = \operatorname{tgh}\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_2}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3} + \coth\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_1}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}, \\[2ex] \dfrac{\partial^3\omega}{\partial\varrho_2^2\,\partial\varrho_3} = -\operatorname{tgh}\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_1}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3} + \coth\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_2}\,\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3} - \sinh^2\omega\,\dfrac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}. \end{cases}$$

Dieselben sind nichts anderes als die Lamé'schen Gleichungen für das Linienelement (39). Wenden wir dann auf das System (α), (β) die Ergebnisse des § 311 an, wie wir es vorhin für das System (A), (B) gethan haben, so sehen wir:

Es giebt unendlich viele Lösungen ω des Systems (α), (β), die von vier willkürlichen Functionen abhängen. Zu

---

Weingarten'schen Systems den Kugelmittelpunkt zur Transformierten hat (vgl. die Anmerkung auf S. 547). Daraus folgt: Es giebt unendlich viele Weingarten'sche Systeme, deren pseudosphärische Flächen durch einen festen Punkt des Raumes gehen.

*) Wie schon in § 307 bemerkt worden ist, lässt sich dieselbe Methode auch in dem allgemeineren Falle anwenden, wenn K mit ϱ_3 veränderlich ist.

jeder solchen Lösung ω gehört ein Weingarten'sches System (39) mit dem Krümmungsmass $K = +1$.

Aus den Gleichungen (β) folgt, dass der Ausdruck:

$$(\gamma) \qquad \left(\frac{1}{\cosh\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sinh\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial\varrho_3}\right)^2$$

nur von ϱ_3 abhängt und also durch Änderung des Parameters ϱ_3 gleich Eins gemacht werden kann. Umgekehrt ergeben sich hieraus die drei Gleichungen (β) (vgl. § 301), die somit dasselbe aussagen.

Verfahren wir wie in § 300, so ergiebt sich der Satz:

Auf den Flächen positiven constanten Krümmungsmasses in einem Weingarten'schen System sind die Äquidistanzcurven parallele geodätische Kreise.

Betrachten wir auf zwei Flächen $\varrho_3 =$ Const. die Punkte als entsprechend, in denen die Flächen von ein und derselben Parameterlinie ϱ_3 geschnitten werden, so ergiebt sich wie in § 294, dass die (imaginären) Haupttangentencurven auf den beiden Flächen einander entsprechen. In reeller Fassung können wir dieses Ergebnis wie folgt aussprechen: Auf zwei Flächen $\varrho_3 =$ Const. eines Weingarten'schen Systems entsprechen einander die conjugierten Systeme*).

Schliesslich weisen wir auf eine Eigenschaft der Parameterlinien ϱ_3 des Weingarten'schen Systems hin, die unmittelbar aus (γ) folgt. Ziehen wir die Tangenten an einer solchen Curve und tragen wir auf diesen vom Berührungspunkt aus in der einen oder anderen Richtung die Längeneinheit ab, so ist der Ort der Endpunkte eine Curve, deren Bogen gerade gleich ϱ_3 ist. Es entsprechen sich demnach die Ortscurven der Endpunkte durch gleiche Bogen.

Zugleich bemerken wir: Aus der Combination dieser Eigenschaft und des Bonnet'schen Satzes ergiebt sich (S. 473) eine besondere Eigenschaft der ∞^1 Schar von Flächen Σ' mit constanter mittlerer Krümmung, die den Flächen $\varrho_3 =$ Const. des Weingarten'schen Systems parallel und von ihnen um die Längeneinheit im positiven oder negativen Sinne entfernt sind. Bezeichnen wir nämlich mit x', y', z' die Coordinaten eines Punktes einer Oberfläche Σ', der dem Punkte (x, y, z) der Fläche mit dem Krümmungsmass $K = +1$ entspricht, so haben wir:

$$x' = x \pm X_3, \quad y' = y \pm Y_3, \quad z' = z \pm Z_3.$$

Wählen wir z. B. das obere Vorzeichen und bilden wir $dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$, so erhalten wir:

*) Diese zweite Eigenschaft gilt allgemein, auch wenn K mit ϱ_3 veränderlich ist (vgl. S. 530).

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = e^{2\omega}(d\varrho_1^2 + d\varrho_2^2) - \frac{2e^{\omega}}{\cosh\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_1\,\partial\varrho_3}\,d\varrho_1\,d\varrho_3 -$$
$$- \frac{2e^{\omega}}{\sinh\omega}\frac{\partial^2\omega}{\partial\varrho_2\,\partial\varrho_3}\,d\varrho_2\,d\varrho_3 + d\varrho_3^2.$$

Betrachten wir die Fläche Σ' von constanter, aber mit ϱ_3 veränderlicher mittlerer Krümmung, so sehen wir, dass sie sich so ändert, dass Ähnlichkeit in deu kleinsten Teilen besteht, während alle ihre Punkte Bogen von gleicher Länge beschreiben.

Kapitel XXI.

n-dimensionale Räume constanten Krümmungsmasses.

n-dimensionale Räume. — Messung von Längen und Winkeln. — Geodätische Linien. — Geodätisch parallele Hyperflächen. — Geodätische Flächen. — Begriff des Krümmungsmasses nach Riemann. — Räume mit constantem Krümmungsmass. — Abwickelbarkeit zweier Räume mit demselben constanten Krümmungsmass aufeinander. — Conforme Abbildung des hyperbolischen Raumes auf den euklidischen. — Darstellung der Bewegungen des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes durch lineare Substitutionen bezüglich einer complexen Veränderlichen nach Poincaré. — Geodätische Abbildung des hyperbolischen Raumes auf den euklidischen. — Metrik von Cayley. — Elliptischer Raum. — Bewegungen des dreidimensionalen elliptischen Raumes. — Schiebungen.

---

§ 315. n-dimensionale Räume.

Wir betrachten n reelle unabhängige Veränderliche:

$$x_1, x_2, \dots x_n,$$

von denen jede alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen kann. Die Gesamtheit von n besonderen Werten der Veränderlichen:

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots x_n^{(0)}$$

heisse ein Punkt, und die Werte $x_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \dots n)$ mögen die Coordinaten des Punktes genannt werden. Häufig werden wir uns zur Bezeichnung des Punktes der abkürzenden Schreibweise:

$$x_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

bedienen. Die Gesamtheit der Punkte möge als ein n-dimensionaler Raum S_n bezeichnet werden. Sind die x_i nicht unbeschränkt, sondern nur innerhalb gewisser Bereiche veränderlich, so sprechen wir von einem Gebiete von S_n.

Wir betrachten nun in S_n die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche sich ergeben, wenn die Coordinaten $x_1, x_2, \dots x_n$ gleich bestimmten Functionen von m Veränderlichen

$$u_1, u_2, \dots u_m,$$

m kleiner als n vorausgesetzt, gesetzt werden, d. h. wir setzen:

(1) $$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \dots u_m) \quad (i = 1, 2, \dots n).$$

Diese durch die Gleichungen (1) bestimmte Punktmenge möge ein Unterraum von S_n oder eine in S_n enthaltene Mannigfaltigkeit und zwar, wenn sich die φ_i nicht durch weniger als m Veränderliche ausdrücken lassen*), eine m-dimensionale Mannigfaltigkeit V_m genannt werden. Insbesondere heisse für $m = 1$ die Mannigfaltigkeit eine Curve, für $m = 2$ eine Fläche, für $m = n - 1$ eine Hyperfläche.

Sind die Gleichungen (1) in den u_i linear, so wollen wir V_m einen linearen Raum nennen und denselben mit S_m bezeichnen. Insbesondere soll der umgebende Raum S_n selbst als linear angesehen werden**).

Zu Grunde legen wir der Metrik in unserem Raume S_n eine quadratische Differentialform:

$$\sum_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (i, k = 1, 2 \dots n),$$

von der wir voraussetzen, dass sie in dem ganzen in Betracht kommenden Raumgebiet definit und positiv sei und dass ihre Determinante $a = |a_{ik}|$ nicht verschwinde. Ferner setzen wir voraus, dass die Coefficienten a_{ik} endliche und stetige Functionen der x seien und ebenfalls endliche und stetige erste und zweite partielle Differentialquotienten besitzen.

Als Entfernung ds zweier unendlich naher Punkte x_i und $x_i + dx_i$ bezeichnen wir den durch die Gleichung:

(2) $$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

*) Damit eine derartige Reduction nicht möglich sei, muss bekanntlich die Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_m} \end{matrix} \right\|$$

die Charakteristik m besitzen, d. h. es dürfen nicht alle Unterdeterminanten von der Ordnung m verschwinden.

**) Eigentlich ist der lineare Raum der Synthetiker hier für uns nur ein Bildraum.

gegebenen Ausdruck und nennen ds auch das Linienelement des Raumes. Betrachten wir demnach in S_n eine Curve:

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \ldots \quad x_n = x_n(t),$$

so ist ihr Bogen von $t = t_0$ bis $t = t_1$ durch das bestimmte Integral:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum a_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}} \cdot dt$$

gegeben. Bezeichnen wir als Parameterlinie x_i diejenige Curve, längs welcher sich nur der Parameter x_i ändert, und mit ds_i das Bogenelement derselben, so haben wir offenbar:

$$ds_i = \sqrt{a_{ii}}\, dx_i.$$

§ 316. Messung von Strecken und Winkeln.

Nach Erledigung der Längenmessung in S_n gehen wir nun zur Winkelmessung über. Hierzu betrachten wir zwei Linienelemente ds und δs, die von einem Punkte x_i nach zwei unendlich nahen Punkten $x_i + dx_i$ und $x_i + \delta x_i$ ausgehen, sodass

$$ds^2 = \sum a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \quad \delta s^2 = \sum a_{ik}\, \delta x_i\, \delta x_k$$

ist. Da der absolute Betrag des Ausdrucks:

$$\sum a_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{\delta x_k}{\delta s}$$

kleiner als Eins ist*), so giebt es einen vollkommen bestimmten, zwischen 0 und π gelegenen reellen Winkel ω, für den

$$\cos \omega = \sum a_{ik} \frac{dx_i}{ds} \frac{\delta x_k}{\delta s}$$

---

*) Um uns hiervon in einfacher Weise zu überzeugen, haben wir nur zu beachten, dass, wenn die quadratische Form: $\sum a_{ik} \xi_i \xi_k$ definit ist, die quadratische Gleichung für $\frac{\lambda}{\mu}$:

$$\sum a_{ik} (\lambda \xi_i + \mu \eta_i)(\lambda \xi_k + \mu \eta_k) = 0$$

imaginäre Wurzeln haben und also

$$\left(\sum a_{ik} \xi_i \eta_k\right)^2 < \left(\sum a_{ik} \xi_i \xi_k\right) \left(\sum a_{ik} \eta_i \eta_k\right)$$

sein muss. Setzen wir

$$\xi_i = \frac{dx_i}{ds}, \quad \eta_i = \frac{\delta x_i}{\delta s},$$

so ergiebt sich die obige Behauptung.

ist. Diesen Winkel bezeichnen wir als den von den beiden Linienelementen ds und δs oder ihren Richtungen gebildeten Winkel*). Bezeichnen wir insbesondere mit $\omega_{\alpha\beta}$ den von den (positiven) Richtungen der betreffenden Parameterlinien x_α, x_β gebildeten Winkel, so ist:

$$\omega_{\alpha\beta} = \frac{a_{\alpha\beta}}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}a_{\beta\beta}}}.$$

Bemerkt werde hierzu, dass bei Einführung neuer Veränderlicher y an Stelle der x und entsprechender Transformation der quadratischen Fundamentalform die vorstehend definierten Längen und Winkel keine Änderung erleiden.

Betrachten wir ferner in S_n eine Mannigfaltigkeit V_m und setzen wir in (2) für die x ihre Werte in den u ein, so erhalten wir für das Quadrat des Linienelements in V_m den Ausdruck:

$$ds^2 = \sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\, du_\alpha du_\beta; \tag{3}$$

die in V_m gemessenen Längen und Winkel stimmen hiernach mit den im umgebenden Raume S_n gelegenen überein.

Eine von einem Punkte $x_i^{(0)}$ ausgehende Richtung wird durch die Werte der n Constanten:

$$\xi_i = \frac{dx_i}{ds} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

die wir die Richtungsconstanten nennen wollen, bestimmt. Sie sind durch die Identität:

$$\sum a_{ik}\xi_i\xi_k = 1$$

mit einander verknüpft. Betrachten wir zwei von demselben Punkte ausgehende Richtungen $\xi_i^{(1)}$ und $\xi_i^{(2)}$,**) so erhalten wir für ihren Winkel ω die Bestimmungsgleichung:

$$\cos\omega = \sum a_{ik}\xi_i^{(1)}\xi_k^{(2)}.$$

*) Zur Rechtfertigung dieser Definition des Winkels ω weist Beltrami (Parametri differenziali, S. 14) darauf hin, dass die Entfernung Ds zweier unendlich naher Punkte $x_i + dx_i$ und $x_i + \delta x_i$ (bis auf unendlich kleine Glieder höherer Ordnung) durch die Gleichung:

$$Ds^2 = \sum a_{ik}(dx_i - \delta x_i)(dx_k - \delta x_k),$$

d. h.:

$$Ds^2 = ds^2 + \delta s^2 - 2\,ds\,\delta s\cos\omega,$$

gegeben ist, also genau so, als wenn es sich um den gewöhnlichen Raum handelte.

**) Der Kürze wegen nennen wir Richtung ξ_i diejenige, welche die Richtungsconstanten $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$ hat.

Sind $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \ldots \xi_i^{(m)}$ m Richtungen, die von einem Punkte $x_i^{(0)}$ ausgehen und unter einander unabhängig sind (d. h. nicht in einem Raume S_r, $r < m$, liegen), so bestimmen sie einen Raum S_m, der sie enthält. Die Coordinaten der Punkte desselben sind durch die Ausdrücke:

$$x_i = x_i^{(0)} + \xi_i^{(1)} u_1 + \xi_i^{(2)} u_2 + \cdots + \xi_i^{(m)} u_m \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

gegeben. Die Richtungsconstanten einer beliebigen von $x_i^{(0)}$ ausgehenden Richtung in diesem Raume S_m haben dann folgende Werte:

$$\xi_i = \lambda_1 \xi_i^{(1)} + \lambda_2 \xi_i^{(2)} + \cdots + \lambda_m \xi_i^{(m)} \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

wo, unter α_{rs} den Winkel der beiden Richtungen $\xi_i^{(r)}, \xi_i^{(s)}$ verstanden, die λ durch die quadratische Identität:

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots + \lambda_m^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \cos\alpha_{12} + \cdots = 1$$

mit einander verknüpft sind. Bemerkt werde, dass durch einen (gewöhnlichen) Punkt P einer Mannigfaltigkeit V_m m von einander unabhängige Richtungen gezogen werden können, die die Tangentialmannigfaltigkeit S_m bestimmen. Jede Richtung durch P, die normal zu diesen m Richtungen ist, ist es auch zu allen von P ausgehenden Richtungen in S_m und soll als normal zu S_m bezeichnet werden. Die in P zu S_m normalen Richtungen bilden eine Mannigfaltigkeit S_{n-m}. Ist V_m eine Hyperfläche, so giebt es eine einzige solche normale Richtung.

Haben zwei Hyperflächen den Punkt P gemein, so verstehen wir unter dem von ihnen gebildeten Winkel denjenigen der beiden normalen Richtungen. Insbesondere finden wir im Falle der beiden Parameterflächen x_α, x_β für den von den normalen Richtungen eingeschlossenen Winkel $\Omega_{\alpha\beta}$:

$$\cos\Omega_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta}}{\sqrt{A_{\alpha\alpha}A_{\beta\beta}}}$$

oder

$$\cos\Omega_{\alpha\beta} = \frac{\nabla(x_\alpha, x_\beta)}{\sqrt{\Delta_1 x_\alpha \cdot \Delta_1 x_\beta}},$$

wo Δ_1 und ∇ die bekannten Symbole für die Differentialparameter sind (Kap. II, S. 41). Hieraus folgt, dass die Bedingung dafür, dass die beiden Hyperflächen:

$$U = \text{Const.}, \quad V = \text{Const.}$$

zu einander orthogonal sind, durch das Verschwinden von $\nabla(U, V)$ ausgedrückt wird.

§ 317. Geodätische Linien.

Gleichzeitig mit der Messung der Längen ist auch der Begriff der geodätischen Linien in S_n festgelegt. Es sind dieses nämlich diejenigen Curven, welche zwischen zwei beliebigen, genügend nahe angenommenen Punkten A, B von S_n den kürzesten Weg angeben, auf dem man in S_n von A nach B gelangen kann.

Betrachten wir eine geodätische Linie G und drücken wir die Coordinaten eines beweglichen Punktes derselben als Functionen des von einem festen Punkte ab gerechneten Bogens t von G aus, so haben wir:

$$(4) \qquad \sum a_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = 1.$$

Nun betrachen wir den Bogen der geodätischen Linie G zwischen den beiden Punkten A und B, die den Werten $t = t_0$, $t = t_1$ entsprechen mögen, und bringen nach den Regeln der Variationsrechnung zum Ausdruck, dass, wenn statt der geodätischen Linie G eine andere, unendlich nahe benachbarte Curve mit denselben Endpunkten A und B genommen wird, die Variation des Bogens gleich Null ist.

Aus

$$dt^2 = \sum_{ik} a_{ik} dx_i dx_k$$

folgt unter Anwendung des Symbols δ für die Variationen:

$$\delta dt = \frac{1}{2} \sum_{ikl} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} dt\, \delta x_l + \sum_{il} a_{il} \frac{dx_i}{dt} \delta dx_l .$$

Integrieren wir beiderseits und nehmen wir auf der rechten Seite mit dem Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{il} a_{il} \frac{dx_i}{dt} d\delta x_l$$

eine partielle Integration vor, wobei wir berücksichtigen, dass nach der Voraussetzung die Variationen δx_l in den Grenzen t_0 und t_1 verschwinden, so erhalten wir:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_l \left(\sum_{ik} \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} - \frac{d}{dt} \sum_i a_{il} \frac{dx_i}{dt} \right) dt\, \delta x_l .$$

Demnach sind die Differentialgleichungen, die das Verschwinden von $\delta \int_{t_0}^{t_1} ds$ ausdrücken, d. h. die Differentialgleichungen der geodätischen Linien, die folgenden:

(A) $$\frac{d}{dt}\sum_i a_{il}\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{2}\sum_{ik}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt} \quad (l = 1, 2, \ldots n).$$

Unter Einführung der Christoffel'schen Symbole können wir sie in der folgenden äquivalenten Form schreiben:

(B) $$\sum_i a_{il}\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu}\begin{bmatrix}\lambda\mu\\ l\end{bmatrix}\frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt} = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots n)$$

oder, wenn wir nach den zweiten Differentialquotienten auflösen, auch in der Form:

(B*) $$\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ i\end{Bmatrix}\frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Integrieren wir die Gleichungen (B) oder (B*) so, dass für $t = t_0$ die x_i gegebene Werte $x_i^{(0)}$ und die ersten Differentialquotienten $\frac{dx_i}{dt}$ ebenfalls beliebig gegebene, aber der Bedingung:

$$\sum_{ik} a_{ik}\xi_i\xi_k = 1$$

genügende Anfangswerte ξ_i annehmen, so ist die Bedingung (4) stets erfüllt, weil infolge der Gleichungen (B)

$$\frac{d}{dt}\sum_{ik} a_{ik}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt} = 0$$

ist. Die entsprechende Curve ist somit eine geodätische Linie und t ihr Bogen. Es ist demnach klar, dass eine geodätische Linie von S_n bestimmt ist, wenn ein Punkt $x_i^{(0)}$ derselben und die Richtung ξ_i, in der sie von ihm ausgeht, gegeben sind.

Es mag bemerkt werden, dass, wenn eine Mannigfaltigkeit V_m in S_n eine geodätische Linie von S_n enthält, diese auch geodätische Linie von V_m ist. Dieses erhellt schon aus der Definition der geodätischen Linie, kann aber auch leicht direct auf Grund der Differentialgleichungen nachgewiesen werden.

§ 318. **Geodätisch parallele Hyperflächen.**

Wir setzen voraus, es wären die Parameterlinien x_1 geodätische Linien, und es wäre ferner der Parameter x_1 ihr Bogen, gerechnet von dem entsprechenden Schnittpunkte mit einer bestimmten Parameterhyperfläche des Systems $x_1 = \text{Const.}$, z. B. mit $x_1 = 0$, sodass die anderen Hyperflächen dieses Systems die Örter der Endpunkte gleicher

Bogen sind, die auf den geodätischen Linien von $x_1 = 0$ aus abgetragen werden.

Wenden wir die Differentialgleichungen (A) auf unsere geodätischen Linien x_1 an, so erhalten wir wegen $a_{11} = 1$ sofort:

$$(5) \qquad \frac{\partial a_{1l}}{\partial x_1} = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots n).$$

Nehmen wir also an, dass die geodätischen Linien x_1 zu der Ausgangshyperfläche $x_1 = 0$ orthogonal seien, so folgt daraus, da für $x_1 = 0$

$$a_{1l} = 0 \quad (l = 2, 3, \ldots n)$$

und andrerseits wegen (5) a_{1l} von x_1 unabhängig ist, dass a_{1l} überhaupt gleich Null ist, d. h. dass auch alle übrigen Hyperflächen $x_1 =$ Const. normal zu den geodätischen Linien x_1 sind. Somit erhalten wir folgende Verallgemeinerung des bekannten Gaussischen Satzes auf S. 159:

Werden durch jeden Punkt einer Hyperfläche Σ die zu derselben normalen geodätischen Linien gezogen und auf diesen von Σ aus gleiche Bogen abgetragen, so ist der Ort der Endpunkte wieder eine Hyperfläche Σ', die zu den geodätischen Linien orthogonal ist.

Die so erhaltenen Hyperflächen Σ' werden geodätisch parallel zu Σ genannt.

Der obige Satz lässt sich übrigens unmittelbar aus dem Gaussischen Satze für zweidimensionale Flächen ableiten. Dabei ist nur zu berücksichtigen, dass, wenn auf Σ eine beliebige Curve l gezogen wird und die von den Punkten von l ausgehenden, zu Σ orthogonalen geodätischen Linien g gezogen werden, diese eine zweidimensionale Fläche bilden, deren geodätische Linien sie eben sind, und dass somit der Ort l' der Endpunkte gleicher, von l aus auf den g abgetragener Bogen wieder eine zu den g orthogonale Curve ist.

Wenden wir uns nun zu dem Ausdruck, den unter der obigen Voraussetzung das Quadrat des Linienelements annimmt, so erhalten wir, da

$$a_{11} = 1, \quad a_{1l} = 0 \quad (l = 2, 3, \ldots n)$$

ist:

$$(6) \qquad ds^2 = dx_1^2 + \sum a_{rs} dx_r dx_s \quad (r, s = 2, 3, \ldots n).$$

Dieser Ausdruck soll die geodätische Form des Linienelementquadrats heissen. Wird mit dem Symbol Δ_1 der erste Differentialparameter bezeichnet, so ist, wie wir bemerken wollen:

$$\Delta_1 x_1 = A_{11} = 1.$$

Genügt umgekehrt eine Function $\vartheta(x_1, x_2, \dots x_n)$ der Gleichung:

$$(7) \qquad \Delta_1 \vartheta = 1,$$

so erhellt sofort, dass die Hyperflächen $\vartheta =$ Const. einander geodätisch parallel sind und dass ferner die geodätische Entfernung zwischen zwei Hyperflächen $\vartheta = \vartheta_0$ und $\vartheta = \vartheta_1$ gerade durch $\vartheta_1 - \vartheta_0$ angegeben wird. Allgemein lautet die Bedingung für die Parallelität der Hyperflächen

$$U = \text{Const.},$$

dass $\Delta_1 U$ eine Function von U allein:

$$\Delta_1 U = F(U)$$

sein muss. In diesem Falle brauchen wir statt U nur

$$\vartheta = \int \frac{dU}{\sqrt{F(U)}}$$

als Parameter einzuführen, so erhalten wir Gleichung (7).

Wir setzen nun voraus, wir kennen von der partiellen Differentialgleichung (7) eine vollständige Lösung ϑ, die also ausser der additiven Constanten in ϑ noch $n-1$ willkürliche Constanten

$$a_1, a_2, \dots a_{n-1}$$

enthält. Da sich durch Differentiation von (7) nach der Constanten a_i

$$\nabla\left(\vartheta, \frac{\partial \vartheta}{\partial a_i}\right) = 0$$

ergiebt, so ist klar, dass die Hyperflächen

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial a_i} = \text{Const.}$$

zu den Hyperflächen $\vartheta =$ Const. orthogonal sind.

Bedeuten $b_1, b_2, \dots b_{n-1}$ $n-1$ neue willkürliche Constanten, so haben wir die allgemeine Lösung der Differentialgleichung der geodätischen Linien in der Form (vgl. S. 170):

$$(8) \qquad \frac{\partial \vartheta}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial a_2} = b_2, \quad \dots \frac{\partial \vartheta}{\partial a_{n-1}} = b_{n-1}.$$

§ 319. Geodätische Flächen. Riemann'sches Krümmungsmass.

Wir wollen nun den wichtigen Begriff des Krümmungsmasses des Raumes nach Riemann entwickeln. Hierzu betrachten wir einen Punkt $M_0(x_i^{(0)})$ von S_n und zwei von ihm ausgehende Richtungen $(\xi_i^{(1)})$ und $(\xi_i^{(2)})$; dieselben bestimmen ein Büschel von Richtungen:

$$\xi_i = \alpha \xi_i^{(1)} + \beta \xi_i^{(2)},$$

die in einem S_2 liegen. Der Ort der von M_0 längs der Richtungen des Büschels ausgehenden geodätischen Linien ist eine Fläche σ, die eine **geodätische Fläche** genannt werden möge. Wir stellen uns nun die Aufgabe, das Krümmungsmass K dieser geodätischen Fläche σ im Punkte M_0, d. h. die Krümmung zu berechnen, die der binären Differentialform zukommt, welche das Quadrat des Linienelements von σ, in S_n berechnet, darstellt.

Diese Krümmung K heisst auch das **Krümmungsmass des Raumes** S_n im Punkte M_0 bezüglich der angegebenen Orientation der betrachteten Fläche S_2.

Werden für eine beliebige der betrachteten geodätischen Linien die Coordinaten x_i eines beweglichen Punktes derselben nach Potenzen des Bogens t, den wir von M_0 ab rechnen wollen, entwickelt, so ergiebt sich wegen der Differentialgleichungen (B*), S. 569,

$$(9)\quad \begin{cases} x_i = x_i^{(0)} + \xi_i t - \sum\limits_{\lambda\mu} \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ i \end{Bmatrix} \xi_\lambda \xi_\mu \frac{t^2}{2} + \\ \qquad + \sum\limits_{\lambda\mu\nu} \left(2 \sum\limits_h \begin{Bmatrix} \lambda h \\ i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ h \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ i \end{Bmatrix} \right) \xi_\lambda \xi_\mu \xi_\nu \frac{t^3}{6} + \cdots \end{cases}$$

Auf der geodätischen Fläche σ wählen wir als veränderliche Coordinaten:

$$u_1 = t\alpha, \quad u_2 = t\beta,$$

und es sei:

$$(10)\qquad ds^2 = b_{11} du_1^2 + 2 b_{12} du_1 du_2 + b_{22} du_2^2$$

das Quadrat des Linienelements von σ, sodass wir haben:

$$(11)\qquad b_{ik} = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial u_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial u_k} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots n).$$

Durch Beifügen des Index b bezeichnen wir die bezüglich der binären Form (10) gebildeten Drei- und Vier-Indices-Symbole und versehen der grösseren Klarheit wegen auch die für die Form

$$\sum a_{rs} dx_r dx_s$$

gebildeten mit dem Index a. Aus (11) folgt dann sogleich:

$$(12)\qquad \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}_b = \sum_{\lambda\mu\nu} \begin{bmatrix} \lambda\mu \\ \nu \end{bmatrix}_a \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial x_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_l} + \sum a_{\lambda\mu} \frac{\partial x_\lambda}{\partial u_l} \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial u_i \partial u_k}.$$

Um nun das Krümmungsmass von σ in M_0 (vgl. S. 52),

$$(12^*)\qquad K = \frac{(12, 12)_b}{b_{11} b_{22} - b_{12}^2},$$

berechnen zu können, brauchen wir die Werte der Symbole $\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}$ und ihrer Differentialquotienten in M_0; wir versehen sie mit dem oberen Index (0). Aus (9) ergeben sich sofort die Gleichungen:

$$(13) \qquad \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right)^{(0)} = \xi_i^{(k)}, \quad \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_h \partial u_k}\right)^{(0)} = -\sum_{\lambda\mu} \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ i \end{Bmatrix} \xi_\lambda^{(h)} \xi_\mu^{(k)},$$

und setzen wir diese Werte in (12) ein, so erhalten wir:

$$\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}_b^{(0)} = 0.$$

Nach Gleichung (32), S. 51, bleibt somit:

$$(12, 12)_b^{(0)} = \left(\frac{\partial}{\partial u_2}\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix}_b - \frac{\partial}{\partial u_1}\begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix}_b\right)^{(0)},$$

und wenn wir die Gleichungen (12) und (13) heranziehen, so finden wir nach einigen leichten Umformungen:

$$(14) \qquad (12, 12)_b^{(0)} = \sum_{\lambda\mu\nu\tau} (\lambda\nu, \mu\tau)_a^{(0)} \xi_\lambda^{(1)} \xi_\mu^{(1)} \xi_\nu^{(2)} \xi_\tau^{(2)},$$

wo sich die Summe rechts über alle Combinationen der vier Zahlen λ, μ, ν, τ von 1 bis n erstreckt. Berücksichtigen wir aber die bekannten Eigenschaften der Vier-Indices-Symbole, die in den Relationen (a) und (b), S. 51:

$$(\lambda\nu, \mu\tau) = -(\nu\lambda, \mu\tau) = -(\lambda\nu, \tau\mu) = (\nu\lambda, \tau\mu)$$

ausgedrückt sind, so können wir Gleichung (14) auch folgendermassen schreiben:

$$(12, 12)_b^{(0)} = \sum_{\lambda\mu\nu\tau}{}' (\lambda\nu, \mu\tau)_a^{(0)} \begin{vmatrix} \xi_\lambda^{(1)} \xi_\lambda^{(2)} \\ \xi_\nu^{(1)} \xi_\nu^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\mu^{(1)} \xi_\mu^{(2)} \\ \xi_\tau^{(1)} \xi_\tau^{(2)} \end{vmatrix},$$

wo der Strich am Summenzeichen andeuten soll, dass sich die Summe über alle Combinationen der Wertepaare λ, ν; μ, τ, für die $\lambda < \nu$, $\mu < \tau$ ist, erstreckt. Andererseits ist:

$$b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \xi_\lambda^{(1)} \xi_\mu^{(1)} \cdot \sum_{\nu\tau} a_{\nu\tau} \xi_\nu^{(2)} \xi_\tau^{(2)} - \sum_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} \xi_\lambda^{(1)} \xi_\mu^{(2)} \cdot \sum_{\nu\tau} a_{\nu\tau} \xi_\nu^{(1)} \xi_\tau^{(2)},$$

und zufolge einer bekannten Identität aus der Theorie der Determinanten können wir dafür auch schreiben:

$$b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = \sum_{\lambda\mu\nu\tau} \begin{vmatrix} a_{\lambda\mu} a_{\lambda\tau} \\ a_{\nu\mu} a_{\nu\tau} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\lambda^{(1)} \xi_\lambda^{(2)} \\ \xi_\nu^{(1)} \xi_\nu^{(2)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_\mu^{(1)} \xi_\mu^{(2)} \\ \xi_\tau^{(1)} \xi_\tau^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir dieses in (12*) ein, so erhalten wir die endgiltige Formel:

$$(15)\qquad K = \frac{\sum'_{\lambda\nu\mu\tau} (\lambda\nu, \mu\tau)_a \begin{vmatrix} \xi^{(1)}_\lambda & \xi^{(2)}_\lambda \\ \xi^{(1)}_\nu & \xi^{(2)}_\nu \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi^{(1)}_\mu & \xi^{(2)}_\mu \\ \xi^{(1)}_\tau & \xi^{(2)}_\tau \end{vmatrix}}{\sum'_{\lambda\nu\mu\tau} \begin{vmatrix} a_{\lambda\mu} & a_{\lambda\tau} \\ a_{\nu\mu} & a_{\nu\tau} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi^{(1)}_\lambda & \xi^{(2)}_\lambda \\ \xi^{(1)}_\nu & \xi^{(2)}_\nu \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi^{(1)}_\mu & \xi^{(2)}_\mu \\ \xi^{(1)}_\tau & \xi^{(2)}_\tau \end{vmatrix}}.$$

§ 320. Räume mit constantem Krümmungsmass.

Wir sagen, der Raum S_n habe ein constantes Riemann'sches Krümmungsmass, wenn das Krümmungsmass K von σ stets denselben Wert behält, wie auch der Punkt M_0 in S_n gewählt werden mag und welches auch die Orientation der Tangentialebene der geodätischen Fläche σ in M_0 sein mag*). Aus (15) ergiebt sich unmittelbar: Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass der Raum S_n ein constantes Riemann'sches Krümmungsmass K_0 hat, werden ausgedrückt durch die Gleichungen:

$$(16)\qquad (\lambda\nu, \mu\tau) = K_0(a_{\lambda\mu}a_{\nu\tau} - a_{\lambda\tau}a_{\nu\mu}),$$

die für alle Werte der Indices λ, ν, μ, τ von 1 bis n gelten müssen.**)

Es ist für das Folgende zweckmässig, die Bedingungen (16) in eine andere genau äquivalente Form zu bringen, indem statt der Vier-Indices-Symbole erster Art diejenigen zweiter Art eingeführt werden. Bezeichnen wir hierzu mit r, k, s, t vier beliebige Indices, wobei wir voraussetzen, dass k von s und von t verschieden sei, so erhalten wir die folgenden, den Gleichungen (16) äquivalenten Gleichungen:

$$(16^*)\qquad \{rk, st\} = 0, \quad \{rt, st\} = K_0 a_{rs}.$$

Zunächst überzeugen wir uns von der wirklichen Existenz n-dimensionaler Räume mit beliebig gegebenem constanten Krümmungsmass K_0, indem wir den Riemann'schen typischen Ausdruck für das Quadrat des Linienelements bilden. Zu diesem Zwecke suchen wir den Gleichungen (16) durch ein Linienelementquadrat von der Form:

---

*) Schur hat nachgewiesen (Mathem. Annalen, 27. Bd.), dass K nur als mit der Orientation von σ um M_0 unveränderlich angenommen zu werden braucht; dann ist K notwendig constant, auch wenn M_0 sich ändert.

**) Dass die Bedingungen (16) hinreichend sind, ist evident. Dass sie ferner auch notwendig sind, ergiebt sich daraus, dass, wenn wir die Richtung $(\xi^{(1)}_i)$ festlegen und die Richtung $(\xi^{(2)}_i)$ sich beliebig ändern lassen, Gleichung (15), wenn darin für K K_0 gesetzt wird, eine homogene quadratische Relation zwischen den Richtungsconstanten $\xi^{(2)}_i$ ist, die mit Notwendigkeit eine Identität sein muss.

$$(17) \qquad ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{U^2},$$

wo U eine zu bestimmende Function der x ist, zu genügen. Hierzu bemerken wir: Hat das Quadrat des Linienelements eines Raumes S_n die orthogonale Form:

$$ds^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + \cdots + H_n^2 dx_n^2,$$

und bedeuten r, k, i, h vier verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, 2, \ldots n$, so ergeben sich die Gleichungen:

$$(18) \quad \begin{cases} (rk, ih) = 0, \\ (rk, kh) = H_k\left(\dfrac{\partial^2 H_k}{\partial x_r \partial x_h} - \dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial H_r}{\partial x_h}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_r} - \dfrac{1}{H_h}\dfrac{\partial H_h}{\partial x_r}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_h}\right), \\ (rk, kr) = H_r H_k\left[\dfrac{\partial}{\partial x_r}\left(\dfrac{1}{H_r}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_r}\right) + \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{1}{H_k}\dfrac{\partial H_r}{\partial x_k}\right) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \sum_1^n {}_l \dfrac{1}{H_l^2}\dfrac{\partial H_r}{\partial x_l}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_l} - \dfrac{1}{H_r^2}\dfrac{\partial H_r}{\partial x_r}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_r} - \dfrac{1}{H_k^2}\dfrac{\partial H_r}{\partial x_k}\dfrac{\partial H_k}{\partial x_k}\right]. \end{cases}$$

Wenden wir diese Gleichungen auf die Form (17) zur Bildung der Bedingungen (16) an, so erhalten wir zur Bestimmung von U die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_r \partial x_h} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_r^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_h^2} = \frac{1}{U}\left[K_0 + \sum{}_i \left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2\right].$$

Der Ausdruck für die allgemeine Lösung U dieser Gleichungen lässt sich leicht angeben; doch genügt es uns hier, zu bemerken, dass denselben durch

$$U = 1 + \frac{K_0}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

genügt wird. Infolge dessen nimmt das Quadrat des Linienelements des Raumes S_n mit constantem Krümmungsmass K_0 die typische Riemann'sche Form an:

$$(19) \qquad ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{\left[1 + \frac{K_0}{4}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\right]^2}.$$

Wir bemerken ferner, dass, wenn das Krümmungsmass K_0 negativ, gleich $-\frac{1}{R^2}$, ist, in welchem Falle wir von einem pseudosphärischen Raume vom Radius R oder von einem hyperbolischen Raume reden wollen, U auch gleich $\frac{x_1}{R}$, d. h.:

$$(20) \qquad ds^2 = \frac{R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2)}{x_1^2}$$

angenommen werden kann.

§ 321. Abwickelbarkeit von Räumen mit constantem Krümmungsmass auf einander.

Auf Räume von constantem Krümmungsmass werden wir mit Notwendigkeit geführt, wenn wir Räume suchen, für welche die Geometrie eines jeden Gebiets mit derjenigen jedes anderen Gebiets identisch ist, d. h. die von solcher Beschaffenheit sind, dass jede in ihnen befindliche Figur in ein beliebiges anderes Gebiet desselben Raumes ohne Änderung der Strecken und Winkel verlegt und auch um einen festgehaltenen Punkt desselben beliebig orientiert werden kann. Um dieses noch anders auszudrücken, führen wir die Definition auf einander abwickelbarer Räume ein. Wir sagen nämlich: Zwei n-dimensionale Räume S_n und S'_n sind auf einander abwickelbar, wenn sie Punkt für Punkt so auf einander bezogen werden können, dass entsprechende Strecken und daher auch entsprechende Winkel einander gleich sind, oder auch, wenn die beiden Differentialformen:

$$ds^2 = \sum_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k, \quad ds'^2 = \sum_{ik} a'_{ik}\, dx'_i\, dx'_k,$$

welche die Quadrate ihrer Linienelemente darstellen, in einander transformierbar sind. In diesem Falle können wir uns auch dahin ausdrücken, dass jeder der vorhin betrachteten Räume so beschaffen ist, dass ein beliebiges Gebiet desselben auf ein anderes beliebiges Gebiet bei gleichfalls beliebiger Orientation um einen festen Punkt abwickelbar ist. Zufolge der Definition des Krümmungsmasses ist dann klar, dass dasselbe constant sein muss und dass hierzu nur angenommen zu werden braucht, dass ein Punkt P in einen anderen beliebigen Punkt P' verlegt und ein Winkel, dessen Scheitel P ist, mit jedem gleich grossen Winkel, dessen Scheitel in P' liegt, zur Deckung gebracht werden kann. Umgekehrt aber besteht in jedem Raume von constantem Krümmungsmass eine Geometrie zu Recht, die von dem betreffenden Gebiete des Raumes unabhängig ist; es gilt mithin auch für die Geometrie in diesen Räumen das Princip von der Deckbarkeit der Figuren. Dieses wichtige Ergebnis leiten wir aus dem folgenden allgemeinen Satze ab, den wir jetzt beweisen wollen:

Zwei n-dimensionale Räume mit demselben constanten Riemann'schen Krümmungsmass K_0 sind auf einander abwickelbar, und zwar in der Weise, dass ein beliebiger Punkt A des einen in einen beliebigen Punkt A' des anderen verlegt und ein orthogonales n-eder*), das von A ausgeht, mit einem

*) Unter einem orthogonalen n-eder, das von A ausgeht, verstehen wir ein System von n Richtungen, die von A ausgehen und paarweise auf einander senkrecht stehen.

beliebigen anderen, das von A' ausgeht, zur Deckung gebracht werden kann.

Wir beweisen den Satz zunächst für den Fall, dass das Krümmungsmass gleich Null ist, indem wir zeigen, dass in diesem Falle das Quadrat des Linienelements auf die typische Form:

$$dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$$

gebracht werden kann, d. h. dass, wenn für die definite Differentialform:

$$\sum a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

alle Vier-Indices-Symbole verschwinden, n Functionen y der x so bestimmt werden können, dass

$$dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2 = \sum a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

ist*).

Zunächst muss infolge der Christoffel'schen Formeln (I), S. 43, jedes y dem System von $\frac{n(n+1)}{2}$ simultanen Differentialgleichungen:

(21) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_l \begin{Bmatrix} i k \\ l \end{Bmatrix}_a \frac{\partial y}{\partial x_l} \quad (i, k) = 1, 2, \cdots n)$$

genügen. Da ferner allgemein

$$\{rk, st\}_a = 0$$

ist, so ist dasselbe ein unbeschränkt integrierbares System, d. h. ein solches, dass der Anfangswert des Integrals y und die Werte seiner n ersten Differentialquotienten willkürlich bleiben. Nehmen wir nun n von einander verschiedene particuläre Lösungen des Systems (21) und bezeichnen wir mit J ihre Functionaldeterminante, d. h. setzen wir:

$$J = \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right|,$$

so erhalten wir sofort die Gleichung:

$$\frac{\partial J}{\partial x_k} = \sum \begin{Bmatrix} l k \\ l \end{Bmatrix}_a \cdot J \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

d. h. (S. 45, (20)):

$$\frac{\partial \log J}{\partial x_k} = \frac{\partial \log \sqrt{a}}{\partial x_k}$$

und hieraus durch Integration:

(22) $$J = C\sqrt{a} \quad (C = \text{Const.}).$$

*) Dieses genügt offenbar zum Beweise des Satzes, denn wird mit den y eine orthogonale lineare Transformation vorgenommen, so kann dem gewählten orthogonalen n-eder die verlangte Orientation erteilt werden.

Wir brauchen demnach n nur linear von einander unabhängige Lösungen y von (21) zu wählen, so sind sie es überhaupt, worauf wir $y_1, y_2, \ldots y_n$ als neue Veränderliche wählen können. Bezeichnen wir mit:

$$ds^2 = \sum b_{ik}\, dy_i\, dy_k \tag{23}$$

die transformierte Form, so haben wir:

$$a = b \,.\, J^2,$$

also wegen (22):

$$b = \text{Const.}$$

Sind andrerseits y_α, y_β zwei beliebige Lösungen von (21), so ergiebt sich leicht (S. 41):

$$\nabla_a(y_\alpha, y_\beta) = \text{Const.}^{*)},$$

und da

$$\nabla_a(y_\alpha, y_\beta) = B_{\alpha\beta}$$

ist, so sehen wir, dass die Unterdeterminanten von b, also auch die b_{ik}, constant sind. Wir brauchen somit nur die Veränderlichen y linear zu transformieren, um

$$b_{ii} = 1, \quad b_{ik} = 0 \quad (i \neq k)$$

zu machen **). Jeder Raum mit verschwindendem Riemann'schen Krümmungsmass, dessen Linienelementquadrat auf die Form:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 \tag{24}$$

gebracht werden kann, mag ein euklidischer Raum genannt werden. Sobald das Quadrat des Linienelements auf diese typische Form (24) gebracht ist, fallen offenbar die geodätischen Linien des Raumes mit den Geraden zusammen, und es ist die Entfernung δ zweier Punkte x_i' und x_i'' durch

$$\delta = \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + (x_2' - x_2'')^2 + \cdots + (x_n' - x_n'')^2}$$

gegeben.

---

*) Beim Beweise berücksichtige man die Identität:

$$\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_l} = -\sum_t A_{it}\begin{Bmatrix} lt \\ k \end{Bmatrix} - \sum_t A_{kt}\begin{Bmatrix} lt \\ i \end{Bmatrix}.$$

**) Auf einem nur wenig abweichenden Wege könnte man sogleich von Anfang an die Fundamentallösungen $y_1, y_2, \ldots y_n$ so wählen, dass

$$\nabla(y_i, y_k) = 0 \quad (i \neq k),$$

also

$$B_{ik} = 0, \quad b_{ik} = 0$$

wäre.

§ 322. Abwickelbarkeit zweier Räume mit demselben constanten Krümmungsmass K_0 auf einander.

Indem wir nun zu dem Falle übergehen, in welchem das Krümmungsmass eine nicht verschwindende Constante K_0 ist, stützen wir uns auf die Thatsache, dass, wenn wir anstatt des Systems (21) das folgende betrachten:

$$(25)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_l \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}_a \frac{\partial U}{\partial x_l} - K_0 a_{ik} U \quad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

diese $\frac{n(n+1)}{2}$ simultanen Gleichungen wieder ein unbeschränkt integrierbares System bilden*). Entwickeln wir nämlich die Bedingungen dafür, so finden wir genau die Gleichungen (16) wieder. Es lässt sich also eine Lösung U von (25) finden, die samt ihren n ersten partiellen Differentialquotienten in einem Punkte von S_n willkürlich gegebene Werte annimmt. Ferner ist sehr zu beachten, dass das System (25) gegenüber Coordinatentransformationen Invarianteneigenschaft besitzt, da es in den Bezeichnungen für die covarianten zweiten Differentialquotienten in der Form:

$$U_{rs} = -K_0 a_{rs} U$$

geschrieben werden kann.

Sind nun U und V zwei verschiedene oder nicht verschiedene Lösungen von (25), so ist, wie leicht nachgewiesen werden kann:

$$(26)\qquad \nabla(U, V) = -K_0 UV + \text{Const.}^{**});$$

insbesondere ist:

$$(27)\qquad \Delta_1 U = -K_0 U^2 + \text{Const.}$$

Es sind demnach die Hyperflächen $U = \text{Const.}$ einander geodätisch parallel (S. 571), und ferner sind sie, wie wir nun nachweisen wollen, selbst $n-1$-dimensionale Räume von constantem (positiven oder verschwindenden) Krümmungsmass.

Angenommen, es sei zunächst K_0 negativ, gleich $-\frac{1}{R^2}$, d. h. es handle sich um einen pseudosphärischen Raum vom Radius R. Indem wir dann über die Anfangswerte von U und $\frac{\partial U}{\partial x_i}$ Verfügung treffen,

---

*) Auf den Umstand, dass das System (25) unbeschränkt integrierbar ist, hat Weingarten hingewiesen. (Crelle's Journal, 94. Bd.)

**) Bildet man nämlich irgend einen Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial x_i}\{V(U, V) + K_0 UV\}$, indem man die Gleichungen (25) sowie die analogen für V berücksichtigt, so findet man identisch: $\frac{\partial}{\partial x_i}\{V(U, V) + K_0 UV\} = 0$.

können wir eine Lösung U von (25) wählen, für welche die Constante auf der rechten Seite von (27) gleich Null, d. h.

$$(27^*) \qquad \Delta_1 U = \frac{U^2}{R^2}$$

ist. Indem wir unter U eine solche Lösung verstehen, wählen wir die Hyperflächen $U =$ Const. als Parameterhyperflächen x_1 und als Parameter x_1 die Bogen der zu ihnen orthogonalen geodätischen Linien, gerechnet von einer Hyperfläche U ab. Dann nimmt das Quadrat des Linienelements die geodätische Form (S. 570) an:

$$ds^2 = dx_1^2 + \sum a_{rs} dx_r dx_s \quad (r, s = 2, 3, \dots n),$$

und es ist U eine Function von x_1 allein:

$$U = F(x_1).$$

Da jetzt

$$A_{11} = 1, \quad A_{1r} = 0 \quad (r \neq 1),$$

also nach S. 43, (18) und (17),

$$\begin{Bmatrix} ik \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} ik \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1}$$

ist, so haben wir infolge der Gleichungen (25) mit Notwendigkeit:

$$(\alpha) \qquad F''(x_1) = -K_0 F(x_1) = \frac{F(x_1)}{R^2},$$

$$(\beta) \qquad \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_1} = -2K_0 a_{ik} \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}.$$

Aus (α) ergiebt sich nun:

$$(\alpha^*) \qquad F(x_1) = C . e^{\frac{x_1}{R}} + C' . e^{-\frac{x_1}{R}},$$

worin C und C' Constanten sind, von denen wegen Gleichung (27*), die nach S. 41, oben, die Form:

$$\Delta_1 U = \left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2$$

annimmt, die eine, sagen wir C', gleich Null sein muss. Wir können also

$$F(x_1) = e^{\frac{x_1}{R}}$$

machen, und es ergiebt sich dann aus den Gleichungen (β):

$$a_{ik} = e^{\frac{2x_1}{R}} . b_{ik},$$

wo die b_{ik} nur von $x_2, x_3, \dots x_n$ abhängen. Somit folgt:

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}} \sum_2^n b_{ik} dx_i dx_k.$$

Wir berechnen nun für die Form der $n-1$ Veränderlichen $x_2, x_3, \ldots x_n$

$$\sum b_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (i, k = 2, 3, \ldots n)$$

die Vier-Indices-Symbole, die wir mit $(rk, ih)_b$ bezeichnen wollen. Aus (32*), S. 51, folgt:

$$(\gamma) \qquad (rk, ih)_a - e^{\frac{2x_1}{R}}(rk, ih)_b = \begin{bmatrix} rh \\ 1 \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} ik \\ 1 \end{bmatrix}_a - \begin{bmatrix} ri \\ 1 \end{bmatrix}_a \begin{bmatrix} hk \\ 1 \end{bmatrix}_a.$$

Nun ist:

$$\begin{bmatrix} rh \\ 1 \end{bmatrix}_a = -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{rh}}{\partial x_1} = -\frac{1}{R} e^{\frac{2x_1}{R}} b_{rh},$$

und ferner, weil der Raum S_n ein pseudosphärischer vom Radius R sein soll, nach (16), S. 574:

$$(rk, ih)_a = -\frac{1}{R^2}(a_{ri}a_{hk} - a_{rh}a_{ik}) = -\frac{e^{\frac{4x_1}{R}}}{R^2}(b_{ri}b_{hk} - b_{rh}b_{ik}).$$

Setzen wir diese Werte in (γ) ein, so erhalten wir:

$$(rk, ih)_b = 0.$$

Es gehört also die Form:

$$\sum b_{ik}\, dx_i\, dx_k \quad (i, k = 2, 3, \ldots n)$$

zu einem Raume mit verschwindendem Riemann'schen Krümmungsmass und kann daher (S. 578) auf die typische Form:

$$dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$$

gebracht werden. Wir haben somit das Linienelementquadrat des pseudosphärischen Raumes S_n auf die Form gebracht:

$$ds^2 = dx_1^2 + e^{\frac{2x_1}{R}}(dy_2^2 + dy_3^2 + \cdots + dy_n^2)$$

oder, wenn wir

$$e^{-\frac{x_1}{R}} = y_1$$

setzen und die übrigen y_i durch Ry_i ersetzen:

$$ds^2 = \frac{R^2(dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2)}{y_1^2},$$

welches die typische Form (20), S. 575, ist.

§ 323. Conforme Abbildung des hyperbolischen Raumes auf den euklidischen.

Nachdem durch das vorstehende Verfahren unser Satz für den Fall der pseudosphärischen Räume nachgewiesen ist, dürfte es nicht ohne Interesse sein, die nachstehenden Bemerkungen über die anderen

Lösungen U des Systems (25), für welche die Constante auf der rechten Seite der Gleichung (27) von Null verschieden ist, anzuknüpfen.

Durch Integration der Gleichung (α) in der Gestalt (α^*) erhalten wir zwei neue Fälle, die wesentlich von einander verschieden sind, je nachdem die vorhin erwähnte Constante negativ oder positiv ist, nämlich im ersten Falle:

$$F(x_1) = \sinh \frac{x_1}{R},$$

im zweiten Falle:

$$F(x_1) = \cosh \frac{x_1}{R}.$$

Demnach ergiebt sich bezüglich:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I)} & ds^2 = dx_1^2 + \sinh^2 \frac{x_1}{R} \sum b_{rs} dx_r dx_s \\ \text{II)} & ds^2 = dx_1^2 + \cosh^2 \frac{x_1}{R} \sum b_{rs} dx_r dx_s \end{array}\right\} (r, s = 2, 3, \cdots n),$$

wo die b_{rs} beide Male von x_1 unabhängig sind. Da wir aus den Werten für die Ausdrücke:

$$(rk, ih)_a - \sinh^2 \frac{x_1}{R} (rk, ih)_b,$$

$$(rk, ih)_a - \cosh^2 \frac{x_1}{R} (rk, ih)_b$$

bezüglich erhalten:

$$(rk, ih)_b = \frac{1}{R^2} (b_{ri} b_{hk} - b_{rh} b_{ik}),$$

$$(rk, ih)_b = -\frac{1}{R^2} (b_{ri} b_{hk} - b_{rh} b_{ik}),$$

so erhellt nach (16), S. 574, dass die Hyperflächen $x_1 = \text{Const.}$ wieder $n-1$-dimensionale Räume von constantem Riemann'schen Krümmungsmass sind, doch hat dasselbe im Falle I) einen positiven, im Falle II) einen negativen Wert.

Wir wollen noch hinzufügen, dass für die typische Form (20) des Linienelementquadrats im pseudosphärischen Raume die allgemeine Lösung U des Systems (25), wie sich leicht nachweisen lässt, bis auf einen constanten Factor durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$(28) \quad U = \frac{1}{y_1} [y_1^2 + (y_2 - c_2)^2 + (y_3 - c_3)^2 + \cdots + (y_n - c_n)^2 + C],$$

wo $c_2, \dots c_n, C$ willkürliche Constanten sind.

Da sich nun

$$\Delta_1 U = \frac{U^2}{R^2} - \frac{4C}{R^2}$$

ergiebt, so sehen wir, dass das Vorzeichen des Krümmungsmasses der

Integralhyperflächen $U =$ Const. mit demjenigen der Constanten C in (28) übereinstimmt, während im Falle $C = 0$ die Hyperflächen $U =$ Const. das Krümmungsmass Null besitzen, wie wir gesehen haben.

Indem wir endlich zum Beweise des in § 321 angeführten Satzes für den Fall:

$$K_0 = + \frac{1}{R^2}$$

übergehen, wollen wir annehmen, er sei bereits für $n - 1$ Dimensionen bewiesen, und dann zeigen, dass er auch für n Dimensionen gültig ist. Dann ist er allgemein nachgewiesen mit Rücksicht darauf, dass er für zwei Dimensionen richtig ist (Kap. VII, S. 187).

Nun ergiebt sich mittels ganz analoger Betrachtungen wie zu Beginn des vorigen Paragraphen, dass, wenn wir als Parameterhyperflächen $x_i =$ Const. ein Integralsystem von (25) wählen, wir das Quadrat des Linienelements hier auf die Form:

$$ds^2 = dx_1^2 + \sin^2 \frac{x_1}{R} \sum b_{rs} dx_r dx_s \qquad (r, s = 2, 3, \ldots n)$$

bringen können, worin die b_{rs} wie gewöhnlich von x_1 unabhängig sind. Da wir andrerseits erhalten:

$$(rk, ih)_b = \frac{1}{R^2} (b_{ri} b_{hk} - b_{rh} b_{ik}),$$

so sehen wir, dass die Hyperflächen $x_i =$ Const. $n - 1$-dimensionale Räume mit constantem positiven Riemann'schen Krümmungsmass sind. Somit ist der Beweis unseres Satzes für n Dimensionen auf den für $n - 1$ Dimensionen zurückgeführt und kann als erledigt gelten. Durch wiederholte Anwendung desselben Verfahrens erhalten wir offenbar schliesslich folgende typische Form für das Quadrat des Linienelements:

$$ds^2 = R^2 \{ dy_1^2 + \sin^1 y_1 dy_2^2 + \sin^1 y_1 \sin^2 y_2 dy_3^2 + \cdots + \sin^2 y_1 \sin^2 y_2 \cdots \cdots \sin^2 y_{n-1} dy_n^2 \}.$$

§ 324. Geometrie im hyperbolischen Raume.

Wir wollen uns nun kurz mit der hyperbolischen Geometrie, d. h. der Geometrie in den pseudosphärischen Räumen, beschäftigen. Wir gehen zu diesem Zweck auf die typische Form (20) für das Linienelement, S. 575, zurück. Setzen wir darin der Einfachheit halber R gleich Eins, so erhalten wir:

$$(29) \qquad ds^2 = \frac{dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2}{x_1^2}.$$

Wir betrachten $x_1, x_2, \ldots x_n$ als (Cartesische orthogonale) Coordinaten eines Punktes im Raume mit dem Krümmungsmass Null,

oder, wie wir sagen wollen, in dem **euklidischen Raume**, in dem das Quadrat des Linienelements die Form:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2$$

hat. Dann definiert Gleichung (29) eine **conforme Abbildung** des pseudosphärischen Raumes auf den euklidischen. Die reellen Punkte des ersten haben zu Bildpunkten im zweiten Punkte, die alle auf derselben Seite der Hyperebene $x_1 = 0$ liegen. Um die Begriffe zu fixieren, wollen wir annehmen, dass dieses Gebiet dasjenige sei, in dem $x_1 > 0$ ist.

Integrieren wir nunmehr alle Differentialgleichungen der geodätischen Linien, welche hier die Form:

$$\frac{d^2 x_1}{ds^2} = \frac{2}{x_1}\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - x_1,$$

$$\frac{d^2 x_r}{ds^2} = \frac{2}{x_1}\frac{dx_1}{ds}\frac{dx_r}{ds} \qquad (r = 2, 3, \ldots n)$$

annehmen, bezeichnen wir mit $c_2, c_3, \ldots c_n;\ a_2, a_3, \ldots a_n$ $2n-2$ willkürliche Constanten und setzen wir:

$$c = \sqrt{c_2^2 + c_3^2 + \cdots + c_n^2}, \tag{30}$$

so erhalten wir das folgende System von Integralgleichungen*):

$$\left\{\begin{aligned} cx_1 &= \frac{1}{\cosh s}, \\ x_r &= \frac{c_r}{c^2}\operatorname{tgh} s + a_r \qquad (r = 2, 3, \ldots n). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

D. h.: **Die Bilder der geodätischen Linien des pseudosphärischen Raumes sind Kreise****), **die zu der Grenzhyperebene $x_1 = 0$ orthogonal sind. Umgekehrt ist jeder solcher Kreis das Bild einer geodätischen Linie.** Wie wir sehen, haben wir so die Abbildung, die uns im 16. Kapitel zum Studium der Geometrie auf den pseudosphärischen Flächen diente, auf n-dimensionale Räume

*) Bemerkt werde, dass, wenn die c_i sämtlich gleich Null wären, die Gleichungen (31) des Textes ihren Sinn verlieren würden. Dann wäre aber offenbar das Bild der geodätischen Linie eine zur Grenzhyperebene senkrechte Gerade.

) Unter einem **Kreise des euklidischen Raumes verstehen wir natürlich eine ebene (in einem S_2 gelegene) Curve, deren Punkte von einem festen Punkte der Ebene (dem Mittelpunkte) gleich weit entfernt sind. Dass die durch die Gleichungen (31) dargestellte Curve diese Eigenschaft besitzt, ergiebt sich in der einfachsten Weise dadurch, dass durch Einführung eines neuen Coordinatensystems die Gleichungen des Textes auf die Form:

$$cx_1 = \frac{1}{\cosh s},\ cx_2 = \operatorname{tgh} s,\ x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$$

gebracht werden können.

ausgedehnt. Wiederholen wir die Betrachtungen zu Beginn dieses Kapitels, so ergiebt sich auch hier:

Zwei Punkte des hyperbolischen Raumes bestimmen stets eine geodätische Linie, die sie verbindet. Ihre Entfernung ergiebt sich als der Logarithmus des Doppelverhältnisses, das auf dem Bildkreise der geodätischen Linie die beiden Bildpunkte mit den beiden Schnittpunkten des Kreises und der Grenzhyperebene bilden.

Wir betrachten nun eine Hypersphäre Σ_{n-1} des Bildraumes, deren Mittelpunkt in der Grenzhyperebene $x_1 = 0$ liegt, d. h. eine Hyperfläche mit der Gleichung:

$$x_1^2 + (x_2 - c_2)^2 + (x_3 - c_3)^2 + \cdots + (x_n - c_n)^2 = r^2$$
$$(c_2, c_3, \ldots c_n, \quad r = \text{Const.}).$$

Schneiden wir Σ_{n-1} mit einer zu $x_1 = 0$ senkrechten Hyperebene, so ist der Schnitt eine sphärische Mannigfaltigkeit Σ_{n-2}, deren Mittelpunkt in dem Schnittraume R_{n-2} der beiden Hyperebenen liegt. Schneiden wir wieder mit einer zur Grenzhyperebene senkrechten Hyperebene, so ergiebt sich eine in einem R_{n-2} gelegene sphärische Mannigfaltigkeit, deren Mittelpunkt in dem R_{n-3} liegt, den R_{n-2} mit $x_1 = 0$ gemeinsam hat. So können wir fortfahren. Kommen wir schliesslich auf diese Weise zu den Kugeln Σ_2, so ist klar, dass auf jeder von ihnen doppelt unendlich viele, zur Grenzhyperebene orthogonale Kreise liegen. Sie stellen folglich geodätische Flächen des hyperbolischen Raumes dar, und daraus ergiebt sich die folgende Eigenschaft, die auch als für die Räume mit constantem Krümmungsmass charakteristisch nachgewiesen werden könnte*):

Jede geodätische Fläche enthält doppelt unendlich viele geodätische Linien des Raumes, ist also geodätische Fläche bezüglich aller seiner Punkte.

Hiernach schon ist klar, dass das Krümmungsmass dieser geodätischen Flächen constant und gleich dem des Raumes ist. Ebenso ist klar, dass die mehrdimensionalen sphärischen Mannigfaltigkeiten Σ_3, Σ_4, ... Σ_{n-1}, die wir vorhin betrachtet haben, geodätische Mannigfaltigkeiten des hyperbolischen Raumes darstellen, d. h. Mannigfaltigkeiten, die von geodätischen Untermannigfaltigkeiten gebildet werden, und zwar von solchen, die von einem Punkte tangential an einen R_3, R_4, u. s. w. ausgehen. Ferner ist klar, dass solche geodä-

*) S. Schur, Über Räume constanten Krümmungsmasses (Mathem. Annalen, 27. Bd., S. 172 und 538).

tische Mannigfaltigkeiten selbst Räume mit constantem Krümmungsmass, und zwar mit demselben, wie der umgebende Raum, sind.

Zum Schlusse wollen wir darauf hinweisen, dass infolge Gleichung (28) des vorigen Paragraphen jede Hypersphäre des Bildraumes eine Hyperfläche mit constantem Krümmungsmass K des hyperbolischen Raumes darstellt, und zwar ist K positiv oder negativ, je nachdem die Hypersphäre die Grenzhyperebene schneidet oder nicht, während es für alle die Grenzhyperebene berührenden Hypersphären gleich Null ist. Letztere stellen die sogenannten Grenzhypersphären des hyperbolischen Raumes vor.

§ 325. Bewegungen des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes.

Ein n-dimensionaler hyperbolischer Raum gestattet nach dem Satze in § 321, S. 576, $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ Abwicklungen auf sich selbst, die wir auch Bewegungen des Raumes nennen wollen. Für den Fall $n = 2$ haben wir schon im 16. Kapitel die analytische Darstellung dieser Bewegungen mittels der linearen Substitutionen mit reellen Coefficienten bezüglich einer complexen Veränderlichen z gegeben. Wir wollen jetzt die entsprechende Aufgabe für den dreidimensionalen Raum lösen und so die von Poincaré*) angegebenen Formeln ableiten.

Bei jeder Bewegung des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes in sich muss die Grenzebene als Ort der unendlich fernen Punkte in sich übergehen. Da ferner zwei zur Grenzebene orthogonale Kugeln in zwei andere ebensolche übergehen müssen, die sich unter demselben Winkel wie die ursprünglichen schneiden, so ist klar, dass die dabei stattfindende Transformation der Grenzebene conform sein und Kreise wieder in Kreise überführen muss. Sie ist also eine Kreisverwandtschaft.

Bezeichnen wir mit

$$ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{\zeta^2} \tag{32}$$

das Quadrat des Linienelements im hyperbolischen Raume und breiten wir in der Grenzebene $\zeta = 0$ die Werte der complexen Veränderlichen $z = \xi + i\eta$ aus, so sehen wir (S. 82), dass jeder Bewegung des hyperbolischen Raumes in sich eine lineare Substitution bezüglich der complexen Veränderlichen z:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{33}$$

*) Sur les Groupes Kleinéens (Acta Mathematica, 3. Bd., S. 49).



oder bezüglich der conjugirten Veränderlichen z_0:

(33*) $$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}$$

entspricht. Wenn wir uns aber zunächst auf die Betrachtung derjenigen Bewegungen beschränken, welche in stetiger Weise durch unendlich kleine Bewegungen erzeugt werden können, so erhellt, dass wir Gleichung (33*), da sie keine infinitesimalen Substitutionen enthält, auszuschliessen haben.

Um nun die Gleichungen zu finden, welche die Coordinaten ξ, η, ζ eines Punktes P und diejenigen ξ', η', ζ' des Punktes P', in den P bei der zu (33) gehörigen Bewegung übergeht, verknüpfen, haben wir mit Poincaré nur folgendermassen zu verfahren. Die zur Grenzebene orthogonalen und durch P gehenden Kugeln gehen in ebenfalls zur Grenzebene orthogonale und durch P' gehende über. Sei in den üblichen Bezeichnungen (S. 82, Anmerkung):

(a) $$A z' z_0' + B z' + B_0 z_0' + C = 0$$

die Gleichung des Äquators einer dieser Kugeln durch P' in der Grenzebene, so ist, wenn

$$\varrho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

gesetzt wird:

(a*) $$A \varrho'^2 + B z' + B_0 z_0' + C = 0$$

die Gleichung der Kugel selbst.

Durch die Substitution (33) geht der Kreis (a) in den nachstehenden über:

$$\begin{aligned}(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0) z z_0 &+ \\ + (A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0) z &+ \\ + (A\alpha_0\beta + B_0\alpha_0\delta + B\beta\gamma_0 + C\gamma_0\delta) z_0 &+ \\ + A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0 &= 0.\end{aligned}$$

Da die Kugel, die diesen Kreis als grössten hat, durch P geht, müssen wir haben:

$$\begin{aligned}A(\alpha\alpha_0\varrho^2 + \alpha\beta_0 z + \alpha_0\beta z_0 + \beta\beta_0) &+ \\ + B(\alpha\gamma_0\varrho^2 + \alpha\delta_0 z + \beta\gamma_0 z_0 + \beta\delta_0) &+ \\ + B_0(\alpha_0\gamma\varrho^2 + \alpha_0\delta z_0 + \beta_0\gamma z + \beta_0\delta) &+ \\ + C(\gamma\gamma_0\varrho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0) &= 0.\end{aligned}$$

Immer, wenn A, B, C der Gleichung (a*) genügen, müssen sie auch der letzten genügen. Daraus ergeben sich durch Vergleichen die Formeln von Poincaré:

$$
(34) \quad \begin{cases} \varrho'^2 = \dfrac{\alpha\alpha_0\varrho^2 + \alpha\beta_0 z + \alpha_0\beta z_0 + \beta\beta_0}{\gamma\gamma_0\varrho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0}, \\ z' = \dfrac{\alpha\gamma_0\varrho^2 + \alpha\delta_0 z + \beta\gamma_0 z_0 + \beta\delta_0}{\gamma\gamma_0\varrho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0}, \\ z_0' = \dfrac{\alpha_0\gamma\varrho^2 + \alpha_0\delta z_0 + \beta_0\gamma z + \beta_0\delta}{\gamma\gamma_0\varrho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0}. \end{cases}
$$

Wird, wie es erlaubt ist,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

angenommen, so können wir neben diesen Gleichungen die folgende, die sich dann ergiebt, setzen:

$$
(34^*) \quad \zeta' = \frac{\zeta}{\gamma\gamma_0\varrho^2 + \gamma\delta_0 z + \gamma_0\delta z_0 + \delta\delta_0}.
$$

Umgekehrt ist leicht ersichtlich, dass zu jeder linearen Substitution (33) eine Bewegung des hyperbolischen Raumes gehört. Dazu brauchen wir nur zu beachten, dass dieses für die drei Elementarsubstitutionen:

$$z' = z + a, \quad z' = kz, \quad z' = \frac{1}{z}$$

zutrifft und dass ferner jede andere Substitution in drei aufeinanderfolgende je einer Art zerlegbar ist.

§ 326. Einteilung der Bewegungen des hyperbolischen Raumes.

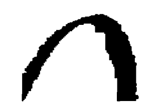
Um die Bewegungen des hyperbolischen Raumes entsprechend den linearen Substitutionen (33), in denen wir

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

voraussetzen, zu classificieren, bemerken wir Folgendes: Die Substitution (33) hat in der Grenzebene zwei feste Punkte A und B, die wir zunächst als getrennt annehmen wollen. Der zur Grenzebene senkrechte Kreis, der über AB als Durchmesser beschrieben wird, stellt eine geodätische Linie des hyperbolischen Raumes vor, die sich in sich selbst verschiebt (Bewegungsaxe).

Nun unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem es bei der Bewegung eine geodätische Fläche giebt, die sich in sich selbst verschiebt, oder nicht. Im ersten Falle sind wir wieder zu der Classification der Bewegungen einer pseudosphärischen Fläche in sich gelangt und teilen dieselben weiter in bezgl. elliptische, hyperbolische und parabolische*). Schleift dagegen keine geodätische Fläche auf sich, so mag die Bewegung eine loxodromische genannt werden.

*) Vgl. Kap. XVI, § 231 u. f.



Um aus den Coefficienten von (33) zu erkennen, zu welcher Art die entsprechende Bewegung gehört, brauchen wir nur daran zu erinnern, dass für zwei affine Substitutionen die Summe $\alpha + \delta$ dieselbe ist. Schleift nun bei der Bewegung eine geodätische Fläche auf sich, so können wir diese Bewegung durch eine affine ersetzen, bei der die Ebene $\eta = 0$ auf sich schleift. Die zugehörige Substitution erhält dann reelle Coefficienten, und da dann eben die complexe Veränderliche $\xi + i\zeta$ in der Ebene $\eta = 0$ derselben Substitution $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ unterworfen ist, so erhalten wir

eine elliptische Substitution für $(\alpha + \delta)^2 < 4$,
" parabolische " " $(\alpha + \delta)^2 = 4$,
" hyperbolische " " $(\alpha + \delta)^2 > 4$.

Bei der ursprünglichen Substitution ist also die Invariante $\alpha + \delta$ reell, und die Substitution ist, je nachdem einer der obigen drei Fälle vorliegt, elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch. Umgekehrt, ist $\alpha + \delta$ reell, so gehört die betreffende Bewegung einem dieser drei Typen an. Denn die zugehörige Substitution kann durch eine affine von der Form*): $z' = \frac{\alpha}{\delta} z$ $(\alpha\delta = 1)$ ersetzt werden; da jedoch $\alpha + \delta$ reell ist, so sind α und δ entweder selbst reell oder conjugiert imaginär mit dem absoluten Betrage Eins. Im ersten Falle ist die Bewegung hyperbolisch, im zweiten elliptisch.

Fassen wir nunmehr zusammen, so können wir sagen:

Wir haben eine loxodromische Bewegung, wenn $\alpha + \delta$ complex ist, dagegen ist für reelles $\alpha + \delta$ die Bewegung elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem $(\alpha + \delta)^2 < 4$, $= 4$ oder > 4 ist**).

Ferner bemerken wir: Da bei einer elliptischen Bewegung für eine gewisse geodätische Fläche eine Rotation um einen ihrer Punkte stattfindet, so bleiben alle Punkte der in diesem Punkte zur Fläche orthogonalen geodätischen Linie fest, und die Bewegung ist eine blosse Rotation um diese geodätische Axe.

Zusammen mit den soeben betrachteten, der Gleichung (33) entsprechenden Bewegungen, die wir Bewegungen erster Art oder direct nennen wollen, können wir auch diejenigen betrachten, die (33*) entsprechen und die wir als Bewegungen zweiter Art oder invers bezeichnen wollen. Bei ihnen sind zwei entsprechende Figuren nicht

---

*) Hierbei ist der Fall ausgeschlossen, dass die beiden festen Punkte der Substitution in der Grenzebene zusammenfallen; dann aber wäre die Substitution parabolisch.

**) Wohlverstanden ist immer $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ vorausgesetzt.

direct, sondern invers congruent. Die zugehörigen Formeln ergeben sich offenbar aus (34) durch Vertauschung von z mit z_0. Unter den Bewegungen zweiter Art sind diejenigen mit der Periode 2 zu unterscheiden, die Spiegelungen genannt werden und in zwei Untergattungen zerfallen. Diejenigen der ersten Gattung sind im Bildraume Inversionen mittels reciproker Radienvectoren bezüglich einer Kugel, deren Mittelpunkt in der Grenzebene liegt, oder es sind im hyperbolischen Raume Symmetrien bezüglich der entsprechenden geodätischen Flächen. Die Spiegelungen der zweiten Gattung ergeben sich durch Combination einer Spiegelung erster Gattung mit einer Rotation vom Betrage π um eine zur spiegelnden geodätischen Fläche senkrechte geodätische Axe.

§ 327. Geodätische Abbildung des hyperbolischen Raumes.

Aus der in den voraufgehenden Paragraphen benutzten conformen Abbildung des hyperbolischen Raumes auf den euklidischen können wir leicht eine andere ableiten, die bei den Untersuchungen Beltramis über Räume mit constantem Krümmungsmass als Ausgangspunkt gedient hat und als geodätische Abbildung des hyperbolischen Raumes auf den euklidischen bezeichnet werden kann*). Bei ihr haben nämlich, wie wir sogleich sehen werden, die geodätischen Linien des hyperbolischen Raumes auch geodätische Linien des euklidischen, also Geraden, zu Bildern.

Wir betrachten den $n+1$-dimensionalen hyperbolischen Raum vom Krümmungsmass $K = -1$, dessen Linienelement durch:

$$(35) \qquad ds^2 = \frac{dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2}{x_0^2}$$

bestimmt ist. Die Hypersphäre im euklidischen Bildraume:

$$(36) \qquad x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2 \quad (a = \text{Const.})$$

stellt eine geodätische Hyperfläche (§ 324), d. h. einen n-dimensionalen hyperbolischen Raum vom Krümmungsmass $K = -1$ vor. Die geodätischen Linien dieses Raumes sind auch geodätische Linien des umgebenden $n+1$-dimensionalen Raumes und als solche durch die Gleichungen (31), S. 584, gegeben:

$$(37) \qquad \begin{cases} cx_0 = \dfrac{1}{\cosh s}, \\ x_r = \dfrac{c_r}{c^2} \operatorname{tgh} s + a_r, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2. \end{cases}$$

*) Zur Ableitung dieser geodätischen Abbildung könnten wir uns auch einer ähnlichen Methode wie in § 241 (S. 435) unter Erweiterung auf höhere Räume bedienen.



Hierzu sind in unserm Falle, damit die geodätische Linie im Raume:

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = a^2$$

liege, noch die folgenden beiden Beziehungen zwischen den Constanten hinzuzufügen:

$$(37^*) \qquad \sum_1^n a_r c_r = 0, \quad \frac{1}{c^2} + \sum_1^n a_r^2 = a^2.$$

Betrachten wir nun $x_1, x_2, \ldots x_n$ als rechtwinklige Cartesische Punktcoordinaten in einem n-dimensionalen euklidischen Bildraume, so sehen wir, dass der gesamte pseudosphärische Raum auf das Innere der Hypersphäre:

$$(38) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq a^2$$

abgebildet ist, während die Punkte auf dieser Hypersphäre selbst die Bilder der unendlich fernen Punkte sind.

Wegen der Gleichungen (37) werden die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen, d. h. durch Geraden des euklidischen Raumes, abgebildet, desgleichen die geodätischen Flächen durch Ebenen, überhaupt alle geodätischen Mannigfaltigkeiten durch lineare Unterräume.

Von Wichtigkeit ist nun das Gesetz, nach welchem für zwei im euklidischen Bildraume (im Innern der Hypersphäre (38)) angenommene Punkte x, x' die geodätische Entfernung δ der beiden entsprechenden abgebildeten Punkte im hyperbolischen Raume gemessen wird. Rechnen wir zu diesem Zwecke in (37) den Bogen s vom Punkte x_i' ab, so haben wir:

$$\cosh \delta = \frac{x_0'}{x_0} = \frac{\sqrt{a^2 - \sum_1^n x_r'^2}}{\sqrt{a^2 - \sum_1^n x_r^2}}.$$

Nun haben wir wegen (37) und (37*):

$$x_r' = a_r, \quad \sum_1^n x_r x_r' = \sum_1^n x_r'^2,$$

also lässt sich die vorhergehende Gleichung auch so schreiben:

$$\cosh \delta = \frac{a^2 - \sum_1^n x_r x_r'}{\sqrt{a^2 - \sum_1^n x_r^2}\sqrt{a^2 - \sum_1^n x_r'^2}}.$$

Setzen wir der Kürze halber:

$$a^2 - \sum_1^n x_r^2 = \Omega_{xx}, \quad a^2 - \sum_1^n x_r'^2 = \Omega_{x'x'}, \quad a^2 - \sum_1^n x_r x_r' = \Omega_{xx'},$$

so haben wir:

(39) $$\cosh \delta = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{x'x'}}}.$$

Nun schneidet die Verbindungslinie der Bildpunkte x_i und x_i' die Hypersphäre:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2$$

in zwei Punkten, die zusammen mit x und x' das durch die bekannte Formel*):

$$M = \frac{\Omega_{xx'} + \sqrt{\Omega_{xx'}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{x'x'}}}{\Omega_{xx'} - \sqrt{\Omega_{xx'}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{x'x'}}}$$

gegebene Doppelverhältnis M bilden. Statt (39) lässt sich dann auch schreiben:

(39*) $$\delta = \frac{1}{2} \log M.$$

Ist der Radius des pseudosphärischen Raumes nicht gleich Eins, sondern R, so tritt offenbar zu dem Ausdruck rechts noch der constante Factor R.

§ 328. Cayley'sche Metrik.

Das soeben erhaltene Ergebnis führt uns zu einer kurzen Erörterung der Cayley'schen Metrik**), dessen Untersuchungen früher datieren als diejenigen Beltramis über denselben Gegenstand.

Anstatt der Hypersphäre:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 = a^2$$

---

*) Sind die Coordinaten y_i eines der beiden Schnittpunkte mit der Hypersphäre durch

$$y_i = \frac{p x_i + q x_i'}{p + q}$$

gegeben, so haben wir zur Bestimmung des Verhältnisses $\frac{p}{q} = \xi$ die quadratische Gleichung:

$$\xi^2 \Omega_{xx} + 2\xi\Omega_{xx'} + \Omega_{x'x'} = 0.$$

Das Verhältnis ihrer beiden Wurzeln ξ_1 und ξ_2 ist gleich M, also

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{M} + \frac{1}{\sqrt{M}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\xi_1}{\xi_2}} + \sqrt{\frac{\xi_2}{\xi_1}}\right) = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2\sqrt{\xi_1 \xi_2}} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{x'x'}}}.$$

**) Memoirs upon Quantics. (Philosophical Transactions, hauptsächlich die 6. Abhandlung, 1859.)

wählen wir eine willkürliche Fläche zweiten Grades, deren Gleichung:

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = 0$$

reelle Coefficienten habe und auf der aus dem weiter unten angeführten Grunde keine reellen Geraden liegen mögen. Wir nehmen nun zwei Punkte P und P' im Raume beliebig an und definieren als ihre Entfernung den mit einer Constanten multiplicierten Logarithmus des Doppelverhältnisses, das sie und die beiden Punkte A und B bestimmen, in denen die Verbindungslinie PP' die Fläche zweiten Grades schneidet, dann haben wir auf diese Weise die Cayley'sche Metrik. Bleiben wir in demjenigen Gebiet des Raumes, von dessen Punkten sich keine reellen Tangenten an die Fundamentalfläche ziehen lassen, so verschwindet die auf obige Weise definierte Entfernung offenbar nur dann, wenn die beiden Punkte P und P' zusammenfallen, und das Quadrat des Linienelements des Raumes ist dann, in Übereinstimmung mit unseren grundlegenden Verfügungen, durch eine definite quadratische Differentialform gegeben. Aus diesem Grunde eben haben wir vorausgesetzt, dass auf der Fundamentalfläche keine reellen Geraden liegen, sonst würden von jedem Punkte des Raumes reelle Tangenten an sie gelegt werden können. Ferner bemerken wir, dass die Punkte auf der Fundamentalfläche für die Cayley'sche Metrik Punkte in unendlicher Entfernung darstellen; deshalb wird diese Fläche zweiten Grades auch die **absolute** Fläche genannt. Nun lässt sich leicht **a priori** einsehen, dass die Cayley'sche Metrik diejenige eines Raumes von constantem Krümmungsmass ist. Es giebt nämlich, wie bekannt, $\infty^{\frac{n(n+1)}{2}}$ Collineationen des Raumes S_n, die die Fundamentalfläche in sich überführen. Bei der Cayley'schen Metrik stellen sie ebenso viele Bewegungen dar, da sich ja bei jeder von ihnen die Entfernungen wegen ihrer projectiven Definition nicht ändern. Diese Arten der Abwickelbarkeit des Raumes auf sich sind mit der durch den Satz in § 321 festgesetzten Willkürlichkeit möglich, folglich ist das Krümmungsmass dieses Raumes constant*).

Wir bemerken ferner, dass bei der Cayley'schen Metrik die geodätischen Linien durch Geraden dargestellt werden. Nehmen wir nämlich eine beliebige (die Fundamentalfläche nicht berührende) Gerade S_1 und ihren linearen Polarraum S_{n-2}, so ist die harmonische axiale

*) Es genügt übrigens schon, darauf hinzuweisen, dass, wenn zwei willkürliche **Ebenen** (S_2) des Raumes, π und π', und in ihnen zwei Punkte, P bezw. P', angenommen werden, durch eine Collineation der Fundamentalfläche in sich P auf P' und π auf π' gelegt werden kann.

Homologie, die S_1 und S_{n-2} als zugehörige Räume hat, eine Collineation der Fundamentalfläche in sich, bei der alle Punkte von S_1 fest bleiben, während dieses für keinen anderen Punkt in der Umgebung von S_1 eintritt*). Sind demnach A und B zwei beliebige Punkte von S_1, so fällt die geodätische Verbindungslinie zwischen ihnen, da sie fest bleiben muss, notwendig mit S_1 zusammen.

Unter Einführung der homogenen Coordinaten $x_0, x_1, \dots x_n$ schreiben wir nun die Gleichung der Fundamentalfläche in der Form:

$$\sum a_{rs} x_r x_s = 0 \quad (r, s = 0, 1, \dots n).$$

Da Geraden auf ihr nicht liegen sollen, so müssen, wenn die Form $\sum a_{rs} x_r x_s$ in der bekannten Weise als Summe von Quadraten dargestellt wird, die Coefficienten der Quadrate entweder alle oder alle bis auf eins dasselbe Vorzeichen haben. Im letzteren Falle kommen wir mittels einer Ähnlichkeitstransformation zu den im vorigen Paragraphen angegebenen Formeln von Beltrami zurück, und das Krümmungsmass des Raumes ist negativ constant.

Im ersteren Falle, zu dessen Behandlung wir nun übergehen, ist die Fundamentalfläche imaginär und das Krümmungsmass des Raumes, wie wir sogleich sehen werden, positiv constant.

§ 329. Elliptischer Raum.

Die quadratische Grundform:

$$\sum a_{rs} x_r x_s \quad (r, s = 0, 1 \dots n)$$

kann in dem vorliegenden Falle auf die Form:

$$\Omega_{xx} = x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2$$

gebracht werden. Hier ist die Entfernung δ zweier Punkte x und x' gegeben durch

$$\delta = h \log \frac{\Omega_{xx'} + i\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{x'x'} - \Omega_{xx'}^2}}{\Omega_{xx'} - i\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{x'x'} - \Omega_{xx'}^2}} \quad (h = \text{Const.}).$$

Da nun der Ausdruck hinter dem Logarithmenzeichen complex vom absoluten Betrage Eins ist, so muss, damit δ reell ausfällt, h rein imaginär angenommen werden. Wir setzen:

$$h = \frac{R}{2i},$$

*) Die einzigen Punkte des Raumes, die ausser denjenigen von S_1 fest bleiben, sind die Punkte des Polarraumes S_{n-2}, der aber S_1 nicht schneidet.

so folgt:

$$\cos\frac{\delta}{R} = \frac{\Omega_{xx'}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{x'x'}}}.$$

Wählen wir nun den den homogenen Punktcoordinaten anhaftenden willkürlichen Factor so, dass constant

$$(40)\qquad x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

ist, so geht die letzte Gleichung über in:

$$(41)\qquad \cos\frac{\delta}{R} = x_0 x_0' + x_1 x_1' + \cdots + x_n x_n'.$$

Betrachten wir nun eine beliebige Curve und gehen wir auf ihr vom Punkte x_i zu dem unendlich benachbarten Punkte $x_i + dx_i$ über, wobei h der Zuwachs des Bogens s sein mag, so ergiebt (41), wenn

$$\delta = h,\quad x_i' = x_i + \frac{dx_i}{ds}h + \frac{d^2x_i}{ds^2}\frac{h^2}{2} + \cdots$$

eingesetzt wird:

$$1 - \frac{h^2}{2R^2} + \cdots = \sum x_i^2 + h\sum x_i\frac{dx_i}{ds} + \frac{h^2}{2}\sum x_i\frac{d^2x_i}{ds^2} + \cdots.$$

Hieraus folgt durch Vergleichung der Coefficienten von h^2 auf beiden Seiten, unter Berücksichtigung von (40):

$$-\sum x_i\frac{d^2x_i}{ds^2} = \sum\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^2 = \frac{1}{R^2}.$$

Demnach ist das Linienelement in unserm Raume gegeben durch:

$$(42)\qquad ds^2 = R^2(dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2),$$

worin die x durch die Relation (40) mit einander verknüpft sind.

Betrachten wir nun dagegen die x als (nicht homogene) Coordinaten im $n+1$-dimensionalen euklidischen Raume mit dem Linienelement (42), so ist offenbar (40) die Gleichung einer Hypersphäre, auf die unser n-dimensionaler Raum abgebildet ist, der demnach das positive constante Krümmungsmass $+\frac{1}{R^2}$ hat. Betrachten wir in diesem $n+1$-dimensionalen euklidischen Raume eine vom Punkte x ausgehende Richtung mit den Cosinus ξ_i, wobei also

$$(40^*)\qquad \xi_0^2 + \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = 1$$

ist, und sei diese Richtung auch Tangente der Hypersphäre (40), dann haben wir:

$$(43)\qquad \sum \xi_i x_i \equiv \xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n = 0.$$

Betrachten wir die ξ als unveränderlich, die x als veränderlich,

so stellt uns diese Gleichung offenbar die zur Richtung ξ senkrechte Hyperebene dar.

Nun wollen wir aber zu der ursprünglichen Deutung der x als (durch die Gleichung (40) verknüpfte) homogene Coordinaten in einem Bildraum S_n zurückkehren. Dann ist (43) die Gleichung der Polarhyperebene des Punktes ξ bezüglich der Fundamentalfläche:

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0.$$

Somit sind wir zu dem nachstehend präcisierten Ergebnis gelangt:

In der Cayley'schen Metrik ist die Senkrechte in einem Punkte auf einer Hyperebene die Gerade, welche den Punkt mit dem Pol der Hyperebene bezüglich der Fundamentalfläche verbindet.

Die Coordinaten eines jeden Punktes x' der Geraden, die in der Richtung ξ vom Punkte x ausgeht, sind, wie sofort erhellt, durch:

$$(44) \qquad x_i' = x_i \cos\frac{\varrho}{R} + \xi_i \sin\frac{\varrho}{R} \quad (i = 0, 1, \ldots n)$$

gegeben, wenn ϱ der Abstand zwischen x' und x im Sinne der Cayley'schen Metrik ist. Lassen wir nun in (44) ϱ stetig von 0 bis πR wachsen, so durchläuft offenbar der Punkt x' von x aus die ganze Gerade und kehrt zu diesem Punkte wieder zurück, weil $x_i' = -x_i$ ist, sobald ϱ um πR zunimmt. Fassen wir also solche zwei Punkte des Raumes mit positivem constanten Krümmungsmass, welche im Bildraum S_n ein und denselben Bildpunkt haben, als identisch auf und nennen wir den so betrachteten Raum mit constantem Krümmungsmass elliptischen einfachen Raum, so können wir sagen:

Im elliptischen einfachen Raume vom Radius R hat die Gerade die endliche Länge πR.

Fassen wir dagegen zwei Punkte des gekrümmten Raumes, deren Coordinaten bezüglich gleich sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, als gesonderte Punkte auf, so schliesst sich die Gerade erst nach einem Umgange von $2\pi R$. Während ferner im elliptischen einfachen Raume zwei sich schneidende Geraden nur einen einzigen Punkt gemein haben, treffen sich dagegen im elliptischen Doppelraume zwei sich in einem Punkte schneidende Geraden noch in einem zweiten Punkte, der dem ersten im Abstande πR diametral gegenüberliegt*).

*) In Betreff weiterer Ausführungen verweisen wir den Leser auf Klein: Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie, Göttingen 1890 (lithographiert), oder auf die Abhandlung in den Mathem. Annalen, 37. Bd., S. 544.



§ 330. Bewegungen des dreidimensionalen elliptischen Raumes.

Wir wollen nun kurz die Bewegungen des dreidimensionalen elliptischen Raumes behandeln.

Gemäss der analytischen Darstellung im voraufgehenden Paragraphen haben wir zwischen den Coordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 die Beziehung:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1; \tag{45}$$

das Linienelement ist gegeben durch:

$$ds^2 = R^2(dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \tag{45*}$$

Nun wird jede Bewegung des elliptischen Raumes in sich durch eine Ähnlichkeitstransformation des euklidischen Bildraumes, welche die Fundamentalfläche in sich überführt, dargestellt; demnach ist sie durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$\left\{\begin{aligned} x_0' &= a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3, \\ x_1' &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ x_2' &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ x_3' &= a_{30}x_0 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3. \end{aligned}\right. \tag{46}$$

Da aber wieder

$$x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 1$$

sein muss, so muss offenbar die Substitution (46) orthogonal sein. Umgekehrt liefert auch jede orthogonale Substitution eine Bewegung des elliptischen Raumes, da das Linienelement (45*) dann in sich transformiert wird. Demnach sehen wir, dass die Bewegungen des dreidimensionalen elliptischen Raumes durch die orthogonalen Substitutionen bezüglich vier Veränderlicher oder, wenn wir wollen, durch die Bewegungen eines vierdimensionalen euklidischen Raumes um einen festen Mittelpunkt dargestellt werden.

Unter den Bewegungen des elliptischen Raumes giebt es eine besonders wichtige Klasse, nämlich solche, die in vielen Beziehungen den Translationen des euklidischen Raumes vergleichbar sind. Wir definieren sie als diejenigen Bewegungen, bei denen alle Raumpunkte um ein und dieselbe Strecke verschoben werden. Diese Bewegungen, die unter denjenigen des hyperbolischen Raumes kein Analogon haben, werden *Schiebungen* genannt. Um ihr Vorhandensein zu beweisen und zugleich den analytischen Ausdruck für sie zu finden, haben wir gemäss (41) nur die Bedingung dafür aufzustellen, dass der aus den Gleichungen (46) berechnete Ausdruck:

$$x_0x_0' + x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3'$$

constant sein soll. Dieses liefert unmittelbar:

$$a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{ik} + a_{ki} = 0 \quad (i \neq k).$$

Weil ferner (46) eine orthogonale Substitution darstellen soll, ist speciell:

$$a_{20}a_{21} + a_{30}a_{31} = 0,$$
$$a_{20}^2 + a_{30}^2 = a_{21}^2 + a_{31}^2,$$

also:

$$a_{21} = \pm a_{30}, \quad a_{31} = \mp a_{20}.$$

Indem wir die beiden Fälle, je nachdem die oberen oder die unteren Vorzeichen gewählt werden, als gesondert auffassen, erhalten wir zwei verschiedene Klassen von Schiebungen, die durch die nachstehenden Gleichungen bezüglich gegeben sind:

$$(47) \quad \begin{cases} x_0' = Ax_0 - Bx_1 - Cx_2 - Dx_3, \\ x_1' = Bx_0 + Ax_1 - Dx_2 + Cx_3, \\ x_2' = Cx_0 + Dx_1 + Ax_2 - Bx_3, \\ x_3' = Dx_0 - Cx_1 + Bx_2 + Ax_3; \end{cases}$$

$$(47^*) \quad \begin{cases} x_0' = Ax_0 - Bx_1 - Cx_2 - Dx_3, \\ x_1' = Bx_0 + Ax_1 + Dx_2 - Cx_3, \\ x_2' = Cx_0 - Dx_1 + Ax_2 + Bx_3, \\ x_3' = Dx_0 + Cx_1 - Bx_2 + Ax_3. \end{cases}$$

In beiden Fällen sind hierin A, B, C, D beliebige reelle Constanten, die durch die Relation:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$$

verknüpft sind.

Auf Grund dieser Gleichungen lässt sich leicht bestätigen, dass sich jede Verbindungslinie zwischen zwei entsprechenden Punkten x und x' des Bildraumes bei der Bewegung in sich verschiebt. Diese ∞^2 Geraden bilden ein Strahlensystem, und zwar dasjenige der Treffgeraden zweier conjugiert imaginärer Erzeugenden der Fundamentalfläche. Die Collineation (47) oder (47*) ist demnach nichts anderes als eine biaxiale Homologie, die zwei conjugiert imaginäre Erzeugenden der Fundamentalfläche als Axen hat. Je nachdem nun die beiden Erzeugenden der einen oder der anderen Schar angehören, gelten die Gleichungen (47) oder (47*), dementsprechend reden wir von Schiebungen erster oder zweiter Art.

Da ferner zusammen mit den Transformationsgleichungen (47) und (47*) für Punktcoordinaten völlig analoge Gleichungen für Ebenencoordinaten ξ bestehen, so ist, wenn d den Betrag der Verrückung



eines Punktes und φ die Amplitude der Drehung einer Ebene bedeutet:

$$\cos\frac{d}{R} = x_0x_0' + x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' = A,$$
$$\cos\varphi = \xi_0\xi_0' + \xi_1\xi_1' + \xi_2\xi_2' + \xi_3\xi_3' = A,$$

demnach:

$$\varphi = \frac{d}{R}.$$

Wir sehen also: Während jeder Punkt längs des durch ihn gehenden Congruenzstrahles um die constante Strecke d fortrückt, dreht sich auch jede Ebene um den in ihr liegenden Congruenzstrahl um den constanten Winkel $\varphi = \frac{d}{R}$.

Dieses sind die merkwürdigen Bewegungen des elliptischen Raumes, die wir hier betrachten wollten. Jede andere Bewegung setzt sich aus zwei Schiebungen, einer der ersten und einer der zweiten Art, zusammen. Darauf, sowie auf weitere interessante Eigenschaften einzugehen, ist hier jedoch nicht der Ort; wir verweisen bezüglich dessen den Leser auf die angeführten Arbeiten von Klein und auf Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, 2. Band (Leipzig-Teubner, 1891).

constant sein soll. Dieses liefert unmittelbar:

$$a_{00} = a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{ik} + a_{ki} = 0 \quad (i \neq k).$$

Weil ferner (46) eine orthogonale Substitution darstellen soll, ist speciell:

$$a_{20}a_{21} + a_{30}a_{31} = 0,$$
$$a_{20}^2 + a_{30}^2 = a_{21}^2 + a_{31}^2,$$

also:

$$a_{21} = \pm a_{30}, \quad a_{31} = \mp a_{20}.$$

Indem wir die beiden Fälle, je nachdem die oberen oder die unteren Vorzeichen gewählt werden, als gesondert auffassen, erhalten wir zwei verschiedene Klassen von Schiebungen, die durch die nachstehenden Gleichungen bezüglich gegeben sind:

$$(47) \quad \begin{cases} x_0' = Ax_0 - Bx_1 - Cx_2 - Dx_3, \\ x_1' = Bx_0 + Ax_1 - Dx_2 + Cx_3, \\ x_2' = Cx_0 + Dx_1 + Ax_2 - Bx_3, \\ x_3' = Dx_0 - Cx_1 + Bx_2 + Ax_3; \end{cases}$$

$$(47^*) \quad \begin{cases} x_0' = Ax_0 - Bx_1 - Cx_2 - Dx_3, \\ x_1' = Bx_0 + Ax_1 + Dx_2 - Cx_3, \\ x_2' = Cx_0 - Dx_1 + Ax_2 + Bx_3, \\ x_3' = Dx_0 + Cx_1 - Bx_2 + Ax_3. \end{cases}$$

In beiden Fällen sind hierin A, B, C, D beliebige reelle Constanten, die durch die Relation:

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$$

verknüpft sind.

Auf Grund dieser Gleichungen lässt sich leicht bestätigen, dass sich jede Verbindungslinie zwischen zwei entsprechenden Punkten x und x' des Bildraumes bei der Bewegung in sich verschiebt. Diese ∞^2 Geraden bilden ein Strahlensystem, und zwar dasjenige der Treffgeraden zweier conjugiert imaginärer Erzeugenden der Fundamentalfläche. Die Collineation (47) oder (47*) ist demnach nichts anderes als eine biaxiale Homologie, die zwei conjugiert imaginäre Erzeugenden der Fundamentalfläche als Axen hat. Je nachdem nun die beiden Erzeugenden der einen oder der anderen Schar angehören, gelten die Gleichungen (47) oder (47*), dementsprechend reden wir von Schiebungen erster oder zweiter Art.

Da ferner zusammen mit den Transformationsgleichungen (47) und (47*) für Punktcoordinaten völlig analoge Gleichungen für Ebenencoordinaten ξ bestehen, so ist, wenn d den Betrag der Verrückung

eines Punktes und φ die Amplitude der Drehung einer Ebene bedeutet:

$$\cos \frac{d}{R} = x_0 x_0' + x_1 x_1' + x_2 x_2' + x_3 x_3' = A,$$

$$\cos \varphi = \xi_0 \xi_0' + \xi_1 \xi_1' + \xi_2 \xi_2' + \xi_3 \xi_3' = A,$$

demnach:

$$\varphi = \frac{d}{R}.$$

Wir sehen also: Während jeder Punkt längs des durch ihn gehenden Congruenzstrahles um die constante Strecke d fortrückt, dreht sich auch jede Ebene um den in ihr liegenden Congruenzstrahl um den constanten Winkel $\varphi = \frac{d}{R}$.

Dieses sind die merkwürdigen Bewegungen des elliptischen Raumes, die wir hier betrachten wollten. Jede andere Bewegung setzt sich aus zwei Schiebungen, einer der ersten und einer der zweiten Art, zusammen. Darauf, sowie auf weitere interessante Eigenschaften einzugehen, ist hier jedoch nicht der Ort; wir verweisen bezüglich dessen den Leser auf die angeführten Arbeiten von Klein und auf Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, 2. Band (Leipzig-Teubner, 1891).

Kapitel XXII.

Die Hyperflächen in den Räumen constanten Krümmungsmasses.

Hyperflächen in den allgemeinen n-dimensionalen gekrümmten Räumen. — Verallgemeinerung der Formeln von Gauss und von Codazzi. — Krümmung einer Curve im Raume. — Krümmung der Curven, die auf einer Hyperfläche von einem Punkte nach verschiedenen Richtungen ausgehen. — Verallgemeinerung der Sätze von Meusnier und Euler. — Krümmungslinien und Hauptkrümmungsradien. — Conform auf einander bezogene Räume. — Erweiterung des Dupin'schen Satzes. — Hyperflächen im euklidischen Raume. — Formeln von Gauss und von Codazzi. — Hyperflächen im elliptischen Raume. — Hyperflächen im hyperbolischen Raume. — Specialfall des dreidimensionalen elliptischen oder hyperbolischen Raumes. — Haupttangentencurven und Enneper'scher Satz. — Flächen mit dem Krümmungsmass Null im elliptischen Raume als Schiebungsflächen. — Die beiden Mäntel der Evolutenfläche und Weingarten'scher Satz. — Complementärtransformation der pseudosphärischen Flächen. — Flächen mit dem Krümmungsmass Null im hyperbolischen Raume.

§ 331. Hyperflächen in den allgemeinen n-dimensionalen gekrümmten Räumen.

Wir wollen uns nun mit den Hyperflächen in den Räumen constanten Krümmungsmasses beschäftigen und leiten dazu zunächst die allgemeineren Gleichungen für beliebig gekrümmte Räume ab.

In einem $n+1$-dimensionalen Raume S_{n+1} sei das Gesetz der Streckenmessung durch die quadratische Form:

$$(1) \qquad ds^2 = \mathop{\mathrm{S}}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

definiert*). Im S_{n+1} betrachten wir eine durch die Gleichungen:

$$(2) \qquad x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots u_n) \quad (i = 0, 1, \ldots n)$$

gegebene Hyperfläche V_n, und es sei:

1) Hier und im Folgenden erstreckt sich bei dem Summenzeichen S die Summation von 0 bis n, dagegen bei dem Summenzeichen Σ von 1 bis n.



(3) $$ds^2 = \sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu} du_\lambda du_\mu$$

das Quadrat des Linienelements von V_n, also:

(4) $$b_{\lambda\mu} = \mathop{\mathrm{S}}_{ik} a_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial u_\lambda} \frac{\partial x_k}{\partial u_\mu}.$$

Wir nehmen nun die zu V_n geodätisch parallelen Hyperflächen, und es sei u_0 der von V_n ab gerechnete Bogen der orthogonalen geodätischen Linien. Dann nimmt das Quadrat des Linienelements von S_{n+1} in den Coordinaten u die geodätische Form (S. 570):

(5) $$ds^2 = du_0^2 + \sum_{ik} c_{ik} du_i du_k$$

an, worin die c_{ik} Functionen von $u_0, u_1, \ldots u_n$ sind, die für $u_0 = 0$ in die bezüglichen b_{ik} übergehen. Dieses drücken wir, indem wir allgemein mit $\overline{\psi}$ das Resultat der Substitution: $u_0 = 0$ in einer Function $\psi(u_0, u_1, \ldots u_n)$ bezeichnen, durch die Gleichungen:

$$\overline{c_{ik}} = b_{ik}$$

aus.

Um die Fundamentalgleichungen, die wir im Auge haben, zu erhalten, müssen wir zusammen mit V_n die unendlich nahe benachbarte parallele Hyperfläche $u_0 = \varepsilon$, wo ε eine unendlich kleine Constante ist, betrachten. Bezeichnen wir unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε mit

(6) $$\delta ds^2 = -2\varepsilon \sum_{ik} \Omega_{ik} du_i du_k$$

die Variation des Quadrats des Linienelements beim Übergange von V_n zu der unendlich nahe benachbarten Hyperfläche, so erhalten wir offenbar:

(7) $$\Omega_{ik} = -\frac{1}{2}\overline{\left(\frac{\partial c_{ik}}{\partial u_0}\right)}.$$

Wir nennen nun

$$\sum_{ik} a_{ik} du_i du_k, \qquad \sum_{ik} \Omega_{ik} du_i du_k$$

die erste bezw. zweite Grundform der Hyperfläche V_n.*)

Sind ferner

$$X_0, X_1, \ldots X_n$$

die Richtungscosinus der Normale in einem Punkte von V_n, so erhalten wir:

*) Im Falle des gewöhnlichen dreidimensionalen Raumes werden hieraus eben die beiden Grundformen des 4. Kapitels:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2, \qquad Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2.$$

$$X_i = \overline{\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_0}\right)},$$

folglich:

$$(8)\quad \begin{cases} \mathop{\mathrm{S}}\limits_{ik} a_{ik} \dfrac{\partial x_i}{\partial u_r} X_k = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots n), \\ \mathop{\mathrm{S}}\limits_{ik} a_{ik} X_i X_k = 1. \end{cases}$$

Nunmehr wenden wir auf die beiden äquivalenten Differentialformen (1) und (5) die Christoffel'schen Gleichungen (I), S. 43, an, nämlich:

$$(a)\qquad \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_r \partial u_s} = \mathop{\mathrm{S}}\limits_{\lambda} \begin{Bmatrix} rs \\ \lambda \end{Bmatrix}_c \frac{\partial x_\nu}{\partial u_\lambda} - \mathop{\mathrm{S}}\limits_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix}_a \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s}. ^{*)}$$

Hierin setzen wir u_0 gleich Null und schreiben die dem Index Null entsprechenden Glieder gesondert hin, wobei wir berücksichtigen, dass, wenn i, k, l Indices aus der Reihe $1, 2, \dots n$ sind, die Gleichungen bestehen:

$$\overline{\begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}_c} = \begin{bmatrix} ik \\ l \end{bmatrix}_b, \quad \overline{\begin{bmatrix} ik \\ 0 \end{bmatrix}_c} = \Omega_{ik}, \quad \overline{\begin{bmatrix} i0 \\ l \end{bmatrix}_c} = -\Omega_{il},$$

$$\overline{\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_c} = \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_b, \quad \overline{\begin{Bmatrix} ik \\ 0 \end{Bmatrix}_c} = \Omega_{ik}.$$

Auf diese Weise erhalten wir die gesuchten Fundamentalgleichungen, die verallgemeinerten Gleichungen (I), (II), Kap. IV, S. 89—90:

$$(A)\quad \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_r \partial u_s} = \sum_l \begin{Bmatrix} rs \\ l \end{Bmatrix}_b \frac{\partial x_\nu}{\partial u_l} + \Omega_{rs} X_\nu - \mathop{\mathrm{S}}\limits_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix}_a \frac{\partial x_i}{\partial u_r} \frac{\partial x_k}{\partial u_s} \begin{pmatrix} r, s = 1, 2, \dots n \\ \nu = 0, 1, \dots n \end{pmatrix},$$

$$(B)\quad \frac{\partial X_\nu}{\partial u_s} = -\sum_{\lambda\mu} B_{\lambda\mu} \cdot \Omega_{\lambda s} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_\mu} - \mathop{\mathrm{S}}\limits_{ik} \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix}_a \frac{\partial x_k}{\partial u_s} X_i \quad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \dots n \\ \nu = 0, 1, \dots n \end{pmatrix}.$$

Setzen wir auch in den Gleichungen (30), Kap. II, S. 49:

$$(\alpha\delta, \beta\gamma)_c = \mathop{\mathrm{S}}\limits_{rkih} (rk, ih)_a \frac{\partial x_r}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial u_\delta} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma},$$

u gleich Null, wobei wir α, β, γ als von Null verschieden voraussetzen und die beiden Fälle: $\delta \neq 0$, $\delta = 0$ unterscheiden, so erhalten wir im ersten Falle die Gleichungen:

$$(C)\quad \Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\delta\gamma} - \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\delta\beta} = (\alpha\delta, \beta\gamma)_b - \mathop{\mathrm{S}}\limits_{rkih} (rk, ih)_a \frac{\partial x_r}{\partial u_\alpha} \frac{\partial x_k}{\partial u_\delta} \frac{\partial x_i}{\partial u_\beta} \frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma}.$$

---

*) Die Indices a, b, c an den Christoffel'schen Symbolen sollen angeben, ob diese für die Form (1) oder (3) oder (5) gebildet sind.

Sie gelten für alle Werte der Indices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von 1 bis n und sind die Verallgemeinerung der Gauss'schen Gleichung für das Krümmungsmass:

$$\frac{DD''-D'^2}{EG-F^2}=K.$$

Im Falle: $\delta = 0$ erhalten wir ferner die folgenden Gleichungen:

$$\text{(D)}\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma}-\frac{\partial \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta}+\sum_t \begin{Bmatrix}\alpha\beta\\ t\end{Bmatrix}_b \Omega_{\gamma t}-\sum_t \begin{Bmatrix}\alpha\gamma\\ t\end{Bmatrix}_b \Omega_{\beta t}= \\ &\qquad = \mathop{\mathrm{S}}_{rkih}(rk, ih)_a \frac{\partial x_r}{\partial u_\alpha}\frac{\partial x_i}{\partial u_\beta}\frac{\partial x_h}{\partial u_\gamma} X_k. \end{aligned}\right.$$

Dieses sind die verallgemeinerten Codazzi'schen Gleichungen (S. 91), und sie gelten für alle Werte der Indices von 1 bis n.

Multiplicieren wir endlich die Gleichungen (A) mit $a_{\mu\nu}X_\mu$ und summieren wir nach μ, ν, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\text{(9)}\qquad \Omega_{rs}=\mathop{\mathrm{S}}_{\mu\nu} a_{\mu\nu}X_\mu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_r \partial u_s}+\mathop{\mathrm{S}}_{ik\mu}\begin{bmatrix}ik\\ \mu\end{bmatrix}_a \frac{\partial x_i}{\partial u_r}\frac{\partial x_k}{\partial u_s} X_\mu .$$

Wegen (8) können wir diese auch in der nachstehenden äquivalenten Form schreiben:

$$\text{(9*)}\qquad \Omega_{rs}=-\mathop{\mathrm{S}}_{\mu\nu} a_{\mu\nu}\frac{\partial X_\mu}{\partial u_s}\frac{\partial x_\nu}{\partial u_r}-\mathop{\mathrm{S}}_{ikt}\begin{bmatrix}it\\ k\end{bmatrix}_a \frac{\partial x_k}{\partial u_r}\frac{\partial x_t}{\partial u_s} X_i .$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit (8) dienen zur Berechnung der Grössen X_i und Ω_{rs}, sobald die Gleichungen (2) der Hyperfläche gegeben sind.

§ 332. Krümmung einer Curve im Raume.

Wir betrachten eine beliebige Curve C im Raume S_{n+1}, und es seien

$$x_0=x_0(t),\quad x_1=x_1(t),\quad \ldots\quad x_n=x_n(t)$$

die Coordinaten eines beweglichen Punktes von C als Functionen des von einem willkürlichen Punkte M_0 ab gerechneten Bogens t. Mit Voss*) definieren wir die Krümmung von C in der folgenden Weise: Wir legen durch M_0 diejenige geodätische Linie G, welche C berührt, und tragen sowohl auf G als auch auf C von M_0 unendlich kleine Bogen von gleicher Länge t bis M' bezw. M'' ab. Bezeichnen wir die Entfernung $M'M''$ mit d, so hat das Verhältnis $\frac{2d}{t^2}$ einen bestimmten

*) Mathem. Annalen, 16. Bd.

und endlichen Grenzwert. Diesen Grenzwert nennen wir die **Krümmung von C in M_0** *), bezeichnen ihn mit

$$\frac{1}{\varrho} = \lim \frac{2d}{t^2}$$

und wollen ihn nun berechnen.

Sind die Coordinaten von M'' und M' x_i bezw. $\bar{x}_i$, so ist:

$$x_i = x_i^{(0)} + t\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0 + \frac{t^2}{2}\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)_0 + \cdots,$$

$$\bar{x}_i = x_i^{(0)} + t\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0 - \frac{t^2}{2}\sum_{\lambda\mu}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ i\end{Bmatrix}_a\left(\frac{dx_\lambda}{dt}\right)_0\left(\frac{dx_\mu}{dt}\right)_0 + \cdots \text{ (vgl. S. 569)},$$

folglich:

$$x_i - \bar{x}_i = \frac{t^2}{2}\left[\left(\frac{d^2x_i}{dt^2}\right)_0 + \sum_{\lambda\mu}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ i\end{Bmatrix}_a\left(\frac{dx_\lambda}{dt}\right)_0\left(\frac{dx_\mu}{dt}\right)_0\right],$$

wenn wir die höheren Potenzen von t vernachlässigen. Da wir nun

$$d = \sqrt{\sum_{ik} a_{ik}(x_i - \bar{x}_i)(x_k - \bar{x}_k)}$$

haben, so erhalten wir zur wirklichen Berechnung von $\frac{1}{\varrho}$ die Gleichung:

$$(10) \qquad \frac{1}{\varrho^2} = \sum_{ik} a_{ik}\left(\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ i\end{Bmatrix}_a \frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt}\right)\left(\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ k\end{Bmatrix}_a \frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt}\right).$$

Weil die Form $\sum_{ik} a_{ik}\xi_i\xi_k$ definit ist, so folgt hieraus, dass nur die geodätischen Linien des Raumes S_{n+1} Curven von der Krümmung $\frac{1}{\varrho} = 0$ sind.

Ohne hier auf die Analogien und Verallgemeinerungen betreffend die Theorie der Curven im gewöhnlichen Raume weiter einzugehen, wollen wir uns darauf beschränken, den Begriff **Hauptnormale** zu präcisieren. Convergieren M' und M'' gegen M_0, so convergiert das Linienelement $M'M''$ gegen eine von M ausgehende Grenzlage mit den Richtungsconstanten:

$$(11) \qquad \xi_i = \varrho\left(\frac{d^2x_i}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ i\end{Bmatrix}_a \frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt}\right).$$

Diese Richtung ξ nennen wir die **Hauptnormale** der Curve C in M_0. Da

---

*) Für den Fall des dreidimensionalen euklidischen Raumes ergiebt sich sofort, dass dieses auf die gewöhnliche Definition der Krümmung hinauskommt.

$$\mathop{\mathrm{S}}_{ik} a_{ik}\xi_i \frac{dx_k}{dt} = 0$$

ist, so ist sie zur Curve normal, und um sie geometrisch vollständig zu definieren, fügen wir hinzu, dass sie in der osculierenden geodätischen Fläche (geodätischen Schmiegungsfläche) von C in M_0 liegt, was sich leicht nachweisen lässt.

Nachdem wir auf diese Weise die Hauptnormale einer Curve definiert haben, können wir leicht den Satz beweisen:

Eine geodätische Linie einer Hyperfläche V_n ist (analog den Verhältnissen im gewöhnlichen Raume) dadurch charakterisiert, dass in jedem Punkte derselben die Hauptnormale mit der Hyperflächennormale zusammenfällt.

Längs einer solchen geodätischen Linie sind nämlich die Gleichungen erfüllt (§ 317, S. 569):

$$\frac{d^2 u_r}{dt^2} + \sum_{\lambda\mu} \begin{Bmatrix}\lambda\mu \\ r\end{Bmatrix}_b \frac{du_\lambda}{dt}\frac{du_r}{dt} = 0,$$

worin t der von einem festen Punkte gerechnete Bogen der Curve ist. Berechnen wir nun die Ausdrücke:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \mathop{\mathrm{S}}_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix}\alpha\beta \\ i\end{Bmatrix}_a \frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dx_\beta}{dt}$$

unter Berücksichtigung der Gleichungen (A), so erhalten wir:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \mathop{\mathrm{S}}_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix}\alpha\beta \\ i\end{Bmatrix}_a \frac{dx_\alpha}{dt}\frac{dx_\beta}{dt} = X_i \sum_{\lambda\mu} \Omega_{\lambda\mu} \frac{du_\lambda}{dt}\frac{du_\mu}{dt},$$

folglich:

$$\xi_i = \varrho X_i \frac{\sum_{\lambda\mu} \Omega_{\lambda\mu}\, du_\lambda\, du_\mu}{\sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}\, du_\lambda\, du_\mu}.$$

Aus (4) und (6) geht hervor, dass durch diese Gleichung die behauptete Eigenschaft bewiesen wird. Ausserdem ergiebt sich aus ihr für die Krümmung derjenigen geodätischen Linie von V_n, welche in der durch die Incremente du bestimmten Richtung ausgeht, der wichtige Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sum_{\lambda\mu} \Omega_{\lambda\mu}\, du_\lambda\, du_\mu}{\sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}\, du_\lambda\, du_\mu}.$$

§ 333. Krümmung der Curven, die auf einer Hyperfläche von einem Punkte nach verschiedenen Richtungen ausgehen.

Wir betrachten nun auf der Hyperfläche V_n eine beliebige Curve C, die von einem Punkte M_0 auf V_n ausgeht, und es seien t der von M_0 gerechnete Bogen von C, $\frac{1}{\varrho}$ die Krümmung von C in M_0 und ξ_i die Richtungsconstanten der Hauptnormale in M_0. Bezeichnen wir mit σ den Winkel, den diese Hauptnormale mit der Normale von V_n bildet, so haben wir:

$$\cos\sigma = \underset{ik}{\mathrm{S}}\, a_{ik}\,\xi_i\, X_k,$$

also wegen (11):

$$\frac{\cos\sigma}{\varrho} = \underset{ik}{\mathrm{S}}\, a_{ik}\frac{d^2x_i}{dt^2}X_k + \underset{ik\lambda\mu}{\mathrm{S}}\, a_{ik}\begin{Bmatrix}\lambda\mu\\ i\end{Bmatrix}_a \frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt}X_k.$$

Nun ist aber:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial u_l}\frac{du_l}{dt},$$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \sum_{lm}\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_l \partial u_m}\frac{du_l}{dt}\frac{du_m}{dt} + \sum_l \frac{\partial x_i}{\partial u_l}\frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2};$$

wird dieses eingesetzt, so ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (8):

$$\text{(12)}\qquad \frac{\cos\sigma}{\varrho} = \frac{\sum_{\lambda\mu}\Omega_{\lambda\mu}\,du_\lambda\, du_\mu}{\sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}\,du_\lambda\, du_\mu}.\text{*)}$$

Betrachten wir die geodätische Fläche, auf der die Richtungen der Normale von V_n und der Tangente von C in M_0 liegen, so schneidet sie auf V_n eine Curve aus, die als der C berührende **Normalschnitt** zu bezeichnen ist. Bedeutet $\frac{1}{R}$ die Krümmung dieses Normalschnitts in M_0, so besteht infolge (12) die Gleichung:

$$\text{(12*)}\qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos\sigma}{\varrho},$$

---

*) Diejenigen Curven von V_n, die der Differentialgleichung:

$$\sum_{\lambda\mu}\Omega_{\lambda\mu}\,du_\lambda\, du_\mu = 0$$

genügen, sind entweder geodätische Linien des Raumes oder solche Curven, deren Hauptnormalen in den bezüglichen Tangentialhyperebenen liegen, d. h., die osculierenden geodätischen Flächen einer solchen Curve berühren die Hyperfläche. Jede Curve, die dieser Differentialgleichung genügt, kann also eine **Haupttangentencurve** der Hyperfläche genannt werden.

die offenbar die Erweiterung des Meusnier'schen Satzes (S. 101) ausdrückt.

Aus (12) können wir ferner noch eine andere interessante Gleichung ableiten, welche die bezüglich des umliegenden Raumes S_{n+1} berechnete Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ der Curve C mit derjenigen Krümmung $\frac{1}{\varrho_g}$ verknüpft, die sich ergiebt, wenn die Curve als zum n-dimensionalen Raume V_n gehörig betrachtet wird, und die auch als die geodätische Krümmung von C auf V_n bezeichnet werden kann.

Zu diesem Zweck schreiben wir die Gleichungen auf S. 605 in der Form:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} + \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda\mu} \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ i \end{Bmatrix}_a \frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt} =$$

$$= \sum_\nu \frac{\partial x_i}{\partial u_\nu} \cdot \left[\frac{d^2 u_\nu}{dt^2} + \sum_{lm} \begin{Bmatrix} lm \\ \nu \end{Bmatrix}_b \frac{du_l}{dt}\frac{du_m}{dt}\right] + X_i \sum_{lm} \Omega_{lm} \frac{du_l}{dt}\frac{du_m}{dt},$$

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \mathop{\mathrm{S}}_{\lambda\mu} \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ k \end{Bmatrix}_a \frac{dx_\lambda}{dt}\frac{dx_\mu}{dt} =$$

$$= \sum_\tau \frac{\partial x_k}{\partial u_\tau} \left[\frac{d^2 u_\tau}{dt^2} + \sum_{lm} \begin{Bmatrix} lm \\ \tau \end{Bmatrix}_b \frac{du_l}{dt}\frac{du_m}{dt}\right] + X_k \sum_{lm} \Omega_{lm} \frac{du_l}{dt}\frac{du_m}{dt}.$$

Bilden wir dann aus ihnen unter Berücksichtigung von (8) den Ausdruck (10) für $\frac{1}{\varrho^2}$, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_g^2} + \left(\sum_{lm} \Omega_{lm} \frac{du_l}{dt}\frac{du_m}{dt}\right)^2$$

oder wegen (12):

(13) $$\frac{1}{\varrho_g} = \frac{\sin\sigma}{\varrho}.$$

Dieses ist die gesuchte Relation zwischen der geodätischen Krümmung $\frac{1}{\varrho_g}$ und der absoluten Krümmung $\frac{1}{\varrho}$ von C.

§ 334. Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes.

Um die Krümmungen der von M_0 auf V_n ausgehenden Curven zu untersuchen, brauchen wir zufolge (12*) nur zuzusehen, wie sich die Krümmungen $\frac{1}{R}$ der Normalschnitte oder, was dasselbe ist, der geodätischen Linien von V_n, die in gleicher Richtung von M_0 ausgehen, ändern. Hierzu müssen wir die Gleichung:

(14)
$$\frac{1}{R} = \frac{\sum_{\lambda\mu} \Omega_{\lambda\mu}\, du_\lambda\, du_\mu}{\sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}\, du_\lambda\, du_\mu}$$

oder:

(14*)
$$\frac{1}{R} = \sum_{\lambda\mu} \Omega_{\lambda\mu}\, \eta_\lambda\, \eta_\mu$$

näher betrachten, wo die η bezüglich der als n-dimensionaler Raum aufgefassten Hyperfläche V_n die Constanten der betreffenden Richtung sind, mithin

(15)
$$\sum_{\lambda\mu} b_{\lambda\mu}\, \eta_\lambda\, \eta_\mu = 1$$

ist. Wollen wir nun diejenigen Richtungen η finden, für welche ein Maximum oder ein Minimum der zugehörigen Krümmung $\frac{1}{R}$ stattfindet, so müssen wir nach bekannten Theorien die durch (15) verbundenen Unbekannten η und R selbst aus dem simultanen System:

(16)
$$\sum_k (b_{ik} - R\Omega_{ik})\,\eta_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

bestimmen. Durch Elimination der η hieraus ergiebt sich für R die Gleichung n^{ten} Grades:

(17)
$$\begin{vmatrix} b_{11} - R\Omega_{11} & b_{12} - R\Omega_{12} & \cdots & b_{1n} - R\Omega_{1n} \\ b_{21} - R\Omega_{21} & b_{22} - R\Omega_{22} & \cdots & b_{2n} - R\Omega_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} - R\Omega_{n1} & b_{n2} - R\Omega_{n2} & \cdots & b_{nn} - R\Omega_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Da $\sum_{ik} b_{ik}\,\xi_i\,\xi_k$ eine definite Form ist, so sind alle n Wurzeln dieser Gleichung, $R_1, R_2, \ldots R_n$, reell. Jeder dieser n Wurzeln R_λ entspricht eine und im allgemeinen nur eine durch die Gleichungen (16)*) bestimmte Richtung $\eta^{(\lambda)}$, für welche die Krümmung $\frac{1}{R_\lambda}$ des zugehörigen Normalschnitts thatsächlich ein Maximum oder ein Minimum ist. Ferner stehen zwei Richtungen $\eta^{(\lambda)}$ und $\eta^{(\mu)}$, die zwei verschiedenen Wurzeln R_λ und R_μ entsprechen, wegen der leicht nachzuweisenden Identität:

*) Der Wurzel R_λ entspricht mehr als eine Richtung, wenn die Charakteristik h der Determinante (17), in der R_λ für R zu setzen ist, kleiner als $n - 1$ ist. In diesem Fall giebt es ∞^{n-h-1} entsprechende Richtungen, die in einem S_h liegen. Solche Verhältnisse liegen offenbar nur ausnahmsweise vor.

$$\sum_{ik} b_{ik}\eta_i^{(\lambda)}\eta_k^{(\mu)} = 0$$

auf einander senkrecht. Die n paarweise zu einander senkrechten Richtungen

$$\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \ldots \eta^{(n)},$$

die den Wurzeln der Gleichung (17) entsprechen, werden Hauptrichtungen, und die Wurzeln

$$R_1, R_2, \ldots R_n$$

selbst Hauptkrümmungsradien der Hyperfläche V_n genannt.

Bezeichnen wir nun mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Winkel, die eine Zwischenrichtung η mit den n Hauptrichtungen bildet, so haben wir:

$$\eta_i = \cos\alpha_1\,\eta_i^{(1)} + \cos\alpha_2\,\eta_i^{(2)} + \cdots + \cos\alpha_n\,\eta_i^{(n)} \quad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Unter Berücksichtigung der Identitäten:

$$\frac{1}{R_\lambda} = \sum_{ik}\Omega_{ik}\eta_i^{(\lambda)}\eta_k^{(\lambda)}, \qquad \sum_{ik}\Omega_{ik}\eta_i^{(\lambda)}\eta_k^{(\mu)} = 0 \qquad (\lambda \neq \mu)$$

erhalten wir folglich aus (14*) für $\frac{1}{R}$ den Ausdruck:

$$(18) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\alpha_1}{R_1} + \frac{\cos^2\alpha_2}{R_2} + \cdots + \frac{\cos^2\alpha_n}{R_n}.$$

Dieses ist offenbar die verallgemeinerte Euler'sche Formel (S. 102).

Zusatz. Es mag an dieser Stelle bemerkt werden, dass einige Autoren den Namen „Krümmungsmass der Hyperfläche" dem Product

$$\frac{1}{R_1 R_2 \cdots R_n}$$

beilegen. Wir jedoch wollen uns dieser Bezeichnungsweise nicht anschliessen, um nicht zu Verwechselungen mit dem Begriff des Krümmungsmasses nach Riemann (§ 319, S. 574) Anlass zu geben. Nur für $n = 2$, d. h. bei den Flächen der dreidimensionalen (gekrümmten) Räume, sprechen wir von absoluter Krümmung der Fläche und verstehen darunter (nach Riemann) die Krümmung K derjenigen Differentialform, welche in der für den umliegenden S_3 giltigen Metrik das Quadrat des Linienelements der Fläche angiebt. Dann erhalten wir aus der Gleichung:

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{\Omega_{11}\Omega_{22} - \Omega_{12}^2}{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}$$

unter Benutzung der Gauss'schen Gleichungen (C), S. 602, und der Gleichung (15), § 319, S. 574:

$$(19) \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = K - K_0,$$

wo K_0 die Krümmung der geodätischen Fläche bedeutet, welche die gegebene Fläche in dem betreffenden Punkte berührt. Bisweilen werden wir $\frac{1}{R_1 R_2}$ als relative Krümmung der Fläche bezeichnen.

§ 335. Krümmungslinien. Verallgemeinerung des Dupin'schen Satzes.

Der Begriff der Hauptrichtungen auf einer Hyperfläche V_n führt auch zur Definition der Krümmungslinien. Wir definieren sie als diejenigen Curven, deren Richtung in jedem Punkte mit einer Hauptrichtung zusammenfällt. Offenbar haben wir n Scharen von Krümmungslinien, derart, dass durch jeden Punkt auf V_n eine Curve aus jeder der n Scharen geht.

Ist R ein Hauptkrümmungsradius und sind

$$\eta_1^{(\lambda)},\ \eta_2^{(\lambda)},\ \dots\ \eta_n^{(\lambda)}$$

die Constanten der zugehörigen Hauptrichtung, so sind offenbar:

$$\frac{du_1}{\eta_1^{(\lambda)}} = \frac{du_2}{\eta_2^{(\lambda)}} = \cdots = \frac{du_n}{\eta_n^{(\lambda)}}$$

die Differentialgleichungen der zugehörigen Schar Krümmungslinien. Statt ihrer können wir auch das äquivalente System:

$$(20)\qquad \sum_s (b_{rs} - R_\lambda \Omega_{rs})\, du_s = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots n)$$

setzen.

Als Beispiel für die Anwendung dieser allgemeinen Formeln betrachten wir einen zweiten Raum S'_{n+1}, der auf den ersten Raum S_{n+1} conform abgebildet sein möge. Das Quadrat des Linienelements von S'_{n+1} ist durch:

$$ds'^2 = \mathop{\mathrm{S}}_{ik} a'_{ik}\, dx_i\, dx_k = U \mathop{\mathrm{S}}_{ik} a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

gegeben, wo U eine Function der x ist. Der Hyperfläche V_n in S_{n+1} wird eine Hyperfläche V'_n in S'_{n+1} entsprechen, für die wir unter Strichelung der betreffenden Ausdrücke erhalten:

$$b'_{rs} = U b_{rs}, \qquad X'_r = \frac{X_r}{\sqrt{U}}\,.$$

Demnach ergiebt sich aus (9) oder (9*) (S. 603):

$$\Omega'_{rs} = \Omega_{rs}\sqrt{U} - \frac{b_{rs}}{2\sqrt{U}} \mathop{\mathrm{S}}_i X_i \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

oder, da $X_i = \frac{\partial x_i}{\partial u_0}$ ist:



$$\Omega'_{rs} = \Omega_{rs}\sqrt{U} - b_{rs}\frac{\partial\sqrt{U}}{du_0}\text{*)}.$$

Für die Hyperfläche V'_n nehmen also die Gleichungen (20) die Form an:

$$\sum_s\left(\frac{b_{rs}}{R'} - \frac{\Omega_{rs}}{\sqrt{U}} + \frac{b_{rs}}{U}\frac{\partial\sqrt{U}}{\partial u_0}\right)du_s = 0.$$

Sie ergeben sich aus den entsprechenden Gleichungen:

$$\sum_s\left(\frac{b_{rs}}{R} - \Omega_{rs}\right)du_s = 0,$$

wenn

(21) $$\frac{1}{R} = \frac{\sqrt{U}}{R'} + \frac{\partial\log\sqrt{U}}{\partial u_0}$$

gesetzt wird. Folglich haben wir das Ergebnis:

In zwei conform auf einander abgebildeten Räumen entsprechen einander die Krümmungslinien entsprechender Hyperflächen. Die Hauptkrümmungen in einem Punkte der einen sind wegen (21) ganze lineare Functionen der Hauptkrümmungen in dem entsprechenden Punkte der anderen.

Wir setzen nun voraus, es könne das Quadrat des Linienelements des Raumes S_{n+1} auf die Orthogonalform:

$$ds^2 = H_0^2dy_0^2 + H_1^2dy_1^2 + \cdots + H_n^2dy_n^2$$

gebracht werden, und betrachten eine Hyperfläche aus der Schar y_0. Die unendlich nahe benachbarte parallele Hyperfläche ergiebt sich, wenn y_0 um $\frac{\varepsilon}{H_0}$ wächst; demnach erhalten wir für die Variation von ds^2 den Ausdruck:

$$\delta\, ds^2 = 2\varepsilon\left(\frac{H_1}{H_0}\frac{\partial H_1}{\partial y_0}dy_1^2 + \frac{H_2}{H_0}\frac{\partial H_2}{\partial y_0}dy_2^2 + \cdots + \frac{H_n}{H_0}\frac{\partial H_n}{\partial y_0}dy_n^2\right).$$

Die Fundamentalgrössen $b_{\lambda\mu}$ und $\Omega_{\lambda\mu}$ für die Hyperflächen y_0 sind also:

$$\left.\begin{array}{lllll} b_{11} = H_1^2, & b_{22} = H_2^2, & \cdots & b_{nn} = H_n^2; & b_{ik} = 0 \\ \Omega_{11} = \frac{H_1}{H_0}\frac{\partial H_1}{\partial y_0}, & \Omega_{22} = \frac{H_2}{H_0}\frac{\partial H_2}{\partial y_0}, & \cdots & \Omega_{nn} = \frac{H_n}{H_0}\frac{\partial H_n}{\partial y_0}; & \Omega_{ik} = 0 \end{array}\right\}\text{ für } i \neq k.$$

Daraus folgt, dass die Parameterlinien $y_1, y_2, \ldots y_n$ auf der Hyperfläche y_0 Krümmungslinien sind. Dieses ist die Verallgemeinerung des Dupin'schen Satzes (S. 480).

---

*) $\frac{\partial\sqrt{U}}{\partial u_0}$ ist, wie ersichtlich, Ableitung von $\sqrt{U}$ in der zur Hyperfläche V_n senkrechten Richtung.

Ferner sei bemerkt, dass sich für die Hauptkrümmungsradien der Parameterhyperflächen, ebenso auch für die Krümmungen der Parameterlinien, Formeln ergeben, die denjenigen in § 274 völlig analog sind.

§ 336. Hyperflächen im euklidischen Raume.

Wir wenden nun die allgemeinen Ergebnisse der voraufgehenden Paragraphen auf Räume mit constantem Krümmungsmass an, und zwar zunächst auf den euklidischen Raum, dessen Linienelement durch:

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$$

gegeben ist. Für eine Hyperfläche V_n in diesem Raume mit den beiden quadratischen Fundamentalformen:

$$\sum b_{ik} du_i du_k, \quad \sum \Omega_{ik} du_i du_k$$

gehen die allgemeinen Gleichungen (A) und (B), S. 602, über in:

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u_r \partial u_s} = \sum_l \begin{Bmatrix} r s \\ l \end{Bmatrix}_b \frac{\partial x}{\partial u_l} + \Omega_{rs} X,$$

$$(22^*) \qquad \frac{\partial X}{\partial u_s} = -\sum_{\lambda\mu} B_{\lambda\mu} \Omega_{\lambda s} \frac{\partial x}{\partial u_\mu}.$$

Ihnen muss jede Coordinate x_ν zusammen mit dem entsprechenden Richtungscosinus X_ν der Normale genügen. Ferner werden aus den Gauss'schen Gleichungen (C) und den Codazzi'schen Gleichungen (D) hier die folgenden:

$$(23) \qquad \Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\delta\gamma} - \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} = (\alpha\delta, \beta\gamma)_b,$$

$$(24) \qquad \frac{\partial \Omega_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} - \frac{\partial \Omega_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \sum_t \begin{Bmatrix} \alpha\beta \\ t \end{Bmatrix}_b \Omega_{\gamma t} - \sum_t \begin{Bmatrix} \alpha\gamma \\ t \end{Bmatrix}_b \Omega_{\beta t} = 0.$$

Nun können wir nachweisen, dass in dem vorliegenden Falle die Gauss'schen Gleichungen (23) und die Codazzi'schen Gleichungen (24) nicht allein die notwendigen, sondern auch die hinreichenden Bedingungen dafür angeben, dass zu den beiden Formen:

$$\sum_{ik} b_{ik} du_i du_k, \qquad \sum_{ik} \Omega_{ik} du_i du_k$$

als Grundformen eine Hyperfläche V_n in S_{n+1} gehört. Setzen wir in den Gleichungssystemen (22) und (22*)

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} = p^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \cdots n),$$

so erhalten wir für das System der $n+1$ unbekannten Functionen

$$p^{(1)}, p^{(2)}, \ldots p^{(n)}; X$$

das System totaler linearer Differentialgleichungen:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} dp^{(r)} = \sum_s \left(\sum_l \left\{ {rs \atop l} \right\}_b p^{(l)} + \Omega_{rs} X \right) du_s \quad (r = 1, 2, \dots n), \\ dX = - \sum_s \left(\sum_{\lambda\mu} B_{\lambda\mu} \Omega_{\lambda s} p^{(\mu)} \right) du_s . \end{cases}$$

Dieses System ist eben wegen der Gleichungen (23) und (24), die wir als erfüllt voraussetzen, unbeschränkt integrierbar.

Wählen wir nun $n+1$ verschiedene Integralsysteme von (α), z. B.

$$p_\nu^{(1)},\ p_\nu^{(2)},\ \dots\ p_\nu^{(n)};\ X_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots n),$$

und setzen wir:

$$\mathop{\mathrm{S}}_\nu p_\nu^{(i)} p_\nu^{(k)} - b_{ik} = \beta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \dots n),$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_\nu p_\nu^{(i)} X_\nu = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

$$\mathop{\mathrm{S}}_\nu X_\nu^2 - 1 = \gamma,$$

so können wir aus den Gleichungen (α) leicht folgern, dass die Functionen

$$\beta_{ik},\quad \alpha_i,\quad \gamma$$

einem System linearer und homogener totaler Differentialgleichungen Genüge leisten. Wählen wir demnach für ein Anfangssystem $u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots u_n^{(0)}$ der Werte der Veränderlichen die Werte der $p_\nu^{(i)}$, X_ν so, dass die β_{ik}, α_i, γ zu Anfang gleich Null sind, was immer möglich ist*), so folgt, dass diese Functionen immer gleich Null sind. Hieraus erhellt sofort, dass, wenn mit

$$x_0,\ x_1,\ \dots\ x_n$$

die Integrale der bezüglichen vollständigen Differentiale:

$$\sum_i p_0^{(i)} du_i,\quad \sum_i p_1^{(i)} du_i,\quad \dots\quad \sum_i p_n^{(i)} du_i$$

bezeichnet werden, wir eben die gesuchte Hyperfläche mit den beiden gegebenen Fundamentalformen bestimmt haben.

---

*) Mittels einer linearen Transformation der u können wir es so einrichten, dass für die Anfangswerte $u_i^{(0)}$ der u

$$b_{ii} = 1,\quad b_{ik} = 0 \quad (i \neq k)$$

ist. Dann brauchen wir als Anfangswerte der $p_\nu^{(i)}$, X_ν nur die Coefficienten einer orthogonalen Substitution bezüglich $n+1$ Veränderlicher zu wählen.

§ 337. Fortsetzung.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass eine Hyperfläche V_n in S_{n+1} bis auf Bewegungen im Raume bestimmt ist, sobald ihre beiden Fundamentalformen gegeben sind, wie es eben bei den Flächen im gewöhnlichen Raume der Fall ist. Sobald jedoch der euklidische Raum mehr als drei Dimensionen hat, also für $n > 2$, können wir beweisen, dass, abgesehen von ganz vereinzelten Ausnahmefällen, die Hyperfläche V_n schon durch ihre erste Fundamentalform vollkommen bestimmt ist, d. h.:

Im euklidischen Raume von mehr als drei Dimensionen ist eine Hyperfläche, wofern sie als biegsam und undehnbar angenommen wird, im allgemeinen nicht verbiegbar.

Wenn nämlich zu einunddderselben ersten Fundamentalform $\sum_{ik} b_{ik} du_i du_k$ zwei verschiedene zweite Fundamentalformen

$$\sum_{ik} \Omega_{ik} du_i du_k \quad \text{und} \quad \sum_{ik} \Omega'_{ik} du_i du_k,$$

gehören sollten, so würde, da infolge der Gauss'schen Gleichungen (23) alle Unterdeterminanten zweiter Ordnung in der Determinante $|\Omega'_{ik}|$ denjenigen von $|\Omega_{ik}|$ bezüglich gleich sein müssten, aus elementaren Eigenschaften der Determinanten folgen*), dass, abgesehen von einer Änderung sämtlicher Vorzeichen, die Ω'_{ik} den Ω_{ik} bezüglich gleich sein müssten, wofern nicht in der Determinante $|\Omega_{ik}|$ sämtliche Unterdeterminanten dritter Ordnung verschwinden sollten.

Dieses ist der mögliche Ausnahmefall, den wir vorhin andeuteten, auf dessen ausführlichere Erörterung wir uns hier jedoch nicht einlassen können.

Die oben angestellten Überlegungen aber beweisen noch mehr. Die Gauss'schen Gleichungen (23) liefern im allgemeinen die Werte der Ω_{ik}, wenn die b_{ik} bekannt sind. Da nun ferner diese Werte der Ω_{ik} auch den Gleichungen (24) genügen müssen, so ist Folgendes klar:

Im allgemeinen ist es nicht möglich, im euklidischen Raume von mehr als drei Dimensionen eine Hyperfläche mit gegebenem Linienelement zu bestimmen.

Als interessantes Beispiel behandeln wir nun die Frage, ob es im euklidischen Raume S_{n+1} n-dimensionale Räume ($n > 2$) von constantem Riemann'schen Krümmungsmass K_0 giebt. Wegen der Gleichungen (23) müssen wir in diesem Falle haben:

*) S. Killing, Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, S. 236—237. (Leipzig-Teubner, 1885.)

$$\Omega_{\alpha\beta}\Omega_{\delta\gamma} - \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} = K_0(b_{\alpha\beta}b_{\delta\gamma} - b_{\alpha\gamma}b_{\beta\delta}).$$

Machen wir, was uns freisteht, in einem Anfangspunkte $u_i^{(0)}$

$$b_{ii} = 1, \quad b_{ik} = \Omega_{ik} = 0 \quad (i \neq k),$$

so erhalten wir die Gleichungen:

$$\Omega_{ii}\Omega_{kk} = K_0$$

oder, da eben $\Omega_{ii} = \frac{1}{R_i}$ ist, wo die R die Hauptkrümmungsradien sind:

$$R_i R_k = \frac{1}{K_0}.$$

Für $n > 2$ folgt nun offenbar aus drei dieser Gleichungen:

$$R_i R_k = \frac{1}{K_0}, \quad R_i R_l = \frac{1}{K_0}, \quad R_k R_l = \frac{1}{K_0}$$

die weitere:

$$R_i^2 = \frac{1}{K_0}.$$

Folglich muss K_0 positiv sein, und es ergiebt sich, wenn K_0 gleich $\frac{1}{R^2}$ ist:

$$R_1 = R_2 = \cdots = R_n = R.$$

Dann haben wir:

$$\sum \Omega_{ik} du_i du_k = \frac{1}{R} \sum b_{ik} du_i du_k,$$

und mit Hilfe der Gleichungen (22*) lässt sich nun sofort nachweisen, dass die Hyperfläche nichts anderes als eine Hypersphäre vom Radius R ist. Also:

Im euklidischen Raume von vier oder mehr Dimensionen giebt es keine pseudosphärischen Hyperflächen. Von Hyperflächen mit positivem constantem Krümmungsmass giebt es nur Hypersphären.

§ 338. **Fortsetzung.**

Im vorliegenden Falle des euklidischen Raumes und, wie wir sehen werden, allgemeiner im Falle der Räume mit constantem Krümmungsmass gestatten die Krümmungslinien einer Hyperfläche noch eine andere Definition, welche die Verallgemeinerung derjenigen ist, von der wir im Falle des gewöhnlichen Raumes ausgegangen sind (S. 97), nämlich die folgende:

Längs einer Krümmungslinie sind die Normalen der Hyperfläche die Tangenten einer Curve im Raume. Ist der Raum ein euklidischer, so stellt das Stück der Normale

vom Fusspunkt bis zum Berührungspunkt mit der erwähnten Curve den zugehörigen Hauptkrümmungsradius vor.

Um dieses zu beweisen, brauchen wir nur wie a. a. O. (S. 97—98) zu beachten, dass eine Curve, der die genannte Eigenschaft zukommt, dadurch charakterisiert ist, dass längs ihr die Beziehungen bestehen müssen:

$$dx_\nu = -\varrho dX_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots n),$$

wenn ϱ das mit passendem Vorzeichen erwähnte Normalenstück ist. Sie lassen sich auch wie folgt schreiben:

$$\sum_s \frac{\partial x_\nu}{\partial u_s} du_s = -\varrho \sum_s \frac{\partial X_\nu}{\partial u_s} du_s,$$

und wenn mit $\frac{\partial x_\nu}{\partial u_r}$ multipliciert und nach ν summiert wird, so ergeben sich die äquivalenten Gleichungen:

$$\sum_s b_{rs} du_s = \varrho \sum_s \Omega_{rs} du_s \quad (r = 1, 2, \ldots n),$$

womit die behauptete Eigenschaft nachgewiesen ist.

Hiernach ist klar, dass wir von n auf der Normale gelegenen Hauptkrümmungsmittelpunkten und von einer aus n Mänteln zusammengesetzten Evolutenhyperfläche reden können. Auf jedem Mantel Σ_i sind die Curven, die von den Normalen der Ausgangshyperfläche längs einer Krümmungslinie der entsprechenden Schar umhüllt werden, geodätische Linien, und es giebt auf Σ_i eine Schar zu ihnen orthogonaler $n-1$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, deren Gleichung: $R_i =$ Const. ist. Der Leser kann dieses sofort auf Grund ähnlicher Überlegungen wie in § 122 nachweisen, eine Erweiterung, die keine Schwierigkeit bietet. Umgekehrt, wird auf einer Hyperfläche V_n von S_{n+1} eine einfach unendliche Schar geodätisch paralleler $n-1$-dimensionaler Mannigfaltigkeiten festgelegt und werden in S_{n+1} die Tangenten an die zu diesen Mannigfaltigkeiten orthogonalen geodätischen Linien gezogen, so sind diese Tangenten die Normalen einer Hyperfläche Σ_n, für welche die Hyperfläche V_n ein Mantel der Evolutenhyperfläche ist.

Der Leser kann auch leicht die Untersuchungen des Kap. V über die sphärische Abbildung der Flächen und über Ebenencoordinaten auf n-dimensionale Räume erweitern, was wir hier der Kürze wegen übergehen.

§ 339. **Formeln von Gauss und von Codazzi im elliptischen Raume.**

Wir wollen nun für den elliptischen Raum ein System von Grundformeln suchen, welche den in den drei voraufgehenden Paragraphen für den euklidischen Raum entwickelten völlig entsprechen.

Hierzu bedienen wir uns der geodätischen Abbildung des elliptischen Raumes auf den euklidischen, und zwar der Gleichungen in § 329. Als Linienelement des elliptischen n-dimensionalen Raumes S_n vom Radius R nehmen wir das durch die Gleichung:

$$ds^2 = R^2(dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2) \tag{25}$$

gegebene an, worin $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ durch die Beziehung:

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1 \tag{26}$$

mit einander verknüpft sind. Der euklidische Raum S'_n, auf den wir die (geodätische) Abbildung vornehmen, ist der durch die homogenen Coordinaten $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$ bestimmte Raum, wenn in ihm eine Cayley'sche Metrik bezüglich der Fundamentalhyperfläche:

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \tag{27}$$

zu Grunde gelegt wird. In S_n wählen wir eine Hyperfläche V_{n-1} mit den Gleichungen:

$$x_0 = x_0(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}),\ x_1 = x_1(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}), \ldots x_n = x_n(u_1, u_2, \ldots u_{n-1}).$$

Das Quadrat ihres Linienelements sei:

$$ds^2 = \sum_{ik} b_{ik} du_i du_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n-1), \tag{28}$$

und darin:

$$b_{ik} = R^2 \mathop{\mathsf{S}}_{\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_k}. \tag{29}$$

In S'_n sind die Coordinaten

$$\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$$

des Poles der Tangentialhyperebene in einem Punkte x_i der Hyperfläche V_{n-1} bezüglich der Fundamentalhyperfläche (27) bis auf das Vorzeichen vollkommen durch die Gleichungen bestimmt (s. § 329):

$$\mathop{\mathsf{S}}_{\nu} \xi_\nu^2 = 1, \quad \mathop{\mathsf{S}}_{\nu} x_\nu \xi_\nu = 0, \quad \mathop{\mathsf{S}}_{\nu} \xi_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n-1). \tag{30}$$

Die Coordinaten eines Punktes, der auf der Normale zu V_{n-1} in x_i von x_i um die Strecke w entfernt ist, sind durch die Gleichungen gegeben (ebenda):

$$x'_\nu = x_\nu \cos\frac{w}{R} + \xi_\nu \sin\frac{w}{R} \quad (\nu = 0, 1, \ldots n). \tag{31}$$

Hieraus ergiebt sich speciell, wenn wir die V_{n-1} unendlich nahe

benachbarte und im Abstande ε parallele Hyperfläche betrachten, für die Variation des Linienelements die Gleichung:

$$\delta ds^2 = 2\varepsilon R \mathop{\mathrm{S}}_{\nu} dx_\nu d\xi_\nu.$$

Demnach haben die Coefficienten Ω_{ik} der zweiten Grundform von V_{n-1} (§ 331) die Werte:

$$\Omega_{ik} = -R \mathop{\mathrm{S}}_{\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial \xi_\nu}{\partial u_k} = R \mathop{\mathrm{S}}_{\nu} \xi_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_i \partial u_k}. \tag{32}$$

Da die Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\begin{vmatrix} R\frac{\partial x_0}{\partial u_1} & R\frac{\partial x_0}{\partial u_2} & \cdots & R\frac{\partial x_0}{\partial u_{n-1}} & x_0 & \xi_0 \\ R\frac{\partial x_1}{\partial u_1} & R\frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots & R\frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & x_1 & \xi_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & & & & & \vdots \\ R\frac{\partial x_n}{\partial u_1} & R\frac{\partial x_n}{\partial u_2} & \cdots & R\frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} & x_n & \xi_n \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist, weil ihr Quadrat gleich der Discriminante $|b_{ik}$ der Gleichungen (28) ist, so können wir die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_i \partial u_k}, \quad \frac{\partial \xi_\nu}{\partial u_i} \quad (\nu = 0, 1, \ldots n)$$

linear und homogen durch

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial u_2}, \quad \cdots \quad \frac{\partial x_\nu}{\partial u_{n-1}}, \quad x_\nu, \quad \xi_\nu$$

ausdrücken, und es werden in diesen Ausdrücken die Coefficienten von ν unabhängig sein. Auf diese Weise erhalten wir sofort die folgenden Grundformeln (vgl. S. 89):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} &= \sum_l \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}_b \frac{\partial x}{\partial u_l} - \frac{b_{ik}}{R^2} x + \frac{\Omega_{ik}}{R} \xi \quad (i, k = 1, 2, \ldots n-1), \\ \frac{\partial \xi}{\partial u_i} &= -R \sum_{lt} B_{lt} \Omega_{it} \frac{\partial x}{\partial u_l} \quad (i = 1, 2, \ldots n-1). \end{aligned} \right. \tag{33}$$

Sie gelten für jedes beliebige Wertepaar x_ν, ξ_ν.

Bei der Aufstellung der Integrabilitätsbedingungen für das System

(33) erhalten wir erstens die folgenden den Gauss'schen Gleichungen entsprechenden Gleichungen*):

(34) $$\Omega_{ik}\Omega_{j\nu} - \Omega_{ij}\Omega_{k\nu} = (i\nu, kj)_b - \frac{b_{ik}b_{j\nu} - b_{ij}b_{k\nu}}{R^2}$$
$$(i, k, j, \nu = 1, 2, \ldots n-1).$$

Zweitens ergeben sich wieder die Codazzi'schen Gleichungen:

(35) $$\frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial u_t} - \frac{\partial \Omega_{it}}{\partial u_k} + \sum_l \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_b \Omega_{lt} - \sum_l \begin{Bmatrix} it \\ l \end{Bmatrix}_b \Omega_{lk} = 0.$$

§ 340. Hyperflächen im elliptischen Raume.

Sobald die Coefficienten b_{ik}, Ω_{ik} der ersten und der zweiten Grundform den Gleichungen (34) und (35) genügen, so ist das System (33) unbeschränkt integrierbar, und durch ein ganz ähnliches Verfahren wie in § 336 lässt sich nachweisen, dass eine zugehörige Hyperfläche existiert. Für $n > 3$ geben natürlich die Gleichungen (34) im allgemeinen die Ω_{ik}, wenn die b_{ik} bekannt sind, und auch hier ist eine Hyperfläche unverbiegbar. Die Coefficienten der ersten Grundform dürfen nicht willkürlich gewählt werden, und somit giebt es insbesondere im elliptischen Raume von mehr als drei Dimensionen mit dem Radius R keine Hyperflächen mit constantem (Riemann'schem) Krümmungsmass $< \frac{1}{R^2}$ und von solchen mit constantem Krümmungsmass $> \frac{1}{R^2}$ nur die Hypersphären (vgl. § 337). Was die Hyperflächen mit dem constanten Krümmungsmass $\frac{1}{R^2}$ anbetrifft, so sind sie nichts anderes als die geodätischen Hyperflächen des Raumes.

Auch in der elliptischen Geometrie, die wir jetzt behandeln, gilt für die Krümmungslinien einer Hyperfläche dieselbe Definition wie im

---

*) Eigentlich ergeben sie sich zunächst in der Form:

$$\{il, kj\} = \sum_t B_{lt}(\Omega_{ik}\Omega_{jt} - \Omega_{ij}\Omega_{kt}) \quad \text{für} \quad l \neq \begin{cases} k \\ j \end{cases},$$

$$\{ik, kj\} = \sum_t B_{kt}(\Omega_{ik}\Omega_{jt} - \Omega_{ij}\Omega_{kt}) - \frac{b_{ij}}{R^2},$$

$$\{ij, kj\} = \sum_t B_{jt}(\Omega_{ik}\Omega_{jt} - \Omega_{ij}\Omega_{kt}) + \frac{b_{ik}}{R^2}.$$

Diese Gleichungen lassen sich aber sofort in die Gleichungen (34) des Textes überführen. Übrigens folgen (34) und (35) direct aus den allgemeinen Gleichungen (C), (D), S. 602—603, unter Berücksichtigung der Identitäten (S. 574):

$$(rk, ih)_a = \frac{1}{R^2}(a_{ri}a_{hk} - a_{rh}a_{ik}).$$

Falle des euklidischen Raumes (§ 338). Nehmen wir nämlich an, dass die Normalen längs einer Curve L einer Hyperfläche V_{n-1} eine Curve C im Raume umhüllen, so erhalten wir längs L die charakteristischen Gleichungen:

$$dx_\nu = -\operatorname{tg}\frac{w}{R}\,d\xi_\nu \quad (\nu = 0, 1, \ldots n),$$

wo w das Stück der Normale zwischen dem Fusspunkt und dem Berührungspunkt mit C ist. Durch Multiplication mit $\frac{\partial x_\nu}{\partial u_k}$ und Summation nach ν erhalten wir das äquivalente System:

$$\sum_i b_{ik} du_i = R \operatorname{tg}\frac{w}{R} \sum_i \Omega_{ik} du_i \quad (k = 1, 2, \ldots n-1).$$

Auf diese Weise kommen wir zu den allgemeinen Gleichungen zurück, die uns zur Definition der Krümmungslinien gedient haben, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Ferner ergiebt sich der zugehörige Hauptkrümmungsradius

$$\varrho = R \operatorname{tg}\frac{w}{R}.$$

Entsprechend also den $n-1$ Hauptkrümmungsradien

$$\varrho_1, \; \varrho_2, \; \ldots \; \varrho_{n-1}$$

erhalten wir auf der Normale $n-1$ Hauptkrümmungsmittelpunkte; ihre Entfernungen vom Fusspunkt $w_1, w_2, \ldots w_{n-1}$ sind durch die Gleichungen:

$$\varrho_i = R \operatorname{tg}\frac{w_i}{R} \quad (i = 1, 2, \ldots n-1)$$

definiert*).

Endlich bemerken wir, dass man in der elliptischen Geometrie auf ein Princip metrischer Dualität stösst, wenn man zusammen mit jeder Hyperfläche V_{n-1} die Polarhyperfläche V'_{n-1} bezüglich der Fundamentalhyperfläche betrachtet. Wegen der Gleichungen:

$$x' = x\cos\frac{w}{R} + \xi\sin\frac{w}{R},$$

die für $\frac{w}{R} = \frac{\pi}{2}$ $x' = \xi$ geben, ist letztere nichts anderes als die zur Ausgangshyperfläche im Abstande $\frac{\pi R}{2}$ parallele Hyperfläche. Es ist wohl klar, dass auf den beiden Hyperflächen die Krümmungslinien einander entsprechen und die Hauptkrümmungsradien der einen die inversen derjenigen der anderen sind.

*) Da sich die Gerade nach einem Umgange um πR schliesst, so ist w_i vollkommen dadurch bestimmt, dass es zwischen 0 und πR liegt.

Bezeichnen wir mit

$$ds^2 = \mathsf{S}\, d\xi_\nu^2 = \sum_{ik} b'_{ik} du_i du_k$$

das Quadrat des Linienelements von V'_{n-1}, so hat es offenbar dieselbe zweite Grundform; desgleichen werden neben den Gleichungen (33), (34) und (35) auch diejenigen gelten, welche sich aus ihnen ergeben, wenn die x mit den ξ und die b mit den b' vertauscht werden.

§ 341. Hyperflächen im hyperbolischen Raume.

Wir wollen nun in gedrängter Kürze auch für die hyperbolische Geometrie eine Gruppe von Gleichungen ableiten, die den Gleichungen (33), (34) und (35) völlig ähnlich sind. Hierzu bedienen wir uns wieder der Beltrami'schen geodätischen Abbildung des hyperbolischen Raumes mit dem Radius R auf den euklidischen, und zwar auf das Innere der Hypersphäre (§ 327):

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

Dabei führen wir jedoch homogene Coordinaten ein, indem wir $\frac{x_i}{x_0}$ statt x_i setzen, und bestimmen den den homogenen Coordinaten anhaftenden willkürlichen Factor dadurch, dass wir:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_0^2 = -1 \tag{36}$$

setzen. Zur Bestimmung des Abstandes δ zweier Punkte x und x' erhalten wir die Gleichung:

$$\cosh\frac{\delta}{R} = -(x_1x_1' + x_2x_2' + \cdots + x_nx_n') + x_0x_0', \tag{37}$$

und nehmen wir sie als einander unendlich nahe an, so folgt hieraus für das Quadrat des Linienelements des hyperbolischen Raumes:

$$ds^2 = R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 - dx_0^2). \tag{38}$$

Betrachten wir nun einen Punkt x des Raumes und eine durch ihn gehende Ebene, deren Pol bezüglich der Fundamentalhyperfläche:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - x_0^2 = 0$$

die homogenen Coordinaten

$$\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$$

haben mag, so haben wir:

$$-\xi_0x_0 + \xi_1x_1 + \cdots + \xi_nx_n = 0. \tag{39}$$

Da wir nun den Pol ξ als ausserhalb der Fundamentalhyperfläche gelegen voraussetzen, so ist:

$$\sum_i \xi_i^2 - \xi_0^2 > 0,$$

und wieder bestimmen wir den den ξ_i anhaftenden Proportionalitätsfactor durch die Gleichung:

$$(40) \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2 - \xi_0^2 = 1.$$

Die Gleichungen:

$$(41) \qquad x'_\nu = x_\nu \cosh \frac{w}{R} + \xi_\nu \sinh \frac{w}{R}$$

geben für veränderliches w die Coordinaten jedes Punktes auf der Verbindungslinie von x und ξ, die auch die Normale zur Polarebene von ξ in x ist. Ferner ist wegen (37) w der Abstand zwischen x und x'. Des weiteren sei darauf hingewiesen, dass der Gleichung (37), die den Abstand zwischen x und x' angiebt, eine zweite dualistisch entspricht, die den Winkel φ der beiden Hyperebenen ξ und ξ' angiebt, nämlich die Gleichung:

$$(41^*) \qquad \cos\varphi = \sum_1^n{}_\nu\, \xi_\nu \xi'_\nu - \xi_0 \xi'_0.$$

Nun setzen wir voraus, wir hätten im hyperbolischen Raume eine Hyperfläche V_{n-1}, deren Linienelementquadrat wir wieder mit:

$$(42) \qquad ds^2 = \sum_{ik} b_{ik}\, du_i\, du_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots n-1)$$

bezeichnen, wobei:

$$(43) \qquad b_{ik} = R^2 \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_k} - R^2 \frac{\partial x_0}{\partial u_i} \frac{\partial x_0}{\partial u_k}$$

ist, und es wären

$$\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$$

die Coordinaten des Poles der Tangentialhyperebene bezüglich der Fundamentalhyperfläche, sodass wir haben:

$$(44) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n{}_\nu \xi_\nu^2 - \xi_0^2 = 1, \qquad \sum{}_\nu \xi_\nu x_\nu - \xi_0 x_0 = 0, \\ \displaystyle\sum{}_\nu \xi_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} - \xi_0 \frac{\partial x_0}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n-1). \end{cases}$$

Für die Coefficienten Ω_{ik} der zweiten Grundform erhalten wir:

$$(45) \qquad \begin{aligned} \Omega_{ik} = &\quad R\left(\sum{}_\nu \xi_\nu \frac{\partial^2 x_\nu}{\partial u_i \partial u_k} - \xi_0 \frac{\partial^2 x_0}{\partial u_i \partial u_k}\right) \\ = &- R\left(\sum{}_\nu \frac{\partial \xi_\nu}{\partial u_k} \frac{\partial x_\nu}{\partial u_i} - \frac{\partial \xi_0}{\partial u_k} \frac{\partial x_0}{\partial u_i}\right), \end{aligned}$$

und verfahren wir wie in § 339, so ergiebt sich, dass an Stelle der Gleichungen (33) einfach die folgenden treten:

$$(46)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_l \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_b \dfrac{\partial x}{\partial u_l} + \dfrac{b_{ik}}{R^2} x + \dfrac{\Omega_{ik}}{R} \xi, \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial u_i} = - R \sum_l \sum_t B_{lt} \Omega_{it} \dfrac{\partial x}{\partial u_l}. \end{cases}$$

Ihnen genügen wieder die $n+1$ Wertepaare (x_ν, ξ_ν) $(\nu = 0, 1, \dots n)$.

Die Gauss'schen Gleichungen lauten hier:

$$(47)\qquad \Omega_{ik}\Omega_{j\nu} - \Omega_{ij}\Omega_{k\nu} = (i\nu, kj)_b + \frac{b_{ik} b_{j\nu} - b_{ij} b_{k\nu}}{R^2},$$

während die Codazzi'schen Gleichungen ihre Form:

$$(48)\qquad \frac{\partial \Omega_{ik}}{\partial u_t} - \frac{\partial \Omega_{it}}{\partial u_k} + \sum_l \begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}_b \Omega_{lt} - \sum_l \begin{Bmatrix} it \\ l \end{Bmatrix}_b \Omega_{lk} = 0$$

unverändert beibehalten.

Wieder geben die Gleichungen (47) und (48) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür an, dass die beiden Formen:

$$\sum_{ik} b_{ik} du_i du_k, \qquad \sum_{ik} \Omega_{ik} du_i du_k$$

als erste bezw. zweite Grundform zu einer Fläche des hyperbolischen Raumes gehören.

Es ist hier zu bemerken, dass die auf die zweite Weise definierten Krümmungslinien (vgl. den voraufgehenden Paragraphen) sicherlich auch Krümmungslinien im ersten Sinne sind; das Umgekehrte gilt aber nur dann, wenn der entsprechende Hauptkrümmungsradius nicht grösser als R ist. Verfahren wir nämlich wie in § 340, so erhalten wir hier:

$$\varrho_i = R \operatorname{tgh} \frac{w_i}{R},$$

und wenn $|\varrho_i|$ grösser als R ist, so ist der zugehörige Wert von w_i imaginär. Aber das Schneiden einer Normale mit der nächstfolgenden findet im euklidischen Bildraume immer noch thatsächlich statt; nur liegt hier der Schnittpunkt ausserhalb der Fundamentalhyperfläche und bildet als solcher einen imaginären Punkt des hyperbolischen Raumes ab.

Zum Schlusse mag erwähnt werden, dass man auch in der hyperbolischen Geometrie von einem Prinzip metrischer Dualität reden kann. Nur muss man hier, da ja die Polarhyperfläche der gegebenen Fläche bezüglich der Fundamentalhyperfläche eine völlig imaginäre Fläche des hyperbolischen Raumes vorstellt, anstatt des Linienelements der Aus-

gangshyperfläche ihr Winkelelement einführen, d. h. den unendlich kleinen Winkel $d\varphi$, der von zwei unendlich nahe benachbarten Hypertangentialebenen ξ und $\xi + d\xi$ gebildet wird. Infolge (41*) ist er gegeben durch:

$$d\varphi^2 = \sum d\xi_\nu^2 - d\xi_0^2.\text{*)}$$

Bezeichnen wir nun mit b'_{ik} die Coefficienten dieser dritten Fundamentalform, so erhalten wir als die den Gleichungen (40) dual entsprechenden Gleichungen unmittelbar die folgenden:

$$(46^*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_l \left\{ \begin{matrix} i\,k \\ l \end{matrix} \right\}_{b'} - b'_{ik}\xi - \dfrac{\Omega_{ik}}{R} x, \\ \dfrac{\partial x}{\partial u_i} = -\dfrac{1}{R} \sum_l \sum_t B'_{lt} \Omega_{it} \dfrac{\partial \xi}{\partial u_l}. \end{cases}$$

Die Codazzi'schen Gleichungen bleiben hinsichtlich der Form der b'_{ik} ungeändert; dagegen treten an Stelle der Gleichungen (47) die folgenden:

$$(47^*) \quad \frac{\Omega_{ik}\Omega_{j\nu} - \Omega_{ij}\Omega_{k\nu}}{R^2} = -(i\nu, kj)_{b'} + b'_{ik}b'_{j\nu} - b'_{ij}b'_{k\nu}.$$

§ 342. Specialfall des dreidimensionalen elliptischen oder hyperbolischen Raumes. Haupttangentencurven und Enneper'scher Satz.

Wir wollen nun unsere allgemeinen Formeln auf den Fall der dreidimensionalen Räume anwenden. Zur besseren Vergleichung mit den Formeln der gewöhnlichen Theorie bezeichnen wir wieder mit u, v die unabhängigen Veränderlichen oder krummlinigen Coordinaten auf der Fläche und mit

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$
$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$$

die erste bezw. zweite Grundform. Wir können auch die dritte Grundform, die wir mit

$$E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2$$

bezeichnen, in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen; sie stellt das Quadrat des Winkelelements der Ausgangsfläche oder auch, in der elliptischen Geometrie, das Linienelementquadrat der Polarfläche dar.

*) Auf diese Auffassung des Dualitätsprinzips hat bereits C. Fibbi hingewiesen in seiner Abhandlung: I sistemi doppiamente infiniti di raggi negli spazî a curvatura costante (Annali della Reale Scuola Normale Superiore, 7. Bd.). Hier auch treten zum ersten Male für den Fall $n = 3$ und für auf einander senkrechte Parameterlinien die Formeln des Textes auf.

In beiden Fällen gelten die Codazzi'schen Gleichungen (S. 91, (IV)):

$$(49)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial D}{\partial v} - \dfrac{\partial D'}{\partial u} - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} D + \left[\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right] D' + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} D'' = 0, \\ \dfrac{\partial D''}{\partial u} - \dfrac{\partial D'}{\partial v} + \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} D + \left[\begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right] D' - \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} D'' = 0, \end{cases}$$

die wir auch in der zweiten äquivalenten Form (IV*) (S. 92) schreiben könnten. Die Gauss'sche Gleichung lautet, wenn K_0 die Krümmung des Raumes und K die absolute Krümmung der Fläche bedeutet:

$$(50)\qquad \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = K - K_0.\text{*)}$$

Dabei haben wir im Falle der elliptischen Geometrie $K_0 = +\frac{1}{R^2}$, in Falle der hyperbolischen Geometrie $K_0 = -\frac{1}{R^2}$. Die linke Seite von (50) ist nichts anderes als das Product der beiden Hauptkrümmungen und mag die relative Krümmung k der Fläche genannt werden, sodass

$$k = K - K_0$$

ist. Umgekehrt, sind die Gleichungen (49) und (50) erfüllt, so giebt es im elliptischen oder hyperbolischen Raume eine zugehörige Fläche. Ihre Bestimmung hängt beim elliptischen Raume von der Integration des nachstehenden unbeschränkt integrierbaren Systems ab:

$$\left.\begin{aligned} &(51)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{E}{R^2}x + \dfrac{D}{R}\xi, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{F}{R^2}x + \dfrac{D'}{R}\xi, \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v} - \dfrac{G}{R^2}x + \dfrac{D''}{R}\xi; \end{cases} \\ &(52)\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial u} = R\left(\dfrac{FD' - GD}{EG - F^2}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{FD - ED'}{EG - F^2}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right), \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = R\left(\dfrac{FD'' - GD'}{EG - F^2}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{FD' - ED''}{EG - F^2}\dfrac{\partial x}{\partial v}\right). \end{cases} \end{aligned}\right\} K_0 = +\frac{1}{R^2}.$$

Beim hyperbolischen Raume dagegen haben wir als entsprechendes System dasjenige, welches sich aus dem obigen einfach dadurch ergiebt, dass in den drei Gleichungen (51) das Vorzeichen des Gliedes in x geändert wird.

Von Wichtigkeit ist es, darauf hinzuweisen, dass in der elliptischen oder hyperbolischen Geometrie die Definition conjugierter Richtungen dieselbe bleibt wie in der euklidischen Geometrie. Da sich, wenn man

---

*) Man vergleiche hierzu die allgemeine Gleichung (19), S. 609.

wie auf S. 107 verfährt, herausstellt, dass die Bedingung dafür, dass zwei Linienelemente ds und δs conjugiert sind, durch:

$$dx_0\delta x_0 + dx_1\delta x_1 + dx_2\delta x_2 + dx_3\delta x_3 = 0$$

beim elliptischen Raume und durch

$$-dx_0\delta x_0 + dx_1\delta x_1 + dx_2\delta x_2 + dx_3\delta x_3 = 0$$

beim hyperbolischen Raume angegeben wird, so wird sie sich in beiden Fällen durch die Coefficienten der zweiten Grundform vermöge der gewöhnlichen Gleichung:

$$Ddu\delta u + D'(du\delta v + dv\delta u) + D''dv\delta v = 0$$

ausdrücken. Insbesondere lautet die Gleichung der Haupttangentencurven wieder:

$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = 0.$$

Beachten wir dann weiter, dass die dritte Grundform:

$$E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2$$

auch hier eine lineare Verbindung der anderen beiden ist, dass nämlich die Gleichung besteht:

$$(33)\quad \begin{cases} E'du^2 + 2F'dudv + G'dv^2 = \\ \qquad = -\dfrac{1}{\varrho_1\varrho_2}(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2) - \\ \qquad - \left(\dfrac{1}{\varrho_1} + \dfrac{1}{\varrho_2}\right)(Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2), \end{cases}$$

wo ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien bedeuten, so folgt daraus, dass auch in der elliptischen oder hyperbolischen Geometrie der Enneper'sche Satz (S. 121) in der nachstehenden Fassung gilt:

Das Quadrat der Torsion*) der Haupttangentencurven ist in jedem Punkte gleich der mit entgegengesetztem Zeichen genommenen relativen Krümmung k der Fläche.

Wir fügen noch hinzu, dass auch hier der Satz noch bestimmter gefasst werden könnte. Es lässt sich nämlich wieder beweisen, dass die beiden durch einen Flächenpunkt gehenden Haupttangentencurven in ihm gleiche, aber dem Zeichen nach entgegengesetzte Torsionen haben. (Vgl. S. 128.)

---

*) Wir messen die Torsion einer Curve im elliptischen oder hyperbolischen Raume dadurch, dass wir den unendlich kleinen Winkel, den zwei unendlich nahe benachbarte osculierende geodätische Flächen bilden, durch das Bogenelement dividieren. Dieses liefert uns:

$$\frac{1}{T^2} = -\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} - \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

§ 343. Fortsetzung.

Auf Grund der Fundamentalgleichungen des voraufgehenden Paragraphen könnten wir die ganze Flächentheorie wieder aufnehmen, um sie auch im Falle des elliptischen oder hyperbolischen Raumes parallel mit der gewöhnlichen Theorie zu entwickeln. Wir wollen uns hier darauf beschränken, nur einige Hauptpunkte dieser Erweiterung, die sich übrigens sehr leicht durchführen lässt, hervorzuheben.

Zunächst setzen wir voraus, die Fläche habe reelle (und getrennte) Haupttangentencurven, d. h., ihre relative Krümmung k sei negativ. Setzen wir:

$$k = -\frac{1}{\lambda^2},$$

so erhalten wir:

$$D = 0, \quad D'' = 0, \quad \frac{D'}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{\lambda}.$$

Also lauten die Codazzi'schen Gleichungen:

(54) $$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = 2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}, \quad \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}.$$

Umgekehrt, ist die Krümmung K der Differentialform:

(55) $$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

so beschaffen, dass,

(56) $$K - K_0 = -\frac{1}{\lambda^2}$$

gesetzt, die Gleichungen (54) gelten, so giebt es eine Fläche des elliptischen oder hyperbolischen Raumes (je nachdem K_0 gleich $+\frac{1}{R^2}$ oder $-\frac{1}{R^2}$ ist), deren Linienelementquadrat unter Zugrundelegung der Haupttangentencurven u, v durch (55) gegeben ist.

Als Specialfall betrachten wir die Flächen mit constanter Krümmung und reellen Haupttangentencurven. Da in diesem Falle λ constant ist, ergiebt sich aus (54):

$$\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = 0, \quad \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = 0,$$

folglich kann mittels Änderung der Parameter u, v das Quadrat des Linienelements auf die Form gebracht werden (S. 130):

(56*) $$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2.$$

Darin ist ω ein Integral der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = -K \sin\omega,$$

von der auch die Bestimmung der pseudosphärischen Flächen des euklidischen Raumes abhängt. Demnach gelten auch für diese Flächen in Räumen constanten Krümmungsmasses wieder die Sätze auf S. 130. Wenn dann nicht nur die relative Krümmung k, sondern auch die absolute $K = k + K_0$ negativ ist, so wollen wir die Fläche als pseudosphärische bezeichnen. Für diese Flächen gelten ebenfalls, wie wir bald sehen werden, die in Kap. XVI behandelten Transformationsmethoden.

Wir wenden noch die soeben erhaltenen Gleichungen auf die Minimalflächen an, d. h. auf diejenigen Flächen, bei denen die Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte gleich und entgegengesetzt sind*). Da in diesem Falle

$$F = 0$$

ist, so folgt aus der Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}$$

wieder: Die Haupttangentencurven auf den Minimalflächen bilden ein Isothermensystem.

Die Gleichungen (54) und (56) beweisen ferner, dass das Linienelementquadrat der Fläche auf die Form:

$$ds^2 = e^{2\vartheta}(du^2 + dv^2)$$

gebracht werden kann. Darin ist ϑ ein Integral der Gleichung:

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = -\frac{2}{R^2}\sinh 2\vartheta$$

im Falle des elliptischen Raumes, d. h. für $K_0 = +\frac{1}{R^2}$, oder der Gleichung:

$$(\beta) \qquad \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial v^2} = \frac{2}{R^2}\cosh 2\vartheta$$

im Falle des hyperbolischen Raumes, d. h. für $K_0 = -\frac{1}{R^2}$.

Bemerkenswert ist, dass wir zur Bestimmung der Minimalflächen im elliptischen Raume dieselbe Gleichung (α) haben, von welcher im euklidischen Raume die Bestimmung der Flächen constanter mittlerer Krümmung $\frac{1}{R}$ abhängt, die ferner dasselbe Linienelement haben.

*) Auf den Beweis dafür, dass mit der Relation: $\varrho_1 + \varrho_2 = 0$ wiederum die Eigenschaft des Flächenminimums verbunden ist, gehen wir hier nicht ein. Der Leser sei verwiesen auf Darboux, 3. Bd., S. 491, oder auf die Abhandlung des Verfassers in den Atti dei Lincei, 4. Ser., 4. Bd., 1888.

§ 344. Flächen mit dem Krümmungsmass Null im elliptischen Raume als Schiebungsflächen*).

Unter den Flächen constanten Krümmungsmasses im elliptischen oder hyperbolischen Raume sind besonders bemerkenswert diejenigen, deren absolute Krümmung gleich Null ist, für die somit die gewöhnliche Metrik der euklidischen Ebene gültig ist. In diesem Paragraphen behandeln wir die Flächen mit dem Krümmungsmass $K = 0$ im elliptischen Raume, deren Haupttangentencurven, da die relative Krümmung $k = -\frac{1}{R^2}$ ist, reell sind und die constante Torsion $\pm\frac{1}{R}$ haben. Für das Quadrat ihres Linienelements erhalten wir unter Zugrundelegung der Haupttangentencurven u, v den Ausdruck:

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2.$$

Da ω ein Integral der Gleichung:

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u\,\partial v} = 0$$

ist, so hat es die Form:

$$\omega = U + V,$$

wo U nur von u, V nur von v abhängt. Das Linienelementquadrat:

(57) $$ds^2 = du^2 + 2\cos(U + V)\, du\, dv + dv^2$$

ist das der gewöhnlichen Ebene, in der alle Curven u unter einander und alle Curven v unter einander congruent, nur gegen einander verschoben sind**). Nun ist die merkwürdige Eigenschaft, auf die wir hinweisen wollen, die, dass auch auf den Flächen mit verschwindender Krümmung im elliptischen Raume alle Haupttangentencurven u bezw. v unter einander congruent sind. Dieses ergiebt sich unmittelbar daraus, dass ihre bezüglichen geodätischen Krümmungen, die zugleich die absoluten Krümmungen sind, da es sich um die Haupttangentencurven handelt, durch die Gleichungen:

$$\frac{1}{\varrho_u} = \frac{\partial\omega}{\partial v} = V', \qquad \frac{1}{\varrho_v} = \frac{\partial\omega}{\partial u} = U'$$

gegeben sind, sodass also alle Curven $u =$ Const. dieselben natürlichen Gleichungen:

$$\frac{1}{\varrho_u} = V'_{(v)}, \qquad \frac{1}{T} = \frac{1}{R}$$

*) Vgl. die Abhandlung des Verfassers: Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica (Annali di Matematica, 24. Bd., 1895).

**) Die expliciten Gleichungen für die orthogonalen Cartesischen Coordinaten in der Ebene als Functionen der Parameter u, v in (57) lauten:

$$x = \int \sin U\, du - \int \sin V\, dv,$$
$$y = \int \cos U\, du + \int \cos V\, dv.$$

haben, wenn v eben ihr Bogen ist*). Welche Art der Bewegung muss nun im elliptischen Raume stattfinden, damit eine der Haupttangentencurven u mit allen übrigen zur Deckung gelange? Bedenken wir, dass bei einer solchen Bewegung alle Punkte der Haupttangentencurve u gleiche Bogen der Haupttangentencurven v beschreiben, so erhellt, dass diese Bewegung in der stetigen Schiebung dieser Haupttangentencurve längs einer solchen der anderen Schar besteht**).

Umgekehrt folgt daraus, dass die beiden Functionen U, V willkürlich sind, die Thatsache, dass, wenn wir im elliptischen Raume vom Radius R zwei Curven C und C' mit constanter, aber entgegengesetzter Torsion, $\pm\frac{1}{R}$, nehmen und sie im Raume so legen, dass sie durch einen gemeinsamen Punkt O gehen und in ihm dieselbe Schmiegungsebene haben, wir der Curve C nur eine stetige Schiebung erster Art längs C' oder auch der Curve C' eine stetige Schiebung zweiter Art längs C zu erteilen brauchen, um eine Fläche mit der Krümmung Null zu erzeugen.

Wir können also sagen:

Alle Flächen mit der Krümmung Null im elliptischen Raume vom Radius R sind Schiebungsflächen, deren beide erzeugenden Curven constante, aber entgegengesetzte Torsion, $\pm\frac{1}{R}$, haben.

Ist eine der beiden willkürlichen Functionen U, V, z. B. V, constant, so sind die Haupttangentencurven v geodätische, folglich gerade Linien. Um diese Linienflächen mit der Krümmung Null zu erhalten, brauchen wir also nur eine beliebige Curve mit der Torsion $+\frac{1}{R}$ oder $-\frac{1}{R}$ zu nehmen und durch einen ihrer Punkte in der Schmiegungsebene eine Richtung festzulegen; diese bestimmt dann eine Schiebung erster oder zweiter Art (je nach dem Vorzeichen der Torsion) von veränderlichem Betrage, während welcher die Curve eben die gesuchte Fläche erzeugt.

Diese Linienflächen besitzen aber noch eine sehr merkwürdige

---

*) Dass auch im elliptischen Raume eine Curve durch ihre natürlichen Gleichungen eindeutig bestimmt ist (S. 12), kann auch hier auf Grund der einschlägigen Frenet'schen Formeln nachgewiesen werden, was wir dem Leser überlassen.

**) Zufolge den Eigenschaften der Schiebungen (§ 330) ist klar, dass eine Schiebung erster oder zweiter Art vollkommen bestimmt ist, wenn die Richtung, nach der sich ein gegebener Punkt des Raumes bewegt, und der Betrag der Schiebung gegeben sind.

Eigenschaft, auf die wir hier nur hinweisen wollen. Sie besteht darin, dass alle Orthogonaltrajectorien der Erzeugenden ebenfalls (geodätische) Curven mit der constanten Torsion $\frac{1}{R}$ sind. Demnach giebt es auf der Fläche zwei verschiedene Scharen von Curven mit der constanten Torsion $\pm\frac{1}{R}$, von denen die einen Haupttangentencurven, die anderen geodätische Orthogonaltrajectorien der Erzeugenden sind. Somit sind wir zu dem Ergebnis gelangt:

Jede Linienfläche mit verschwindender Krümmung im elliptischen Raume vom Radius R ist die Ortsfläche der Binormalen einer Curve mit constanter Torsion $\frac{1}{R}$. Umgekehrt ist eine jede solche Ortsfläche eine Fläche mit verschwindender Krümmung*).

Unter diesen Linienflächen verdient die Clifford'sche Doppel-Linienfläche besondere Erwähnung. Sie ergiebt sich, wenn beide Functionen U, V constant, also beide erzeugende Curven Gerade sind. Auf die merkwürdigen Eigenschaften der Clifford'schen Fläche hat Klein mit Recht die Aufmerksamkeit der Mathematiker in den angeführten Arbeiten gelenkt. Wir wollen hier bemerken, dass im elliptischen Raume, abgesehen von der Kugel, die Clifford'sche Fläche die einzige Fläche ist, die constante Hauptkrümmungsradien hat. Ist insbesondere:

$$U + V = \frac{\pi}{2},$$

so ist die Clifford'sche Fläche sowohl eine Fläche mit verschwindender Krümmung als auch eine Minimalfläche.

§ 345. Die beiden Mäntel der Evolutenfläche.

Wir wollen nun die allgemeinen Formeln in § 342 auf den Fall anwenden, in dem die Parameterlinien u, v die Krümmungslinien sind. Der Kürze halber entwickeln wir die Rechnungen nur für den Fall des elliptischen Raumes; doch wird der Leser leicht nachweisen können, dass ganz ähnliche Ergebnisse für den hyperbolischen Raum gelten.

Der Einfachheit halber setzen wir $R = 1$, wenn w_1, w_2 die Ent-

*) Jede Linienfläche mit verschwindender Krümmung ist somit in einer Clifford'schen Congruenz enthalten. Dass umgekehrt jede Linienfläche einer Clifford'schen Congruenz verschwindende Krümmung hat, folgt einfach daraus, dass jede solche Fläche eine stetige Schiebung in sich gestattet, während welcher jede erzeugende Gerade in sich verschoben wird. Auch können wir unserem Satze folgende bemerkenswerte Fassung geben: Die Binormalen jeder Curve mit constanter Torsion $\frac{1}{R}$ in unserem elliptischen Raume sind im Clifford'schen Sinne parallel.

fernungen der beiden Krümmungsmittelpunkte vom Fusspunkt der Normale, und müssen dann hier setzen:

$$F = 0, \qquad D' = 0, \qquad r_1 = \operatorname{tg} w_1, \qquad r_2 = \operatorname{tg} w_2,$$
$$D = -\frac{E}{r_2}, \qquad D'' = -\frac{G}{r_1}.$$

Auf diese Weise gehen die Codazzi'schen Gleichungen in die gewöhnlichen für den euklidischen Raum gültigen über:

$$(58) \qquad \begin{cases} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right) = 0, \\ \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right) = 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (52) ergeben sich ferner die Rodrigues'schen Gleichungen:

$$(59) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \cot w_2 \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = \cot w_1 \frac{\partial x}{\partial v}.$$

Bezeichnen wir nun mit y_1, y_2, y_3, y_4 die Coordinaten des ersten Krümmungsmittelpunkts, so haben wir:

$$y_i = x_i \cos w_1 - \xi_i \sin w_1.$$

Differenzieren wir dieses unter Berücksichtigung der Gleichungen (58) und (59) und versehen wir die auf den ersten Mantel der Evolutenfläche (vgl. S. 326 u. f.) bezüglichen Grössen mit dem Index 1, so finden wir leicht:

$$(60) \qquad \begin{cases} E_1 = \frac{E \sin^2 (w_2 - w_1)}{\sin^2 w_2} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial u}\right)^2, \\ F_1 = \frac{\partial w_1}{\partial u} \frac{\partial w_1}{\partial v}, \qquad G_1 = \left(\frac{\partial w_1}{\partial v}\right)^2, \end{cases}$$

also:

$$(61) \qquad ds_1^2 = dw_1^2 + \frac{E \sin^2 (w_2 - w_1)}{\sin^2 w_2} du^2.$$

Bezeichnen wir ferner mit $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ die Coordinaten der Tangentialebene des ersten Mantels der Evolutenfläche, so erhalten wir:

$$\eta_i = \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v},$$

demnach wegen der Gleichungen (51):

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial x_i}{\partial u},$$
$$\frac{\partial \eta_i}{\partial v} = -\frac{1}{E} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial x_i}{\partial u} - \sqrt{G} x_i - \frac{\sqrt{G}}{r_1} \xi_i.$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir für die Coefficienten D_1, D_1', D_1'' der zweiten Grundform des ersten Evolutenflächenmantels die Werte ab:

$$(62)\qquad D_1 = \frac{E}{\sqrt{G}}\,\frac{\sin w_1}{\sin^2 w_2}\,\frac{\partial w_2}{\partial v},\qquad D_1' = 0,\qquad D_1'' = -\frac{\sqrt{G}}{\sin w_1}\,\frac{\partial w_1}{\partial v}.$$

Analog erhalten wir für den zweiten Mantel:

$$(61^*)\qquad ds_2^2 = dw_2^2 + \frac{G\sin^2(w_2 - w_1)}{\sin^2 w_1}\,dv^2,$$

$$(62^*)\qquad D_2 = -\frac{\sqrt{E}}{\sin w_2}\,\frac{\partial w_2}{\partial u},\qquad D_2' = 0,\qquad D_2'' = \frac{G}{\sqrt{E}}\,\frac{\sin w_2}{\sin^2 w_1}\,\frac{\partial w_1}{\partial u}.$$

Hieraus ergeben sich für die relativen Krümmungen k_1, k_2 der beiden Evolutenflächenmäntel die bemerkenswerten Ausdrücke:

$$(63)\qquad k_1 = -\frac{1}{\sin^2(w_2 - w_1)}\,\frac{\dfrac{\partial w_2}{\partial v}}{\dfrac{\partial w_1}{\partial v}},\qquad k_2 = -\frac{1}{\sin^2(w_2 - w_1)}\,\frac{\dfrac{\partial w_1}{\partial u}}{\dfrac{\partial w_2}{\partial u}}.$$

Aus den Gleichungen (62) und (62*) folgt, dass auch in den Räumen constanten Krümmungsmasses der Ribaucour'sche Satz (S. 242) gültig ist:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass sich auf den beiden Mänteln der Evolventenfläche die Haupttangentencurven entsprechen, ist, dass die Evolventenfläche eine W-Fläche ist*).

Desgleichen ergiebt sich, dass auch der Satz gilt (S. 244):

Auf den beiden Mänteln der Evolutenfläche einer Fläche entsprechen sich die Krümmungslinien nur dann, wenn die Evolventenfläche eine W-Fläche ist, deren Hauptkrümmungsradien,

$$r_1 = \operatorname{tg} w_1,\qquad r_2 = \operatorname{tg} w_2,$$

durch die Relation:

$$w_2 - w_1 = \text{Const.}$$

verbunden sind.

Offenbar sind in diesem Falle wegen der Gleichungen (63) beide Mäntel der Evolutenfläche pseudosphärische Flächen, deren absolute Krümmung durch:

$$(64)\qquad K = 1 - \frac{1}{\sin^2(w_2 - w_1)} = -\cot^2(w_2 - w_1)$$

gegeben ist.

---

*) Auch hier bezeichnen wir als W-Flächen solche Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch eine Relation verbunden sind.

§ 346. Weingarten'scher Satz. Complementärtransformation der pseudosphärischen Flächen.

Wir wollen hier nicht alle die zahlreichen Folgerungen aus den voraufgehenden Ergebnissen ziehen, sondern nur die wichtigste angeben. Sie besteht wieder in dem verallgemeinerten Weingarten'schen Satze (S. 246):

Jeder Mantel der Evolutenfläche einer W-Fläche im elliptischen oder hyperbolischen Raume ist auf eine Rotationsfläche abwickelbar, deren Gestalt lediglich von der Relation abhängt, welche die Hauptkrümmungsradien der Evolventenfläche verknüpft.

Zum Beweise brauchen wir nur die geodätische Krümmung der Curven $w_1 =$ Const. auf dem ersten Mantel der Evolutenfläche zu berechnen. Dafür ergiebt sich nach (60) der Wert:

$$\frac{1}{\varrho_g} = \cot(w_1 - w_2). \tag{65}$$

Analog folgt aus dieser Gleichung, dass auch der umgekehrte Satz (S. 249) gilt:

Jede auf eine Rotationsfläche abwickelbare Fläche hat als Evolventenflächen bezüglich der geodätischen Linien, die bei der Abwickelung in die Meridiane übergehen, eine Schar paralleler W-Flächen.

Natürlich bildet wieder derjenige Fall eine Ausnahme, in welchem die Biegungscurven der Meridiane Gerade sind, ein Fall, auf den wir hier nicht weiter eingehen*).

Zwecks Anwendung dieser Sätze wollen wir nachweisen, dass auch für die pseudosphärischen Flächen im elliptischen (oder hyperbolischen) Raume die Complementärtransformation (S. 457) gültig ist.

Es sei im elliptischen Raume ($R = 1$) eine pseudosphärische Fläche vom Radius a gegeben, deren Linienelementquadrat unter Zugrundelegung einer Schar paralleler Grenzkreise: $w_1 =$ Const. und der zu ihnen orthogonalen geodätischen Linien die Form:

$$ds^2 = dw_1^2 + e^{\frac{2w_1}{a}} du^2$$

habe. Die Tangenten der geodätischen Linien u sind die Normalen einer W-Fläche, deren Hauptkrümmungsradien wegen der Gleichung (65) durch die Relation:

*) Nur sei darauf hingewiesen, dass auch hier der Ausnahmefall bei denjenigen Linienflächen eintritt, welche die Ortsflächen der Binormalen der Curven mit constanter Torsion sind. (Vgl. S. 249).

$$\cot(w_1 - w_2) = \frac{1}{a}$$

verbunden sind. Daraus folgt:

Betrachtet man auf einer pseudosphärischen Fläche mit der absoluten Krümmung $K = -\frac{1}{a^2}$ im elliptischen Raume ($R = 1$) eine Schar paralleler geodätischer Linien und trägt auf deren Tangenten vom Berührungspunkt aus in der Richtung der Parallelität eine Strecke $\delta = \operatorname{arc\,tg} a$ ab, so ist die Ortsfläche der Endpunkte wieder eine pseudosphärische Fläche mit derselben absoluten Krümmung $K = -\frac{1}{a^2}$. Es mag noch hinzugefügt werden, dass, ebenso wie im euklidischen Raume, die Krümmungslinien, ebenso die Haupttangentencurven einander entsprechen und entsprechende Bogen letzterer einander gleich sind.

Unschwer liesse sich auch nachweisen, dass nicht nur die Complementärtransformation, sondern auch die Bäcklund'sche Transformation, einschliesslich des Vertauschbarkeitssatzes (Kap. XVII), anwendbar ist.

Es giebt aber einen Grenzfall des obigen Satzes, der besonderes Interesse bietet. Es ist nämlich der Fall, in dem K gleich Null ist, in dem es sich also um die in § 344 betrachteten Flächen handelt. Dann ist die Schar paralleler geodätischer Linien eine gewöhnliche Schar der euklidischen Metrik und das abzutragende Stück δ gleich $\frac{\pi}{2}$, weswegen es natürlich gleichgültig ist, ob man es nach der einen oder nach der anderen Richtung abträgt. Da ferner

$$w_1 - w_2 = \frac{\pi}{2}$$

ist, so besitzen die Evolventenflächen ebenfalls die absolute Krümmung Null, denn wegen

$$r_1 = \operatorname{tg} w_1, \qquad r_2 = \operatorname{tg}\left(w_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot w_1$$

ergiebt sich:

$$k = -1.$$

Somit haben wir das bemerkenswerte Resultat gefunden:

Betrachtet man auf einer Fläche mit der absoluten Krümmung Null im elliptischen Raume vom Radius R eine Schar paralleler geodätischer Linien und trägt auf deren Tangenten vom Berührungspunkt aus eine Strecke gleich $\frac{\pi R}{2}$ ab, so ist die Ortsfläche der Endpunkte wieder eine Fläche mit der absoluten Krümmung Null. Die zu den doppelt un-

endlich vielen Geraden orthogonalen, einander parallelen Flächen haben ebenfalls die absolute Krümmung Null.

Es mag endlich noch hinzugefügt werden, dass auf den Evolventenflächen mit der Krümmung Null und auf den Evolutenflächen ebenfalls die Haupttangentencurven einander entsprechen.

Der obige Satz liefert uns offenbar das Mittel, von einer gegebenen Fläche mit der Krümmung Null ausgehend beliebig viele neue solcher Flächen zu erhalten.

§ 347. Flächen mit dem Krümmungsmass Null im hyperbolischen Raume.

In den voraufgehenden Paragraphen haben wir uns zur Ableitung der Grundgleichungen der elliptischen oder hyperbolischen Geometrie der geodätischen Abbildung des Raumes constanten Krümmungsmasses auf den euklidischen Raum bedient. In manchen Fällen ist es jedoch zweckmässiger, die conforme Abbildung dieses Raumes anzuwenden, was auch zu neuen Eigenschaften von Flächen im gewöhnlichen Raume führen kann. Nehmen wir z. B. die W-Flächen im Raume constanten Krümmungsmasses, so folgt aus den Untersuchungen von Lie (S. 245), dass sich auf einer solchen Fläche die Krümmungslinien durch blosse Quadraturen ergeben. Bei der conformen Abbildung des euklidischen Raumes gehen, wie wir wissen, Krümmungslinien wieder in Krümmungslinien über (§ 335); somit erhalten wir eine neue Klasse von Flächen im euklidischen Raume, deren Krümmungslinien sich durch Quadraturen bestimmen lassen.

Betrachten wir z. B. den hyperbolischen Raum, und es sei, unter Zugrundelegung des Ausdrucks:

$$ds^2 = \frac{R^2(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{z^2}$$

für das Quadrat seines Linienelements,

$$z = z(x, y)$$

die Gleichung einer Fläche. Unter Anwendung der üblichen Monge'schen Bezeichnungen erhalten wir für die Grundgrössen in § 331, b_{rs}, Ω_{rs}, die Werte:

$$b_{11} = \frac{R^2}{z^2}(1 + p^2), \qquad b_{12} = \frac{R^2}{z^2} pq, \qquad b_{22} = \frac{R^2}{z^2}(1 + q^2),$$

$$X_0 = \frac{-pz}{R\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad X_1 = \frac{-qz}{R\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad X_2 = \frac{z}{R\sqrt{p^2 + q^2 + 1}},$$

$$\Omega_{11} = \frac{R}{z\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\left(r + \frac{1 + p^2}{z}\right), \qquad \Omega_{12} = \frac{R}{z\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\left(s + \frac{pq}{z}\right),$$

$$\Omega_{22} = \frac{R}{z\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\left(t + \frac{1 + q^2}{z}\right).$$

Da die Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(\Omega_{11}\Omega_{22} - \Omega_{12}^2)\varrho^2 - (b_{11}\Omega_{22} + b_{22}\Omega_{11} - 2b_{12}\Omega_{12})\varrho + b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$$

sind, so erhalten wir für die relative Krümmung

$$k = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$$

und für die mittlere Krümmung

$$h = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}$$

die Ausdrücke:

$$(66)\quad k = \frac{z^2}{R^2(p^2+q^2+1)^2}\left[rt - s^2 + \frac{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r}{z} + \frac{p^2+q^2+1}{z^2}\right],$$

$$(66^*)\quad h = \frac{z}{R(p^2+q^2+1)^{3/2}}\left[(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r + \frac{2(p^2+q^2+1)}{z}\right].$$

Nun nehmen wir an, es sei die Fläche:

$$z = z(x, y)$$

im hyperbolischen Raume eine W-Fläche. Genau so wie beim Beweise des Lie'schen Satzes (S. 245) ergiebt sich bei Anwendung der Gleichungen (58), dass die covariante Differentialform:

$$\frac{1}{\sqrt{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}}\begin{vmatrix} b_{11}du + b_{12}dv & b_{12}du + b_{22}dv \\ \Omega_{11}du + \Omega_{12}dv & \Omega_{12}du + \Omega_{22}dv \end{vmatrix},$$

welche, gleich Null gesetzt, die Differentialgleichung der Krümmungslinien darstellt, die Krümmung Null hat. In unserem Falle geht sie nun über in:

$$\frac{R}{z(p^2+q^2+1)}\begin{vmatrix} (1+p^2)dx + pq\,dy & pq\,dx + (1+q^2)dy \\ r\,dx + s\,dy & s\,dx + t\,dy \end{vmatrix}$$

und unterscheidet sich nur um den Factor $\frac{R}{z}$ von der analogen, für die Bildfläche des euklidischen Raumes berechneten Differentialform.

Ist insbesondere die W-Fläche eine Minimalfläche, so ist die eben genannte Bedingung erfüllt, und ferner bilden die Krümmungslinien sowohl im hyperbolischen als auch im euklidischen Bildraume ein Isothermensystem. Daraus schliessen wir, dass die Flächen: $z = z(x, y)$ im gewöhnlichen Raume, die der partiellen Differentialgleichung:

$$z[(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r] + 2(p^2+q^2+1) = 0$$

genügen, eine Klasse von Flächen bilden, auf denen die Krümmungslinien Isothermensysteme sind. Allgemeiner gilt dieses für alle Flächen, bei denen die mittlere nichteuklidische Krümmung h, die durch Gleichung (66*) bestimmt ist, constant ist.

§ 348. Flächen mit der absoluten Krümmung Null im hyperbolischen Raume.

Zum Schlusse suchen wir die Flächen mit der absoluten Krümmung Null, d. h. diejenigen Flächen, deren relative Krümmung k gleich $\frac{1}{R^2}$ ist. Ihre Bildflächen im euklidischen Raume sind wegen der Gleichung (66) die Integralflächen der partiellen Differentialgleichung:

$$(67)\quad z^2(rt-s^2)+z[(1+p^2)t-2pqs+(1+q^2)r]=(p^2+q^2)(p^2+q^2+1).$$

Nun betrachten wir eine beliebige Fläche des hyperbolischen Raumes vom Radius R und beziehen sie auf ihre Krümmungslinien u, v; r_1 und r_2 seien ihre Hauptkrümmungsradien und

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2$$

das Quadrat ihres Linienelements. Beziehen wir den Raum auf das dreifache Orthogonalsystem, das von den zur gegebenen Fläche geodätisch parallelen Flächen und den beiden Scharen von Ortsflächen der Normalen der gegebenen Fläche längs der Krümmungslinien gebildet wird, so finden wir für das Quadrat des Linienelements des Raumes den Ausdruck:

$$ds^2 = E\left(\cosh\frac{w}{R} + \frac{R}{r_2}\sinh\frac{w}{R}\right)^2 du^2 + \\ + G\left(\cosh\frac{w}{R} + \frac{R}{r_1}\sinh\frac{w}{R}\right)^2 dv^2 + dw^2, \text{*)}$$

worin w der von der Ausgangsfläche gerechnete Bogen der orthogonalen geodätischen Linien ist.

*) Um diese Gleichung abzuleiten, hat man aus den Gleichungen:

$$X = x\cosh\frac{w}{R} + \xi\sinh\frac{w}{R}$$

den Ausdruck:

$$ds^2 = R^2(dX_0^2 + dX_1^2 + dX_2^2 - dX_3^2)$$

zu berechnen und dabei die Rodrigues'schen Gleichungen:

$$\frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{R}{r_2}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial v} = \frac{R}{r_1}\frac{\partial x}{\partial v}$$

zu berücksichtigen.

Entsprechend haben wir im euklidischen Bildraume ein Kreissystem, bei dessen Zugrundelegung das Linienelement die vorstehende Form annimmt, sofern die rechte Seite noch mit z^2 multipliciert wird. Nun kommt unter den zu den Kreisen orthogonalen Flächen zweimal die Grenzebene vor, das erste Mal für $w = +\infty$, das zweite Mal für $w = -\infty$. Es liegt somit eine Abbildung der Grenzebene auf sich selbst vor, sobald die beiden Punkte A und A', in denen ein Kreis die Grenzebene schneidet, als entsprechend angesehen werden. Sehen wir nun zu, wann die von A und A' beschriebenen beiden Figuren zu einander conform sind. Erwägen wir, dass nach den Gleichungen in § 324 die Producte

$$z \cosh \frac{w}{R}, \qquad z \sinh \frac{w}{R}$$

bei unbegrenzt wachsendem w sich einunddemselben bestimmten und endlichen Grenzwert λ nähern, der eine Function von u, v ist, so erhalten wir für die Linienelementquadrate der von A und A' beschriebenen beiden Figuren die Ausdrücke:

$$(68) \qquad \begin{cases} ds_1{}^2 = \lambda^2 \left[E\left(1 + \frac{R}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(1 + \frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2\right], \\ ds_2{}^2 = \lambda_1{}^2\left[E\left(1 - \frac{R}{r_2}\right)^2 du^2 + G\left(1 - \frac{R}{r_1}\right)^2 dv^2\right]. \end{cases}$$

Soll also die Abbildung conform sein, so müssen wir haben:

$$\frac{1 + \frac{R}{r_2}}{1 - \frac{R}{r_2}} = \pm \frac{1 + \frac{R}{r_1}}{1 - \frac{R}{r_1}},$$

also entweder:

$$r_1 = r_2$$

oder:

$$\frac{1}{r_1 r_2} = \frac{1}{R^2}.$$

Im ersten Falle ist, wie sich aus den Gleichungen (58) leicht ableiten lässt, die Fläche eine Kugel. Im zweiten Falle ist die Fläche, als dem hyperbolischen Raume angehörend betrachtet, eine mit der Krümmung Null, demnach im Bildraume eine Integralfläche der Differentialgleichung (67). Es besitzen somit die Integralflächen dieser Gleichung eine merkwürdige Eigenschaft, die darin besteht, dass, wenn durch jeden Punkt einer solchen Fläche der zu der Fläche und zur xy-Ebene normale Kreis gezogen wird, die beiden Punkte A und A', in denen der Kreis diese Ebene schneidet, zwei zu einander conforme Figuren beschreiben.

Es mag noch hinzugefügt werden, dass bei einer solchen Fläche die conforme Abbildung direct, bei der Kugel dagegen, wie leicht ersichtlich, invers ist*).

Am bemerkenswertesten ist aber der Umstand, dass das obige Ergebnis umgekehrt werden kann und somit eine allgemeine Eigenschaft der conformen Abbildungen durch den Satz ausgedrückt wird:

Es liege irgend eine direct conforme Abbildung einer Ebene auf sich selbst vor. Man nehme ein veränderliches Paar entsprechender Punkte A und A' und lege durch sie den zur Ebene normalen Kreis. Zu diesen doppelt unendlich vielen Kreisen giebt es immer eine Schar von Orthogonalflächen, die, wenn die gegebene Ebene als xy-Ebene gewählt wird, die Integralflächen der Gleichung (67) sind.

Den Beweis übergehen wir, da ihn der Leser auf Grund der allgemeinen Gleichungen für normale Kreissysteme (§ 180) leicht selbst führen kann.

Wir schliessen mit folgender Bemerkung: Würde hingegen die Conformität der Abbildung der Fläche auf eine der beiden von den Punkten A, A' beschriebenen ebenen Figuren gefordert, so würde sich aus den Gleichungen (68) die folgende ergeben:

$$\left(1 \pm \frac{R}{r_2}\right)^2 = \left(1 \pm \frac{R}{r_1}\right)^2.$$

Schliessen wir wieder den Fall der Kugel aus, so sehen wir, dass die verlangte Eigenschaft denjenigen Flächen im hyperbolischen Raume zukommt und auch für sie charakteristisch ist, deren mittlere Krümmung, $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$, gleich $\frac{2}{R}$ ist. Die entsprechende Differentialgleichung für die Bildflächen im euklidischen Raume lautet:

$$\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{1+p^2+q^2} + \frac{2}{z}\left[1 \pm \sqrt{1+p^2+q^2}\right] = 0$$

und kann durch endliche Gleichungen vollständig integriert werden**).

*) Im Falle der Kugel nämlich ist diese Abbildung nichts anderes als eine Inversion mittels reciproker Radienvectoren bezüglich des (reellen oder imaginären) Schnittkreises von Ebene und Kugel.

**) S. die Abhandlung des Verfassers in den Annali di Matematica, 1898.

Anhang zu Kap. XVII.

Zur Transformationstheorie der Flächen mit constantem positivem Krümmungsmass.

In der vorliegenden Note beabsichtige ich, einen kurzen Bericht über wesentlich neue Resultate zu erstatten, welche die Theorie der Flächen constanter positiver Krümmung betreffen. Diese Resultate gestatteten mir, eine reelle Transformationstheorie für diese Flächen aufzustellen, welche eine ganz analoge Wirkung hat, wie die bekannte Transformationstheorie der pseudosphärischen Flächen (Kap. XVII). So passen glücklicher Weise die Worte, mit welchen § 264 des Buches beginnt, zu dem gegenwärtigen Stande unserer Kenntnisse nicht mehr.

Die grundlegenden Sätze, welche die Aufstellung der neuen Transformationstheorie ermöglichten, verdanken wir Herrn Guichard, der seine Resultate in den Comptes Rendus der Pariser Akademie (23. Januar 1899) ohne Beweis bekannt gemacht hat. Indem ich dieselben hier zur Sprache bringe, will ich ihnen sogleich diejenige Form geben, welche unserem Zwecke am besten entspricht.

Wir betrachten ein verlängertes Rotationsellipsoid oder ein zweischaliges Rotationshyperboloid als eine stetig verbiegbare Fläche und denken uns die ∞^2 Strahlen, welche von allen Punkten der Fläche nach dem einen oder nach dem anderen Brennpunkte verlaufen, fest mit der Fläche verbunden*). Dann lautet Guichards Satz folgendermassen:

Bei jeder Verbiegung der betrachteten Rotationsfläche bleiben die beiden Strahlensysteme die Normalen je einer Fläche constanter positiver Krümmung $K = \frac{1}{R^2}$, wobei $2R$ die Länge der grössten Axe der Ellipse oder der Hauptaxe der Hyperbel bezeichnet.

Dieses schöne Resultat des Herrn Guichard habe ich nun in fol-

*) Damit soll gemeint werden (wie bei dem Beltrami'schen Satze, S. 270), dass die Winkel, welche jeder Strahl mit den Linienelementen der Fläche bildet, die von seinem Ausgangspunkte verlaufen, keine Änderung bei der Flächendeformation erleiden sollen.

gender Weise zur Aufstellung der gewünschten Transformation benutzt*): Erstens handelte es sich darum, den Guichard'schen Satz gerade umzukehren, d. h. die Frage zu beantworten, ob es bei jeder gegebenen Fläche S constanter positiver Krümmung möglich ist, ein solches veränderliches Stück auf jeder Flächennormale vom Fusspunkte so abzutragen, dass der Ort Σ der Endpunkte eine auf das Rotationsellipsoid oder -hyperboloid abwickelbare Fläche bildet, welche überdies zur ursprünglichen Fläche S eben in der Guichard'schen Beziehung stehen soll. Das hat sich in der That immer als möglich erwiesen und zwar (was äusserst wichtig ist) auf ∞^3 verschiedene Weisen möglich. Die Bestimmung des unbekannten Normalenstücks hängt nämlich von der Integration eines unbeschränkt integrierbaren Systems ab (von welchem weiter unten die Rede sein wird), dessen allgemeinste Lösung drei willkürliche Constanten enthält.

Wir denken uns weiter die Normalenstrahlen von S auf die Fläche Σ reflectiert und nehmen auf jedem reflectierten Strahle den Punkt M', welcher zum Fusspunkte M des ursprünglichen Normalenstrahles von S in Bezug auf die Tangentialebene der reflectierenden Fläche Σ symmetrisch liegt. Dann haben wir den Satz:

Der Punkt M' beschreibt eine neue Fläche S', welche dieselbe positive constante Krümmung wie S hat; die Normalen der Fläche S' fallen mit den reflectierten Strahlen zusammen.

Somit haben wir also die gesuchte Transformation, und zwar können wir sagen:

Aus jeder bekannten Fläche S, welche auf die Kugel abwickelbar ist, kann man durch Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung (zweiter Ordnung) ∞^3 neue solche Flächen ableiten.

Ohne auf die Beweise einzugehen, will ich jetzt das System der Differentialgleichungen aufstellen, von dessen Integration die Bestimmung unserer Transformationen abhängt. Dasselbe kann als eine Verallgemeinerung des Weingarten'schen Systems (D) gelten, welches auf S. 555 besprochen ist. Es seien in unseren gewöhnlichen Bezeichnungen des Kap. IV

$$Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$$
$$Ddu^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2$$

die beiden quadratischen Fundamentalformen einer als bekannt vorausgesetzten Fläche S, welche auf die Kugel vom Radius $r = 1$ ab-

*) Siehe Rendiconti dell' Accademia dei Lincei, 5. März 1899.

wickelbar ist. Wird mit c eine willkürliche Constante bezeichnet und bedeuten W, Φ zwei unbekannte Functionen von u, v, so lautet das System unserer Differentialgleichungen wie folgt:

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial v} + cEW + (c+1)D\Phi, \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial v} + cFW + (c+1)D'\Phi, \\ \dfrac{\partial^2 W}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial v} + cGW + (c+1)D''\Phi; \end{cases}$$

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} = \dfrac{FD' - GD}{EG - F^2} \dfrac{\partial W}{\partial u} + \dfrac{FD - ED'}{EG - F^2} \dfrac{\partial W}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} = \dfrac{FD'' - GD'}{EG - F^2} \dfrac{\partial W}{\partial u} + \dfrac{FD' - ED''}{EG - F^2} \dfrac{\partial W}{\partial v}. \end{cases}$$

Dasselbe kann als ein System von totalen linearen Differentialgleichungen für

$$\Phi,\quad W,\quad \frac{\partial W}{\partial u},\quad \frac{\partial W}{\partial v}$$

aufgefasst werden. Es ist leicht einzusehen, dass dieses System (A), (B) unbeschränkt integrierbar ist, wie auch die Constante c gewählt sein mag. Somit enthält die allgemeine Lösung desselben vier willkürliche Constanten; als solche können z. B. die willkürlichen Anfangswerte von

$$\Phi,\quad W,\quad \frac{\partial W}{\partial u},\quad \frac{\partial W}{\partial v}$$

für besondere Werte $u = u_0$, $v = v_0$ der unabhängigen Variabeln u, v genommen werden.

Nun wird der Ausdruck:

$$\Delta_1 W - cW^2 + (c+1)\Phi^2$$

wegen der Gleichungen (A), (B), notwendig eine Constante sein. Für unseren Zweck müssen wir diese Constante gleich Null machen, was offenbar durch passende Verfügung über die oben angeführten Anfangswerte immer erreichbar ist. Wir setzen also voraus, dass durch W, Φ ausser den Gleichungen (A), (B) auch folgender Gleichung:

$$\text{(C)}\qquad \Delta_1 W - cW^2 + (c+1)\Phi^2 = 0$$

genügt wird*). Haben wir nun zwei solche Functionen W, Φ bestimmt, so brauchen wir nur

$$T = \frac{W}{\Phi}$$

zu setzen, so wird diese Function $T(u, v)$ das Stück ergeben, das

*) Wenn wir, wie immer, beim Reellen bleiben wollen, so hat dieses zur Folge, dass $c(c+1) > 0$ sein muss, weil nämlich $\Delta_1 W$ immer positiv ausfällt. Insbesondere können wir nicht c gleich -1 setzen, wodurch (A) eben in das Weingarten'sche System (S. 555) übergehen würde.

auf jeder Flächennormale von S abzutragen ist. Dann wird der Ort der Endpunkte dieser Stücke die oben betrachtete Fläche Σ liefern, und zwar wird Σ auf das Rotationsellipsoid oder auf das Hyperboloid abwickelbar sein, je nachdem $c < 0$ oder > 0 ist. Es ist auch ganz leicht einzusehen, dass die Anzahl der willkürlichen Constanten, welche (von c abgesehen) in der Function $T(u, v)$ enthalten sind, gerade zwei beträgt. Die reellen Transformationen der auf die Kugel abwickelbaren Flächen, die wir auf diesem Wege gewonnen haben, haben ganz analoge Eigenschaften, wie die Complementär- und die Bäcklund'schen Transformationen der pseudosphärischen Flächen. Bei jeder unserer neuen Transformationen entsprechen einander nämlich auf der Ausgangsfläche S und auf der transformierten Fläche S' immer die Krümmungslinien; ausserdem entspricht jedem conjugierten Curvensystem auf S wieder ein conjugiertes System auf S'.

Gegenüber der involutorischen Hazzidakis'schen Transformation (§ 265, S. 473) zeigen unsere Transformationen ein ganz einfaches Verhalten. Sie sind nämlich mit der Hazzidakis'schen Transformation geradezu vertauschbar. Endlich können unsere Transformationen nicht nur auf isolierte Flächen, sondern auch ebensogut auf Weingarten'sche Systeme mit constantem positivem Krümmungsmass (S. 560) angewandt werden. Aus jedem bekannten Weingarten'schen System leitet man auf solche Weise ∞^3 neue Weingarten'sche Systeme ab.

Wir kommen nun zu den interessanten Beziehungen, welche unsere neuen Transformationen zu den alten aufweisen.

Lässt man die Bedingung der Realität fallen, so können natürlich die Complementär- und die Bäcklund'schen Transformationen ebensogut auf Flächen constanter positiver Krümmung wie auf pseudosphärische Flächen angewandt werden. Nur geben sie, auf eine reelle Fläche S, z. B. mit der Krümmung $K = +1$, angewandt, immer eine solche imaginäre Fläche. Dass aber durch weitere Ausführung einer zweiten passenden imaginären Bäcklund'schen Transformation die neue imaginäre Fläche wieder in eine reelle übergeht, lehrt der Satz:

Jede unserer reellen Transformationen der Flächen constanter positiver Krümmung lässt sich aus zwei passend gewählten imaginären Bäcklund'schen Transformationen zusammensetzen.

Hierin scheint der Grund zu liegen, weshalb uns die neuen Transformationen so lange verborgen geblieben sind. Als reelle Transformationen sind sie nämlich complicierterer Natur als die alten und lassen sich nur in zwei solche einfachere imaginäre Transformationen zerfällen.

Wir wollen jetzt die analytischen Formeln, welche die Zusammensetzung unserer reellen Transformationen aus Bäcklund'schen imaginären Transformationen liefern, in gedrängter Kürze behandeln. Wir wissen (§ 264, S. 471), dass die Bestimmung der Flächen constanter positiver Krümmung von der Integration der partiellen Differentialgleichung:

$$\text{(D)} \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} + \sinh \vartheta \cosh \vartheta = 0$$

abhängt. Ist eine Lösung ϑ dieser Gleichung bekannt, so wird daraus eine Fläche S mit der Krümmung $K = +1$ der Form nach vollständig bestimmt. Das Quadrat des Linienelements der Fläche, auf die Krümmungslinien u, v bezogen, lautet:

$$\text{(E)} \qquad ds^2 = \sinh^2 \vartheta \, du^2 + \cosh^2 \vartheta \, dv^2. \text{*)}$$

Unter σ_1 eine beliebig gegebene (reelle oder complexe) Constante verstanden, betrachten wir nun folgendes Gleichungssystem, welchem eine unbekannte Function $\vartheta_1(u, v)$ genügen soll:

$$\text{(F)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial u} + i \dfrac{\partial \vartheta}{\partial v} = \sinh \sigma_1 \cosh \vartheta \sinh \vartheta_1 + \cosh \sigma_1 \sinh \vartheta \cosh \vartheta_1, \\ i \dfrac{\partial \vartheta_1}{\partial v} + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial u} = -\sinh \sigma_1 \sinh \vartheta \cosh \vartheta_1 - \cosh \sigma_1 \cosh \vartheta \sinh \vartheta_1 \end{cases}$$
$$(i = \sqrt{-1}).$$

Die Integrabilitätsbedingung wird wegen (D) identisch erfüllt, sodass unsere Gleichungen (F) ein unbeschränkt integrierbares System bilden, dessen allgemeine Lösung ϑ_1 eine willkürliche Constante enthält. Ausserdem folgt aus den Gleichungen (F), dass ϑ_1 wieder eine Lösung der Fundamentalgleichung (D) liefert. Ebenso bestimmen wir eine dritte Lösung ϑ_2 durch Integration des ähnlich gebildeten Systems:

$$\text{(F*)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta_2}{\partial u} + i \dfrac{\partial \vartheta}{\partial v} = \sinh \sigma_2 \cosh \vartheta \sinh \vartheta_2 + \cosh \sigma_2 \sinh \vartheta \cosh \vartheta_2, \\ i \dfrac{\partial \vartheta_2}{\partial v} + \dfrac{\partial \vartheta}{\partial u} = -\sinh \sigma_2 \sinh \vartheta \cosh \vartheta_2 - \cosh \sigma_2 \cosh \vartheta \sinh \vartheta_2, \end{cases}$$

wobei nur der Wert der Constanten in σ_2 geändert worden ist.

Gerade wie bei pseudosphärischen Flächen gilt nun auch für unsere Fundamentalgleichung (D) ein Vertauschbarkeitssatz (vgl. § 257 u. f.), welcher Folgendes besagt: Haben wir drei Lösungen

---

*) Eigentlich entspricht der Lösung ϑ noch eine zweite Fläche S' mit derselben Krümmung, die Hazzidakis'sche Transformierte von S, deren Linienelement durch

$$\text{(E*)} \qquad ds^2 = \cosh^2 \vartheta \, du^2 + \sinh^2 \vartheta \, dv^2$$

gegeben ist.

$\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$ von (D) gefunden, welche mit einander durch die Gleichungen (F) und (F*) verbunden sind, so können wir eine vierte Lösung ϑ_3 aus der endlichen Gleichung:

$$\text{(G)} \qquad \operatorname{tgh}\frac{\vartheta_3 - \vartheta}{2} = \operatorname{tgh}\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \coth\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{2}$$

bestimmen. Diese vierte Lösung ϑ_3 ist, wie leicht nachweisbar ist, mit ϑ_1, ϑ_2 durch die Gleichungen verbunden, welche aus (F), (F*) entstehen, wenn man darin ϑ durch ϑ_3 ersetzt und dabei die Constanten σ_1, σ_2 vertauscht. Jetzt nehmen wir an, dass die erste Lösung ϑ von (D) reell sei und setzen ausserdem

$$\sigma_1 = \sigma, \quad \sigma_2 = -\sigma,$$

wobei σ eine reelle Constante bedeutet. Dann wird, wie aus (F) ersichtlich ist, ϑ_1 nothwendig complex ausfallen; unter Trennung des Reellen und Imaginären schreiben wir:

$$\vartheta_1 = \omega + i\varphi.$$

Wir können alsdann den Gleichungen (F*) durch folgende Annahme genügen:

$$\vartheta_2 = -\omega + i\varphi + i\pi,$$

wonach Gleichung (G) in die folgende übergeht:

$$\text{(G*)} \qquad \operatorname{tgh}\frac{\vartheta_3 - \vartheta}{2} = \operatorname{tgh}\sigma \operatorname{tgh}\omega.$$

Man sieht also, dass die vierte Lösung ϑ_3 wieder reell ausfällt.

Wollen wir unser Gleichungssystem (F) auf eine ganz reelle Form bringen, so brauchen wir darin nur ϑ_1 durch $\omega + i\varphi$ zu ersetzen und das Reelle vom Imaginären zu trennen. Dann erhalten wir folgendes Gleichungssystem für die unbekannten reellen Functionen ω, φ:

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\omega}{\partial u} = \quad (\sinh\sigma\cosh\vartheta\sinh\omega + \cosh\sigma\sinh\vartheta\cosh\omega)\cos\varphi, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial v} = -(\sinh\sigma\sinh\vartheta\sinh\omega + \cosh\sigma\cosh\vartheta\cosh\omega)\sin\varphi; \end{cases}$$

$$\text{(H*)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\vartheta}{\partial v} = (\sinh\sigma\cosh\vartheta\cosh\omega + \cosh\sigma\sinh\vartheta\sinh\omega)\sin\varphi, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial\vartheta}{\partial u} = (\sinh\sigma\sinh\vartheta\cosh\omega + \cosh\sigma\cosh\vartheta\sinh\omega)\cos\varphi. \end{cases}$$

Dieses System von totalen Differentialgleichungen für die unbekannten Functionen ω, φ ist natürlich unbeschränkt integrierbar, wie übrigens sehr leicht direct zu bestätigen ist.

Nun wird durch unsere vierte Lösung ϑ_3 eine reelle Fläche S_3 mit der Krümmung $K = +1$ und mit dem Linienelementquadrat:

$$ds^2 = \sinh^2\vartheta_3 du^2 + \cosh^2\vartheta_3 dv^2$$

vollständig bestimmt; diese Fläche S_3 lässt sich eben aus S durch eine unserer Transformationen ableiten. Tragen wir nämlich auf jeder Flächennormale von S vom Fusspunkte ein Stück T, welches durch die Gleichung:

$$T = \operatorname{tgh} \sigma \operatorname{tgh} \omega$$

bestimmt wird, ab, so ist der Ort Σ der Endpunkte der Strecken auf dasjenige Rotationsellipsoid abwickelbar, dessen Halbaxen die Werte

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{\cosh \sigma}$$

haben. Nehmen wir nun zu jedem Punkte M von S den symmetrischen Punkt M_3 in Bezug auf die entsprechende Tangentenebene von Σ, so beschreibt der Punkt M_3 die transformierte Fläche S_3.

Fragt man noch, wie die zugehörigen Werte von W, Φ, welche den Gleichungen (A), (B), (C) genügen, zu berechnen sind, so lautet die Antwort: Es wird Φ aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial u} = -\frac{\sinh \sigma \cosh \vartheta \cos \varphi}{\cosh \omega},$$
$$\frac{\partial \log \Phi}{\partial v} = \frac{\sinh \sigma \sinh \vartheta \sin \varphi}{\cosh \omega}$$

durch blosse Quadraturen bestimmt, während W gleich $\Phi \operatorname{tgh} \sigma \operatorname{tgh} \omega$ wird. Der Constanten c muss dabei der negative Wert:

$$c = -\cosh^2 \sigma$$

erteilt werden.

Es erübrigt noch, den zweiten Fall, in dem die Fläche Σ auf das Rotationshyperboloid abwickelbar ist, zu besprechen. Dazu haben wir nur nöthig, in den vorstehenden Formeln, insbesondere in den Gleichungen (H), (H*), u mit v zu vertauschen. Dann wird das Stück T durch

$$T = \coth \sigma \coth \omega$$

bestimmt, wobei der Constanten c der positive Wert: $c = \sinh^2 \sigma$ erteilt werden muss.

Zum Schlusse bemerken wir, dass alle Folgerungen aus dem Vertauschbarkeitssatze, welche in § 259 u. f. entwickelt worden sind, auch für unsere Fundamentalgleichung (D) ihre volle Gültigkeit behalten. Insbesondere haben wir das wichtige Ergebnis:

Gelingt für eine vorgelegte Fläche S constanter positiver Krümmung die vollständige Integration der Transformationsgleichungen, so erfordert die fortgesetzte Anwendung der Transformation auf jede transformierte Fläche S' nur algebraische Rechnungen und Differentiationen.

Beispiele solcher wirklich existierenden Fälle sind leicht zu bilden, indem man z. B. von der particulären Lösung: $\vartheta = 0$ der Gleichung (D) ausgeht (vgl. § 61).

So haben wir nunmehr die Theorie der Flächen constanter positiver Krümmung auf denselben Höhepunkt gebracht, auf welchen schon seit einigen Jahren die Theorie der pseudosphärischen Flächen gebracht worden ist.

Wir fügen endlich hinzu, dass selbst für pseudosphärische Flächen eine ganz entsprechende Theorie entwickelt werden kann. Die Transformationen, die man dadurch erhält, können nur zum Teil aus reellen Complementär- und Bäcklund'schen Transformationen zusammengesetzt werden. In anderen Fällen sind sie, als reelle Transformationen aufgefasst, wirklich neu, indem man nun wieder nur imaginäre Bäcklund'sche Transformationen benutzen kann, um sie in einfachere Transformationen aufzulösen.

Die verschiedenen Punkte, welche in der vorliegenden Note flüchtig berührt worden sind, sollen in einer Arbeit des Verfassers, welche demnächst in den Annali di Matematica (Serie III, T. III) erscheinen wird, eine eingehendere Behandlung erfahren.

Pisa, im Mai 1899.

Sachregister.

A.

B.

Seite

C.

D.

Seite

O.

P.

Q.

R.

S.

Z.

Verzeichnis der berücksichtigten Litteratur.

Bäcklund, *Om ytor med konstant negativ krökning.* (Lunds Univ. Årsskrift, 19. Bd., 1883)

Beez, *Zur Theorie des Krümmungsmasses.* (Schlömilchs Zeitschrift, 21. Bd.)

Beltrami, *Ricerche di Analisi Applicata alla Geometria.* (Giornale di Matematiche di Napoli, 2. u. 3. Bd., 1864—65)

—— *Sulla Flessione delle Superficie Rigate.* (Annali di Matematica, 7. Bd., 1865)

—— *Saggio di Interpretazione della Geometria non-Euclidea.* (Giornale di Matem., 6. Bd., 1868)

—— *Teoria Fondamentale degli Spazii di Curvatura Costante.* (Annali di Matem., 2. Ser., 2. Bd., 1868)

—— *Sulle Proprietà Generali delle Superficie d'Area Minima.* (Atti dell' Accademia di Bologna, 7. Bd., 1868)

—— *Sulla Teorica Generale dei Parametri Differenziali.* (Atti dell' Accad. di Bologna, Februar 1869)

Bonnet, *Mémoire sur les Surfaces Applicables.* (Journal de l'École Polytechnique, 41. und 42. Heft, 1864—65)

Bour, *Théorie de la Déformation des Surfaces.* (Journal de l'Éc. Pol., 39. Heft, 1862)

Cayley, *A Sixth Memoir upon Quantics.* (Philosophical Transactions, 149. Bd., 1859)

Christoffel, *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.* (Crelles Journal, 70. Bd.)

Clifford, *On the Theory of Screws in a Space of Constant Positive Curvature.* (Collected Mathematical Papers, Nr. 44)

Cosserat *Sur, les Congruences des Droites et sur la Théorie des Surfaces.* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 7. Bd., 1893)

Darboux, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces.* (Paris, Gauthier-Villars, 1887, 1., 2. Bd. und die beiden ersten Lieferungen des 3. Bandes bis S. 444)

—— *Mémoire sur la Théorie des Coordonnées Curvilignes et des Systèmes Orthogonaux.* (Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 2. Sér., 7. Bd., 1878)

Dini, *Sopra Alcuni Punti della Teoria delle Superficie.* (Atti dell' Accademia dei XL, 3. Ser., 1. Bd., 1868)

—— *Ricerche sopra la Teoria delle Superficie.* (Atti dell' Accad. dei XL, 3. Ser., 2. Bd., 1869)

Dupin, *Développements de Géométrie.* (Paris-Courcier, 1813)

—— *Applications de Géométrie et de Mécanique.* (Paris-Bachelier, 1822)

Gauss, *Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas.* (Werke, 4. Bd.)

Guichard, *Surfaces Rapportées à leurs Lignes Asymptotiques et Congruences Rapportées à leurs Développables.* (Annales de l'École Normale, 3. Sér., 6. Bd., 1889)

—— *Recherches sur les Surfaces à Courbure Totale Constante et Certaines Surfaces qui s'y rattachent.* (Ann. de l'École Norm., 3. Sér., 7. Bd., 1890)

—— *Détermination des Congruences Telles que les Lignes Asymptotiques se correspondent sur les deux Nappes de la Surface Focale.* (Comptes Rendus, 110. Bd., 1890)

Joachimsthal, *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung.* (Leipzig-Teubner 1872)

Killing, *Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung.* (Leipzig-Teubner, 1885)

Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder.* (Leipzig-Teubner, 1884)

—— *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie.* (Lithographiert, Göttingen, 1890)

—— *Zur nicht-euklidischen Geometrie.* (Mathem. Annalen, 37. Bd. Siehe auch 4. und 6. Bd.)

Knoblauch, *Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen.* (Leipzig-Teubner, 1888)

Kronecker, *Über Systeme von Functionen mehrerer Variabeln.* (Berliner Berichte, 1869, S. 695)

Kummer, *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme.* (Crelles Journal, 57. Bd.)

Lelieuvre, *Sur les Lignes de Courbure et les Lignes Asymptotiques des Surfaces.* (Comptes Rendus, 111. Bd., S. 183)

Lie, *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung.* (Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Christiania, 1881)

Lindemann, *Über unendlich kleine Bewegungen bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung.* (Mathem. Annalen, 7. Bd.)

Lipschitz, *Untersuchungen in betreff der ganzen homogenen Functionen von n Differentialen.* (Crelles Journal, 70. und 72. Bd.)

Minding, *Über die Biegung gewisser Flächen.* (Crelles Journal, 18. Bd.)

Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie.* (Paris-Bachelier, 1850)

Neovius, *Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimalflächen, auf welchen unendlich viele gerade Linien und unendlich viele geodätische Linien liegen.* (Helsingfors-Frenckell, 1884)

Padova, *Sulla Teoria Generale delle Superficie.* (Atti dell' Accad. di Bologna, 4. Ser., 10. Bd., 1890)

Poincaré, *Mémoire sur les Groupes Kleinéens.* (Acta Mathematica, 3. Bd., S. 49)

Ribaucour, *Étude des Elassoides ou Surfaces à Courbure Moyenne Nulle.* (Mémoires Couronnés par l'Académie de Belgique, 44. Bd., 1881)

—— *Mémoire sur la Théorie des Surfaces Courbes.* (Journal des Mathématiques, 4. Sér., 7. Bd., 1891)

Ricci, *Sui Parametri e gli Invarianti delle Forme Quadratiche Differenziali.* (Annali di Matem., 2. Ser., 14. Bd., 1886)

—— *Delle Derivazioni Covarianti e Contravarianti e del loro Uso nell' Analisi Applicata.* (3. Bd. der: Studi offerti dalla Università Padovana alla Bolognese nell' 8. centenario etc., Padova, 1888)

Riemann, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* (Gesammelte Werke, Leipzig-Teubner, S. 254. Vgl. auch die Zusätze von Dedekind, S. 517)

M. Roberts, *Sur quelques Propriétés des Lignes Géodésiques et des Lignes de Courbure de l'Ellipsoide.* (Liouvilles Journal, 11. und 13. Bd.)

Schell, *Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung.* (Leipzig-Teubner, 1859)

Schur, *Über Räume constanten Krümmungsmasses.* (Mathem. Annalen, 27. Bd., S. 172 u. 538)

Schwarz, *Gesammelte Werke, 1. Bd.* (Berlin-Springer, 1890)

P. Serret, *Théorie Nouvelle Géométrique et Mécanique des Lignes à Double Courbure.* (Paris-Bachelier, 1860)

Voss, *Über diejenigen Flächen, auf denen zwei Scharen geodätischer Linien ein conjugiertes System bilden.* (Sitzungsberichte der kgl. Akademie der Wissenschaften zu München, 3. März 1888)

—— *Zur Theorie des Riemannschen Krümmungsmasses.* (Math. Annalen, 16. Bd.)

Weierstrass, *Über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist.* (Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, S. 612 und 855)

Weingarten, *Über eine Klasse auf einander abwickelbarer Flächen.* (Crelles Journal, 59. Bd.)

—— *Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist.* (Crelles Journal, 62. Bd.)

—— *Über die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen.* (Festschrift der technischen Hochschule zu Berlin, 1884)

—— *Über die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche.* (Crelles Journal, 100. Bd.)

